L'Imagerie par Résonance Magnétique nucléaire

Problèmes mathématiques et numériques

G. Caloz, P. Boissoles [1] S. Balac [2]

[1] IRMAR, UMR 6625
Université de Rennes 1

[2] Centre de Mathématiques
INSA de Lyon

23 juin 2005 / Séminaire d'analyse numérique, Nantes

Plan de l'exposé

Collaboration

C'est une collaboration avec le LRMBM (Laboratoire de Résonance Magnétique en Biologie et Médecine) de l'Université de Rennes 1 : J.D. De Certaines, G. Cathelineau, H. Boukhil,...

Comment interpréter les images obtenues par les imageurs ?

- Modélisation du processus de construction des images
- Algorithmes de construction
- Construction *numérique* des images pour y insérer de l'information

Un premier problème

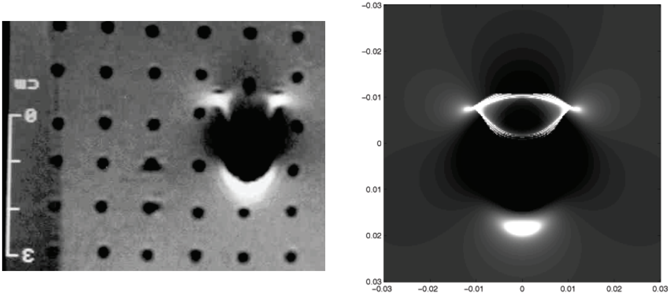


FIG.: Une sphère : image expérimentale (gauche) et image calculée (droite)

Des champs magnétiques à étudier !

FIG.: Imageur

Plus précisément !

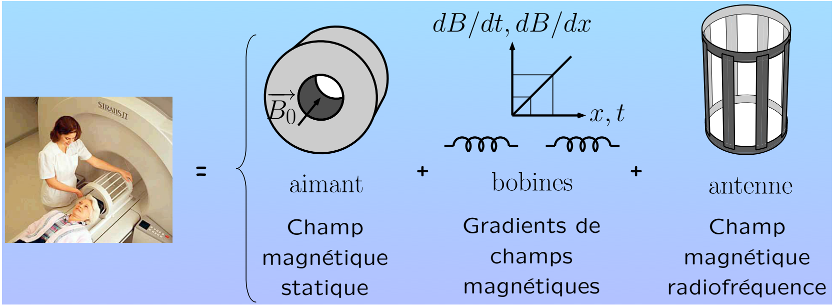


FIG.: Schéma de principe

Champ B_0 statique

Les noyaux atomiques placés dans un champ magnétique $\mathbf{B_0}$, stimulés par une impulsion radio fréquence (RF pulse) $\mathbf{B_1}$, ré-émettent une partie de l'énergie absorbée sous forme d'un signal radio. C'est la **Résonance Magnétique Nucléaire (RMN)**. Le signal émis est le signal RMN.

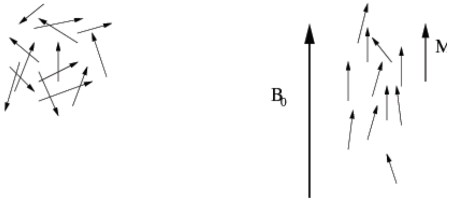


FIG.: Échantillon placé dans un champ $\mathbf{B_0}$($\simeq$ 1 Tesla) ; magnétisation macroscopique M

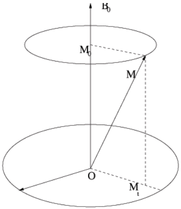


FIG.: Dipôle soumis à un champ radio-fréquence $\boldsymbol{B_1}$ (42.6Mhz)

La fréquence des impulsions est donnée par **la relation de Larmor** (les noyaux résonent)

$$\nu_L = \frac{\gamma}{2\pi} B, \tag{1}$$

où

- B est le module du champ magnétique appliqué,
- γ est le rapport gyromagnétique, qui est caractéristique de l'espèce étudiée.

Champ radio-fréquence

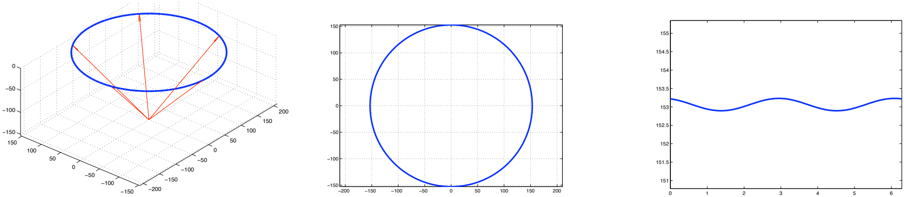


FIG.: Champ radio-fréquence à $R/4$

Champ radio-fréquence

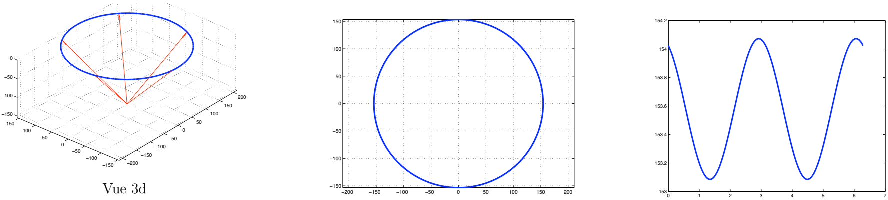


FIG.: Champ radio-fréquence à $R/2$

Champ radio-fréquence

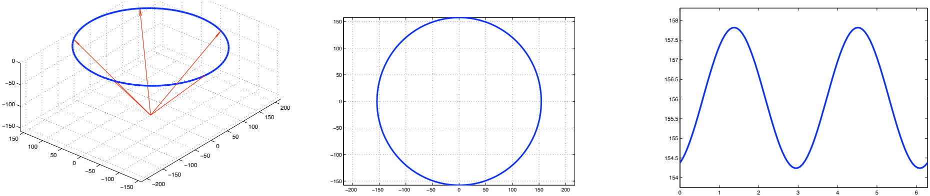


FIG.: Champ radio-fréquence à $3R/4$

Champ radio-fréquence

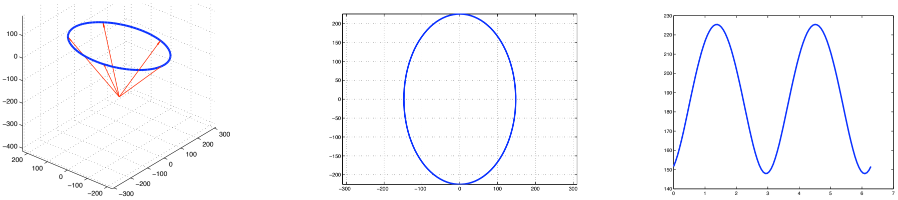


FIG.: Champ radio-fréquence à $9R/10$

Commentaires

- La relation de Larmor (1) donne aussi la fréquence du signal RMN émis.
- Pour des raisons de sensibilité, l'IRM concerne l'étude des **noyaux d'hydrogène.**
- Nous obtenons des informations concernant la densité de noyaux et la composition chimique.

Difficulté : Le signal provient de tout l'échantillon !

- Il faut localiser par une technique de **codage spatial** $\Rightarrow$ IRM.
- Utilisation de **gradients de champs magnétiques.** La relation de Larmor est de la forme

$$\nu_L = \frac{\gamma}{2\pi}(B + \Delta B).$$

Les gradients de champ

Un gradient est un **champ magnétique** appliqué dans la même direction que le champ statique $\boldsymbol{B_0}$ mais **avec un module qui dépend linéairement de la position.**
Le gradient est beaucoup plus faible que $\boldsymbol{B_0}$, environ 10^4 fois.
Nous représentons le gradient sous la forme

$$\boldsymbol{G}(P) = g(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{z},$$

- g représente l'intensité du gradient,
- $\boldsymbol{n}$ sa direction,
- $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$,
- $\boldsymbol{z}$ est la direction de $\boldsymbol{B_0}$.

Sélection du plan de coupe

Pour l'image d'un plan Π_s à travers l'échantillon : $\boldsymbol{n_s}$ le vecteur normal unité au plan et C le point appartenant à Π_s tel que $\boldsymbol{OC} = c\,\boldsymbol{n_s}$.

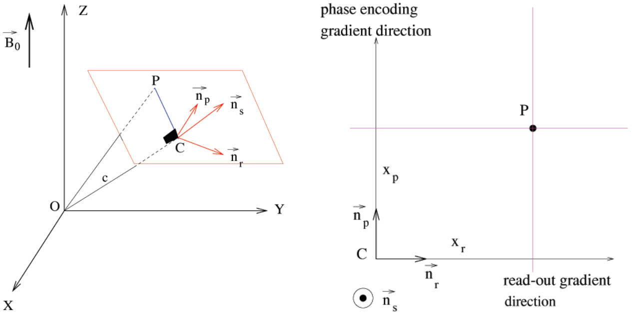


FIG.: Sélection d'une coupe de l'échantillon.

Plan de coupe

Un gradient $\boldsymbol{G_s}$ appelé **gradient de sélection de coupe** est appliqué simultanément à l'impulsion RF $\boldsymbol{B_1}$. Nous avons

$$\boldsymbol{G_s}(P) = g_s(\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{n_s})\boldsymbol{z} = g_s\left((\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP}) \cdot \boldsymbol{n_s}\right)\boldsymbol{z} = g_s c\boldsymbol{z}.$$

Tous les noyaux d'une espèce donnée (hydrogène) dans le plan Π_s ont la même fréquence de résonance donnée par

$$\nu_s = \frac{\gamma}{2\pi}|\boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{G_s}| = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_s c).$$

Hors du plan Π_s les noyaux ont une fréquence de Larmor qui diffère de ν_s.
Lorsque qu'une impulsion RF $\boldsymbol{B_1}$ est appliquée à la fréquence $\nu_1 = \nu_s$, seuls les noyaux de Π_s résonent.

Codage dans le plan de coupe

Gradient de lecture (read-out)

Deux autres gradients sont appliqués pour localiser à l'intérieur du plan Π_s.
Le **Gradient de lecture**(read-out) $\boldsymbol{G_r}$ est appliqué pendant la réception du signal RMN.

$$\boldsymbol{G_r}(P) = g_r(\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{n_r})\boldsymbol{z} = g_r(\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{n_r})\boldsymbol{z} = g_r x_r \boldsymbol{z}.$$

La fréquence du signal RMN est alors donnée par

$$\nu = \frac{\gamma}{2\pi}|\boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{G_r}| = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_r x_r).$$

Gradient de phase (phase-encoding)

Le gradient $\boldsymbol{G_p}$ est appliqué pendant une brève période T_p avant la réception du signal.

$$\boldsymbol{G_p}(P) = g_p(\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{n_p})\boldsymbol{z} = g_p(\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{n_p})\boldsymbol{z} = g_p x_p \boldsymbol{z}.$$

La phase du signal est alors donnée par

$$\phi = 2\pi\nu_L(P) T_p = \gamma|\boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{G_p}| T_p = \gamma(B_0 + g_p x_p) T_p.$$

Ce **codage spatial en fréquence et en phase** permet, via une transformation de Fourier du signal, d'obtenir une image de la coupe Π_s.

Densité des noyaux d'hydrogène

On néglige la relaxation : le signal admet la représentation

$$S(t_r, g_p) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x_r, x_p) \ \exp\left(i\,\gamma(g_r x_r t_r + g_p x_p T_p)\right) \, dx_r dx_p, \qquad (2)$$

où la fonction ρ est la densité de noyaux dans la coupe Π_s.
Nous effectuons la transformée de Fourier du signal, appelée **2D-FT** en IRM. Soit le changement de variables

$$\psi(x_r, x_p) \equiv (\tau_1, \tau_2) = (-\frac{\gamma}{2\pi} g_r x_r, -\frac{\gamma}{2\pi} T_p x_p).$$

Soit J le jacobien de l'inverse, $J = (\gamma\!\!\!/^{\,2} T_p g_r)^{-1}$, $\gamma\!\!\!/ = \gamma/2\pi$. Alors

$$S(t_r, g_p) = \int_{\mathbb{R}^2} A(\tau_1, \tau_2) \ \exp(-2\pi i(\tau_1 t_r + \tau_2 g_p)) \, d\tau_1 d\tau_2,$$

avec $A(\tau_1, \tau_2) = \rho(\psi^{-1}(\tau_1, \tau_2))J$. C'est la transformée de Fourier inverse de A.

Soit $\mathrm{I}(\tau_1, \tau_2)$ l'intensité au point (τ_1, τ_2) de l'image (pixel de l'image). Nous prenons la transformée de Fourier

$$\mathrm{I}(\tau_1, \tau_2) = \mathcal{F}[\mathrm{S}(\mathrm{t_r}, \mathrm{g_p})] = \mathrm{A}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\gamma^2 \mathrm{T_p} \mathrm{g_r}} \rho(-\frac{\tau_1}{\gamma\, \mathrm{g_r}}, -\frac{\tau_2}{\gamma\, \mathrm{T_p}}).$$

La transformée du signal collecté conduit à la représentation de la densité ρ dans le plan Π_{s}.

Note : En pratique pour le codage en phase des intervalles de temps constants $\mathrm{T_p}$ sont utilisés. Un gradient de phase $\mathrm{g_p}$ est utilisé pour le codage. Le signal ne peut être obtenu que pour une nombre fini de valeurs de $\mathrm{g_p}$. Une transformée de Fourier discrète est faite pour obtenir l'image.

Champ magnétique additionnel

Question : Comment des inhomogénéités induisent-elles des distorsions ?

On rajoute un champ perturbateur. Le champ magnétique total est alors donné par

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{G_s}(\mathrm{P}) + \boldsymbol{B}'(\mathrm{P}).$$

Hypothèse : Les inhomogénéités sont du même ordre que les gradients et beaucoup plus faibles que le champ $\boldsymbol{B_0}$.
Il est raisonnable de faire l'approximation

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}) \approx \mathrm{B}_0 + \mathrm{G_s}(\mathrm{P}) + \mathrm{B}'_\mathrm{z}(\mathrm{P}),$$

où B'_z représente la composante de l'inhomogénéité le long de la direction z.

Sélection de la coupe

La fréquence de Larmor ν_{L} donnée par (1) est approchée par

$$\nu_{\mathrm{L}}(\mathrm{P}) = \frac{\gamma}{2\pi}(\mathrm{B}_0 + \mathrm{G}_{\mathrm{s}}(\mathrm{P}) + \mathrm{B}'_{\mathrm{z}}(\mathrm{P})).$$

Pour choisir la coupe Π_{s} l'impulsion RF $\boldsymbol{B_1}$ est appliquée à la fréquence ν_1 donnée par

$$\nu_1 = \frac{\gamma}{2\pi}(\mathrm{B}_0 + \mathrm{g}_{\mathrm{s}}\mathrm{c}).$$

Les noyaux résonants sont ceux pour lesquels la fréquence de Larmor ν_{L} est égale à la fréquence ν_1.
Ils ne sont plus sur le plan Π_{s}, mais sur l'ensemble des points P tels que

$$\mathrm{G}_{\mathrm{s}}(\mathrm{P}) + \mathrm{B}'_{\mathrm{z}}(\mathrm{P}) = \mathrm{g}_{\mathrm{s}}\mathrm{c}. \tag{3}$$

Nous notons $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ les coordonnées de P dans le système du laboratoire et par $(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3)$ les composantes du vecteur $\boldsymbol{n_s}$. Soit $\mathrm{c}'(\mathrm{P}) = \boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{n_s} = \mathrm{n}_1\mathrm{x} + \mathrm{n}_2\mathrm{y} + \mathrm{n}_3\mathrm{z}$. Alors nous avons

$$\mathrm{G_s}(\mathrm{P}) = \mathrm{g_s}\mathrm{c}'(\mathrm{P}) = \mathrm{g_s}(\mathrm{n}_1\mathrm{x} + \mathrm{n}_2\mathrm{y} + \mathrm{n}_3\mathrm{z}).$$

L'équation (3) prend la forme

$$\mathrm{n}_1\mathrm{x} + \mathrm{n}_2\mathrm{y} + \mathrm{n}_3\mathrm{z} + \frac{\mathrm{B}'_\mathrm{z}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{\mathrm{g_s}} = \mathrm{c}. \tag{4}$$

On peut écrire l'équation (4) dans le système de coordonnées $\mathcal{R}_\mathrm{c} = (\mathrm{C}, \boldsymbol{n_r}, \boldsymbol{n_p}, \boldsymbol{n_s})$. Nous avons

$$\mathrm{x_s} + \frac{\mathrm{B}'_\mathrm{z}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s})}{\mathrm{g_s}} = 0, \tag{5}$$

où $(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s})$ sont les coordonnées de P dans $\mathcal{R}_\mathrm{c}$.

Exemple sur la sphère :

Le plan de coupe est en fait la surface d'équation (4).

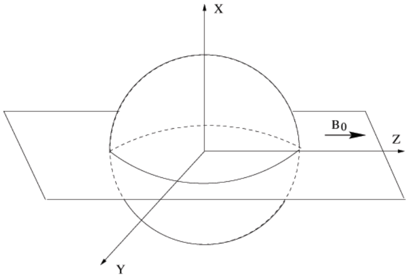
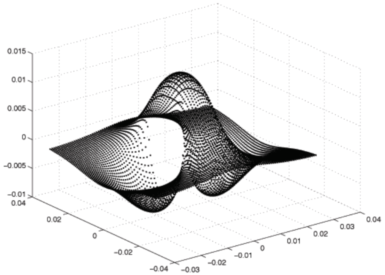


FIG.: Coupe à imager.

Nous considérons le cas particulier d'une sphère métallique (l'implant) plongée dans une substance diamagnétique (les tissus biologiques) et soumise à un champ statique B_0.

- rayon de la sphère = 1 cm
- susceptibilité magnétique =$\chi_{\mathrm{m}} = 10^{-3}$.
- intensité de la densité de flux = $\mathrm{B}_0 = 1$ Tesla
- l'intensité du gradient de coupe = $\mathrm{g} = 10^{-2}$ Tesla par mètre.
- inhomogénéités de champ magnétique sont dues au champ B' induit par la sphère.
- La coupe est représentée en 3cm x 3cm.



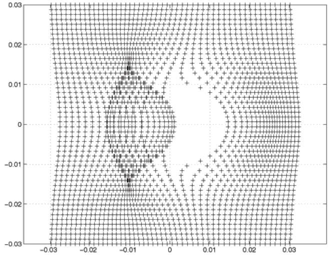


FIG.: (a) Distorsion de la coupe à imager (en mètre) et (b) distorsion géométrique.

Codage dans le plan de coupe

Par la relation de Larmor (1) nous avons

$$\nu = \frac{\gamma}{2\pi} B(P) = \frac{\gamma}{2\pi}(B_0 + g_r x_r + B_z'(x_r, x_p, x_s)).$$

De façon analogue la phase du signal RMN prend la forme

$$\phi(P) = 2\pi\nu_L(P)T_p = \gamma B(P)T_p = \gamma(B_0 + g_p x_p + B_z'(x_r, x_p, x_s))T_p.$$

Nota Bene :
L'effet du shift de la phase dépend de **la séquence IRM choisie**. Pour la séquence Spin-Echo, le shift de la phase dû aux inhomogénéités est compensé lors de la réception du signal. Au contraire pour la séquence Gradient-Echo, le shift est conservé.
C'est pourquoi nous introduisons le paramètre k_d valant 0 ou 1.
Nous devons prendre en compte que la perturbation existe non seulement pendant le codage en phase T_p mais encore pendant le temps de réception du signal T_E. La phase du signal est donc de la forme

$$\phi(P) = \gamma(B_0 + g_p x_p T_p + k_d B_z'(x_r, x_p, x_s) T_E).$$

Transformée de Fourier du signal perturbé

En présence d'un champ perturbateur B', le signal IRM admet la représentation

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathrm{t_r}, \mathrm{g_p}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p})) \\ &\times \exp\left(\mathrm{i}\,\gamma(\mathrm{g_r x_r} + \mathrm{B}'_\mathrm{z}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p})))\mathrm{t_r}\right) \\ &\times \exp\left(\mathrm{i}\,\gamma(\mathrm{g_p x_p T_p} + \mathrm{k_d B}'_\mathrm{z}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}))\mathrm{T_E})\right)\, \mathrm{dx_r dx_p}, \end{aligned}$$

où $\mathrm{x_s}$ est une solution de l'équation non linéaire

$$\mathrm{x_s} + \frac{\mathrm{B'}_\mathrm{z}(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_s})}{\mathrm{g_s}} = 0.$$

Nous prenons la transformée de Fourier de S pour obtenir l'intensité.

Ainsi l'intensité au pixel (τ_1, τ_2) de l'image est donnée par

$$\mathrm{I}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{(x_r, x_p, x_s) \\ \text{solution de (7)}}} \rho(x_r, x_p, x_s) \exp\left(i\,\gamma k_d B_z'(x_r, x_p, x_s) T_E\right) \times \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{g_r}\frac{\partial}{\partial x_r} B_z'(x_r, x_p, x_s)\right|}, \quad (6)$$

où

$$\begin{cases} x_r + \dfrac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_r} = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_s + \dfrac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_s} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Dans (6) nous avons inclus le cas où (7) a plusieurs solutions. Nous avons omis un coefficient d'échelle.

Largeur de coupe

Nous avons supposé que l'impulsion RF $\boldsymbol{B_1}$ est émise à la fréquence unique ν_1.
En pratique l'impulsion est émise avec une largeur de bande de la forme $\nu_1 \pm \frac{1}{2}\Delta\nu_1$. Le plan de coupe est transformé en une coupe d'épaisseur donnée. Par conséquent une couche d'épaisseur $\mathrm{e_s}$ autour de Π_s est imagée. On vérifie que

$$\mathrm{e_s} = \frac{2\pi}{\gamma}\frac{\Delta\nu_1}{\mathrm{g_s}}.$$

Pour prendre en compte l'épaisseur, nous rajoutons un terme de sommation sur l'épaisseur de la couche $\mathrm{e_s}$.

Le signal est alors de la forme

$$\begin{aligned} S(t_l, g_p) &= \int_{-\frac{1}{2}e_s}^{\frac{1}{2}e_s} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x_r, x_p, x_s(x_r, x_p, \zeta)) \\ &\quad \times \exp\left(i\,\gamma(g_r x_r + B_z'(x_r, x_p, x_s(x_r, x_p, \zeta)))t_r\right) \\ &\quad \times \exp\left(i\,\gamma(g_p x_p T_p + k_d B_z'(x_r, x_p, x_s(x_r, x_p, \zeta))T_E)\right)\, dx_r dx_p d\zeta \end{aligned}$$

où x_s satisfait

$$x_s + \frac{B'_z(x_r, x_p, x_s)}{g_s} = \zeta \qquad \text{with } \zeta \in [-\tfrac{1}{2}e_s, \tfrac{1}{2}e_s].$$

Notre développement pour la transformée de Fourier du signal est analogue dans ce cas. Les expressions (6) et (7) deviennent

$$\begin{aligned} I(\tau_1,\tau_2) &= \int_{-\frac{1}{2}e_s}^{\frac{1}{2}e_s} \sum_{\substack{(x_r,x_p,x_s) \\ \text{solution of (9)}}} \rho(x_r,x_p,x_s) \exp\left(i\,\gamma k_d B'_z(x_r,x_p,x_s) T_E\right) \\ &\times \frac{1}{\left|1+\frac{1}{g_r}\frac{\partial}{\partial x_r}B'_z(x_r,x_p,x_s)\right|} d\zeta, \end{aligned} \tag{8}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_r & + & \dfrac{B'_z(x_r,x_p,x_s)}{g_r} & = & \tau_1, \\ x_p & & & = & \tau_2, \\ x_s & + & \dfrac{B'_z(x_r,x_p,x_s)}{g_s} & = & \zeta. \end{array} \right. \tag{9}$$

Algorithmes

Nous voulons calculer l'intensité de l'image I dans (8) pour le pixel (τ_1, τ_2) donné. L'intégrale est calculée avec une formule de quadrature de Gauss. Nous avons

$$\mathrm{I}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}\mathrm{e_s}}^{\frac{1}{2}\mathrm{e_s}} \mathrm{A}(\tau_1, \tau_2, \zeta)\, \mathrm{d}\zeta \approx \frac{\mathrm{e_s}}{2} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mu_\mathrm{d}} \omega_\mathrm{k} \mathrm{A}(\tau_1, \tau_2, \mathrm{u_k}),$$

avec $\omega_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$ les poids et $\mathrm{u_k} \in [-1, 1]$ les nœuds.
La principale difficulté est de déterminer le(s) point(s) $(\mathrm{x_r}, \mathrm{x_p}, \mathrm{x_c})$ dans l'échantillon qui sont représentés dans le pixel (τ_1, τ_2). Il faut *résoudre* le système (9).

En combinant les première et troisième équations, le système peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} x_r + \dfrac{g_s}{g_r}(\zeta - x_s) = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_s + \dfrac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_s} = \zeta, \text{ où } \zeta \in [-\frac{1}{2}e_s, \frac{1}{2}e_s]. \end{cases} \tag{10}$$

Ainsi nous avons à résoudre le problème non linéaire : trouver $x_s \in \mathbb{R}$ solution de

$$x_s + \frac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_s} = \zeta,$$

où

$$\begin{cases} x_r = \tau_1 + \dfrac{g_s}{g_r}(x_s - \zeta), \\ x_p = \tau_2, \\ \zeta \in [-\frac{1}{2}e_s, \frac{1}{2}e_s]. \end{cases}$$

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x_s \longmapsto F(x_s) = (x_s - \zeta) + \frac{1}{g_s} B'_z(\tau_1 + \frac{g_s}{g_r}(x_s - \zeta), \tau_2, x_s),$$

où les paramètres $g_s, g_r, g_p, \tau_1, \tau_2$ et ζ sont fixés.
Alors résoudre le système (9) revient à trouver les zéros F.

Algorithme 1

For each pixel (τ_1, τ_2) **do**

For $k = 1, \ldots, \mu_d$ **do**

For each x_s solution of $F(x_s) = 0$ **do**

Set $x_r = \tau_1 + \frac{g_s}{g_r}(x_s - \zeta)$ and $x_p = \tau_2$

Compute $\rho(x_r, x_p, x_s)$, $B'_z(x_r, x_p, x_s)$ and $\frac{\partial}{\partial x_r} B'_z(x_r, x_p, x_s)$

Set

$$I(\tau_1, \tau_2) = I(\tau_1, \tau_2) + \rho(x_r, x_p, x_s) \frac{\exp\left(i\,\gamma k_d B'_z(x_r, x_p, x_s) T_E\right)}{\left|1 + \frac{1}{g_r}\frac{\partial}{\partial x_r} B'_z(x_r, x_p, x_s)\right|}$$

End do

End do

End do

- Nous avons mis en œuvre l'algorithme 1 dans le cas de la sphère où une expression analytique pour F est connue.
- Nous remarquons que la fonction F n'est pas nécessairement continue (ceci est dû au saut de B' à l'interface) et le nombre des zéros dépend des valeurs de τ_1, τ_2 et ζ.

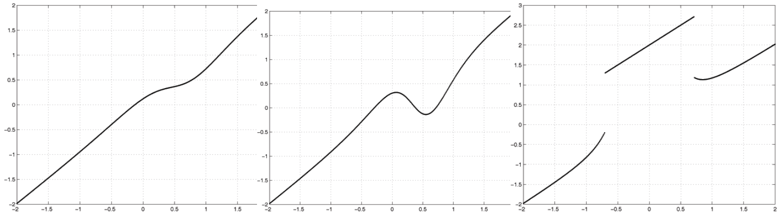


FIG.: Graphe de la fonction F dans le cas de la sphère. Les paramètres τ_1, τ_2 et ζ correspondent à un point éloigné (gauche), proche (centre) et intérieur (droite).

Commentaires

- Le nombre de zéros varie de 0 à 3.
- Le comportement de F va donc fortement changer en fonction des paramètres $g_s, g_r, g_p, \tau_1, \tau_2$ et ζ. En pratique nous n'avons pas d'expressions analytiques pour B' et donc F ne peut être calculé que ponctuellement.
- **Aucun code numérique** basé sur l'algorithme 1 n'est possible.
- L'idée est de parcourir l'échantillon et de tester pour savoir si les noyaux d'un point donné (x_r, x_p, x_s) résonent ou non.
- Nous calculons le pixel de l'image où ce point est envoyé et nous ajoutons l'intensité correspondante.
- Nous sommes conduits à l'algorithme suivant.

Algorithme 2

For $(x_r, x_p, x_s) \in \mathbb{R}^3$ **do** :

Compute (τ_1, τ_2, ζ) such that

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \tau_1 & = & x_r & + & \dfrac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_r} \\ \tau_2 & = & x_p & & \\ \zeta & = & x_s & + & \dfrac{B_z'(x_r, x_p, x_s)}{g_s} \end{array}\right.$$

If $\zeta \in [-\frac{1}{2}e_s, \frac{1}{2}e_s]$ and (τ_1, τ_2) belongs to the image **then**

$$I(\tau_1, \tau_2) = I(\tau_1, \tau_2) + \rho(x_r, x_p, x_s)\frac{\exp\left(i\gamma k_d B_z'(x_r, x_p, x_s) T_E\right)}{|1 + \frac{1}{g_r}\frac{\partial}{\partial x_r} B_z'(x_r, x_p, x_s)|}$$

End if

End do

Remarques :

- En pratique un volume entourant l'objet est choisi. Ce volume est subdivisé en petits cubes.
- À l'intérieur de chaque cube un point (x_r, x_p, x_s) est choisi.
- Le principal désavantage de cette approche est la nécessité de parcourir beaucoup de points qui ne sont pas sur l'image.
- Toutefois nous pouvons nous limiter à un voisinage autour de l'objet à imager.
- L'algorithme 2 a été mis en œuvre pour nos calculs.

Résultats numériques

Nous avons fait des calculs sur un implant dentaire.

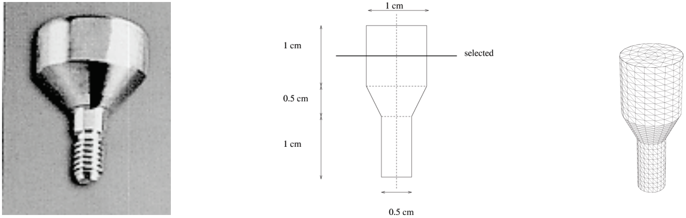


FIG.: Implant dentaire et maillage

Résultats numériques

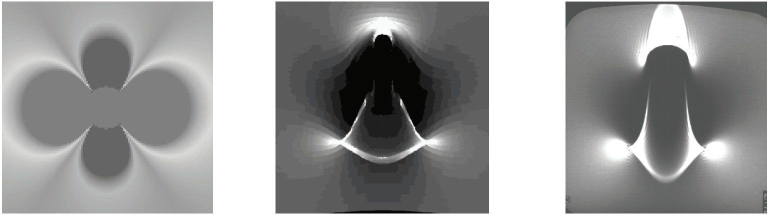


FIG.: Lignes de niveau de B'_z, images simulée et expérimentale obtenues par séquence Spin-Echo (SE $490/25$). Le côté de la figure correspond à une longueur de 5 cm

Données

- Implant : susceptibilité magnétique de 10^{-3} usi
- B_o : 0.5 Tesla.
- Le maillage a 1328 triangles.
- Coupe de 5 cm de large, parallèle au champ B_o.
- Les gradients valent 10^{-2} T/m.
- L'épaisseur de coupe est de 3 mm.

Pour obtenir l'image expérimentale correspondante, l'implant a été placé au centre d'une boîte contenant une substance diamagnétique, ($CuSO_4$ à la concentration de 0.6 g/l). La coupe a été enregistrée en utilisant une séquence de Spin-Echo avec un temps de répétition de 490 ms et un temps d'écho de 25 ms.

Calcul du champ perturbateur

Comment calculer le champ magnétique induit par l'implant métallique ? Ω est un ouvert borné de l'espace, de frontière Σ. L'implant Ω est plongé dans un champ magnétique $\boldsymbol{B_0}$.
Soit $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B_0}$ alors le problème à résoudre est : trouver $\boldsymbol{B}' \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathit{div}\, \boldsymbol{B}' & = & 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathit{rot}\, \boldsymbol{B}' & = & 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \Omega', \\ \left[\boldsymbol{B}' \wedge \boldsymbol{n}\right] & = & \mu_0 \left(\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{n}\right) \text{ à l'interface } \Sigma, \end{array} \right. \tag{11}$$

avec

- $\boldsymbol{n}$ normale unité extérieure à Σ,
- $[\cdot]$ le saut au travers de Σ.

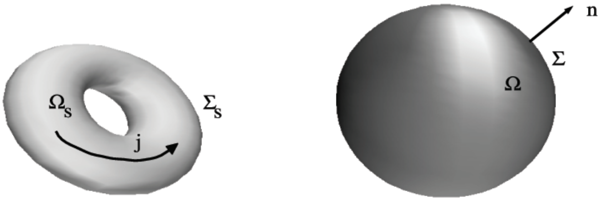


FIG.: Le problème de la magnétostatique

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathit{div}\ \mu\boldsymbol{H} & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathit{div}\ \boldsymbol{H} & = & 0 & \text{dans } \complement\Omega, \\ \mu\boldsymbol{H}\Big|_{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{H}\Big|_{\complement\Omega}\cdot\boldsymbol{n} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathit{rot}\ \boldsymbol{H} & = & \boldsymbol{j} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathit{rot}\ \boldsymbol{H} & = & \mathbf{o} & \text{dans } \complement\Omega_s, \\ \boldsymbol{H}\Big|_{\Omega_s}\wedge\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{H}\Big|_{\complement\Omega_s}\wedge\boldsymbol{n} & \text{sur } \Sigma_s, \end{array}\right. \tag{12}$$

Ici

- $\boldsymbol{n}$ est la normale unité extérieure à Σ ou Σ_s
- $\boldsymbol{H}\Big|_{\Omega}$ (resp. $\boldsymbol{H}\Big|_{\complement\Omega}$, $\boldsymbol{H}\Big|_{\Omega_s}$, $\boldsymbol{H}\Big|_{\complement\Omega_s}$) dénote la restriction de $\boldsymbol{H}$ au domaine Ω (resp. $\complement\Omega$, Ω_s, $\complement\Omega_s$).

N.B. Comme $\boldsymbol{H}$ n'est pas à rotationnel nul dans Ω_s, on ne peut pas introduire un potentiel scalaire comme inconnue dans tout l'espace.
Il est connu que pour résoudre le problème (12) avec un potentiel scalaire, on peut décomposer le problème : calcul du champ source et du champ induit $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_m$, voir Simkin - Trowbridge (1979).

$\boldsymbol{H_s}$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathit{div}\, \boldsymbol{H_s} & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathit{rot}\, \boldsymbol{H_s} & = & \boldsymbol{j} & \text{dans } \Omega_s, \\ \mathit{rot}\, \boldsymbol{H_s} & = & \mathbf{0} & \text{dans } \complement\Omega_s, \\ \boldsymbol{H_s}\Big|_{\Omega_s} \wedge \boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{H_s}\Big|_{\complement\Omega_s} \wedge \boldsymbol{n} & \text{sur } \Sigma_s, \end{array}\right. \tag{13}$$

$\boldsymbol{H_m}$ dû au matériau magnétique est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathit{rot}\, \boldsymbol{H_m} & = & \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathit{div}\, \boldsymbol{H_m} & = & 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \complement\Omega, \\ \mu \boldsymbol{H_m}\Big|_{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{H_m}\Big|_{\complement\Omega} \cdot \boldsymbol{n} & = & (1-\mu)\, \boldsymbol{H_s} \cdot \boldsymbol{n} & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{14}$$

$\boldsymbol{H_s}$ est calculé par la formule de Biot Savart

$$\boldsymbol{H_s}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_s} \left(j(y) \wedge \frac{x-y}{|x-y|^3} \right) dy \qquad \forall x \in \complement\Omega_s. \qquad (15)$$

On introduit le potentiel magnétique scalaire (RSP) ϕ comme inconnue pour résoudre le problème (14). En effet $\boldsymbol{H_m}$ est irrotationnel dans tout l'espace. On réduit le problème à une inconnue scalaire ϕ

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\phi = 0 \qquad \text{dans } \Omega \text{ et } \complement\Omega, \\ \phi \text{ continu sur } \Sigma, \\ \mu \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\Omega} - \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\complement\Omega} = (\mu - 1)\, g \quad \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \qquad (16)$$

avec $g = \boldsymbol{H_s} \cdot \boldsymbol{n}$ donné.

- Le problème (16) est un problème classique de Laplace sur tout l'espace avec condition d'interface.
- A priori, on peut le résoudre avec plusieurs méthodes.
- Pour obtenir $\boldsymbol{H}$, on somme $\boldsymbol{H}_m$ et $\boldsymbol{H}_s$.
- Difficulté : en général, on a des mauvais résultats !

TAB.: $\boldsymbol{H}$ dans Ω calculé par addition de $\boldsymbol{H}_s$ et $\boldsymbol{H}_m$ puis calculé analytiquement pour des valeurs de μ.

μ	$\|\boldsymbol{H}_s\|_2$	$\|\boldsymbol{H}_m\|_2$	$\|\boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_m\|_2$	$\|\boldsymbol{H}\|_2$ exact	error (%)
2	$0.795\ 10^6$	$0.1929\ 10^6$	$0.6021\ 10^6$	$0.5962\ 10^6$	0.97
10	$0.795\ 10^6$	$0.5937\ 10^6$	$0.2013\ 10^6$	$0.1835\ 10^6$	9.2
10^2	$0.795\ 10^6$	$0.7493\ 10^6$	$0.4568\ 10^5$	$0.2316\ 10^5$	65
10^3	$0.795\ 10^6$	$0.7695\ 10^6$	$0.2551\ 10^5$	$0.2378\ 10^4$	166
10^4	$0.795\ 10^6$	$0.7716\ 10^6$	$0.2343\ 10^5$	$0.2384\ 10^3$	190

Formule pour le potentiel

Soit G la fonction de Green donnée par

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} \qquad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y,$$

et $G_n(x,y) = \nabla_x G(x,y).\boldsymbol{n},\ x \in \Sigma,\ y \in \mathbb{R}^3$ sa dérivée normale sur Σ.
On a la représentation suivante pour ϕ en $y \in \Omega$,

$$\phi(y) = \frac{\mu-1}{\mu}\int_\Sigma g(x)\ G(x,y)\,d\sigma_x - \frac{\mu-1}{\mu}\int_\Sigma \phi(x)\ G_n(x,y)\,d\sigma_x. \tag{17}$$

Formule pour le champ

Alors pour $y \in \Omega$ le champ $\boldsymbol{H_m}(y) = -\nabla\phi(y)$ est donné par

$$-\frac{\mu-1}{\mu}\int_\Sigma g(x)\,\nabla_y G(x,y)\,d\sigma_x + \frac{\mu-1}{\mu}\int_\Sigma \phi(x)\nabla_y G_n(x,y)\,d\sigma_x. \tag{18}$$

De même pour $y \in \complement\Omega$ le champ $\boldsymbol{H_m}$ est donné par

$$-(\mu-1)\int_\Sigma g(x)\,\nabla_y G(x,y)\,d\sigma_x + (\mu-1)\int_\Sigma \phi(x)\,\nabla_y G_n(x,y)\,d\sigma_x. \tag{19}$$

On décompose le problème sur le domaine intérieur et extérieur : trouver $\phi^i \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\phi^e \in \mathbb{W}_0^1(\complement\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \Delta\phi^i = 0 & \text{in } \ \Omega, \\ \Delta\phi^e = 0 & \text{in } \ \complement\Omega, \\ \phi^e = \phi^i & \text{on } \Sigma, \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\phi^e}{\partial n} - \dfrac{\partial\phi^i}{\partial n} = (\dfrac{1}{\mu} - 1)g & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{20}$$

On recherche ϕ^i et ϕ^e de la forme

$$\phi^i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k}\phi_k^i \qquad \text{et} \qquad \phi^e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k}\phi_k^e. \tag{21}$$

Nouvelle formule pour le champ

Pour μ dans $[10^2, 10^4]$, on vérifie que $\boldsymbol{H}$ peut être approché par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(y) \quad \approx \quad & \frac{1}{\mu}\boldsymbol{H}_s(y) + \frac{1}{\mu} \int_\Sigma \phi_1^i(x)\, \nabla_y G_n(x,y)\, d\sigma_x \\ & + \frac{1}{\mu^2} \int_\Sigma \Big(\phi_2^i(x) - \phi_1^i(x)\Big)\, \nabla_y G_n(x,y)\, d\sigma_x. \qquad (22) \end{aligned}$$

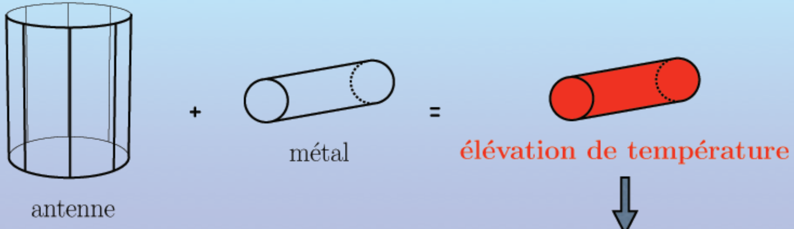
Cela donne un moyen pour approcher $\boldsymbol{H}$ dès que ϕ_1^i et ϕ_2^i sont connus.

TAB.: Quelques comparaisons fonction de μ

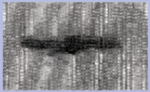
μ	$\|\boldsymbol{H}\|_2$ exact	$\|\boldsymbol{H}\|_2$ 1 terme	err (%)	$\|\boldsymbol{H}\|_2$ 2 termes	err (%)
10	$0.1835\ 10^6$	$0.2157\ 10^6$	16.2	$0.2107\ 10^6$	13.8
10^2	$0.2316\ 10^5$	$0.2349\ 10^5$	1.4	$0.2343\ 10^5$	1.2
10^3	$0.2378\ 10^4$	$0.2370\ 10^4$	0.32	$0.2370\ 10^4$	0.32
10^4	$0.2384\ 10^3$	$0.2372\ 10^3$	0.50	$0.2372\ 10^3$	0.50

La problématique

Le champ radiofréquence provoque l'apparition de **courants induits** dans le métal entraînant une **élévation de la température** de celui-ci.

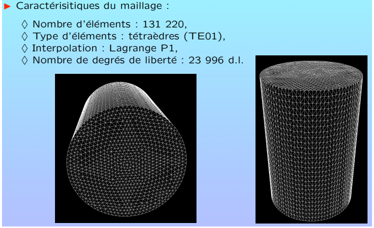


But : aide à la compréhension du phénomène de chauffage en IRM grâce à la simulation numérique et à la modélisation mathématique.



brûlure

Premiers résulats



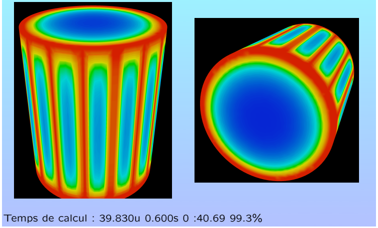


FIG.: Calcul du champ à l'intérieur d'une antenne **cage d'oiseau**