Outil Mathématiques 1

L1 SPM - 2014-2015

Max Bauer

Université de Rennes 1, UFR Mathématiques

Table des matières

1 Fonctions numériques d'une variable réelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre comme dans la suite du polycopié, nous utiliserons les symboles suivants :

1. Symboles ensemblistes
   - $\in$: appartenance ; si E est un ensemble, $x \in E$ se lit : « x appartient à E ».
   - $\subset$: inclusion ; si E et F sont deux ensembles, $F \subset E$ se lit : « F est inclus dans E » ; il ne faut pas confondre ce symbole et le précédent, le symbole d'inclusion sert uniquement à comparer des ensembles ; ainsi la propriété $x \in E$ s'écrit également $\{x\} \subset E$, où $\{x\}$ désigne le sous-ensemble de E ne contenant que l'élément x.
   - $\emptyset$: ensemble vide.
   - $\cap$: intersection.
   - $\cup$: réunion.
2. Connecteurs binaires
   - $\Longrightarrow$: implication ; si P et Q sont deux assertions, $P \Longrightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui se lit : « P implique Q ».
   - $\Longleftrightarrow$: équivalence ; si P et Q sont deux assertions, $P \Longleftrightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui se lit : « P équivalente à Q ». La distinction entre cette notion et celle citée ci-dessus étant une des bases du raisonnement mathématique, il faudra être extrêmement attentif à l'emploi de l'un ou l'autre symbole.
3. Quantificateurs
   - $\forall$: pour tout ; $\forall x \in E \ldots$ se lit : « Pour tout x appartenant à $E\ldots$ ».
   - $\exists$: il existe ; $\exists x \in E \ldots$ se lit : « Il existe x appartenant à $E\ldots$ ».

Nous nous bornerons ici à employer les symboles ci-dessus comme de simples notations. Il faut cependant se rappeler qu'il ne s'agit en aucun cas d'abréviations ; ces symboles ne doivent jamais apparaître dans une phrase en langage courant. Pour caractériser les éléments d'un ensemble, on utilisera aussi la notation (non canonique !) : | qui se lit "tel que" : par exemple, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ est $\mathbb{R}^+$.

L'étude générale d'une fonction numérique de la variable réelle a été abordée en Terminale.
Nous nous contenterons ici de brefs rappels et d'éléments nouveaux concernant les limites, les branches infinies et les fonctions réciproques.
Nous vous invitons cependant à revoir soigneusement dans votre cours de Terminale ce qui concerne les axes de symétrie du graphe d'une fonction, le calcul de limites, la continuité, la dérivabilité, le calcul de dérivées et l'étude des variations d'une fonction.

1.2 Notations

Définition 1.1. Une *fonction numérique* d'une variable réelle de *domaine de définition* $D_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un *ensemble d'arrivée* $I \subset \mathbb{R}$, est un procédé qui à tout nombre réel $x \in D_f$, associe un nombre $f(x) \in I$. On note

$$\begin{aligned} f : & D_f \to I, \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

En pratique, on se donne souvent une fonction par une formule, et l'ensemble de définition D_f est laissé à déterminer, comme étant le plus grand ensemble sur lequel la formule donnée a un sens.

Exemple 1.2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

De façon générale, il faut faire le liste des contraintes sur les éléments de formule, à partir de la connaissance des domaines de définition des fonctions usuelles.

Exemple 1.3. $f(x) = \ln(e^x - 1) + \sqrt{x^2 - 2}$.

Définition 1.4. 1. La *courbe représentative* de f (ou *graphe* de f), est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour tous les $x \in D_f$.

2. Si $x \in D_f$, $y = f(x)$, on dit que y est l'*image* de x par f, et x *un antécédent* de y.
3. *l'image de* f, notée $Im(f)$, est par définition

$$f(D_f) = \{f(x) \,:\, x \in D_f\},$$

Exemple 1.5. Dans la figure 1 :

1. y est l'image de x_1 mais aussi de x_2.
2. Les antécédents de y sont x_1 et x_2.

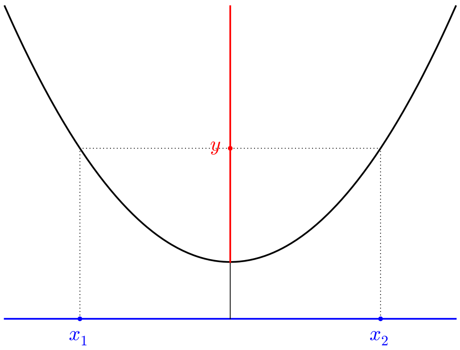


FIGURE 1 – Visualisation des antécédents d'un y.

Exemple 1.6. 1. Image de $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Image de $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Image de $x \mapsto \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Symétrie

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.7. 1. On dit que f est *paire* si

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) = f(-x).$$

2. On dit que f est *impaire* si

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) = -f(-x).$$

Proposition 1.8. *1. f est paire si son graphe est symétrique $/Oy$.*

2. f est impaire si son graphe est symétrique $/O$.

Exemple 1.9. 1. $f(x) = |x|$.

2. $g_n(x) = x^n$, $n = 1, -1, 2, 3, \ldots$.
3. $h(x) = \ln(x^2) + e^x + e^{-x}$.

Exemple 1.10. Montrer que la fonction

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

vérifie $f(-x) + f(x) = 0$. Conclure.

Définition 1.11. 1. Pour un $T > 0$ donné, on dit que f est *périodique de période* T si $\forall x \in D_f, x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

2. On dit que T_0 est *la* période de f, si T_0 est le petit nombre $T > 0$ pour lequel f est périodique de période T.

Exemple 1.12. La période de la fonction $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est π.

La fonction f est périodique si son graphe est préservé par une translation de vecteur horizontal $(T, 0)$.
La symétrie d'une fonction permet de limiter l'étude de la fonction à un intervalle d'étude qui est plus petit que le domaine de définition.

Exemple 1.13. Un domaine d'étude de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ peut être l'intervalle $[0, \pi]$.

1.4 Notion d'asymptote

Pour ce chapitre, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Notation 1.14. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *b*ranche infinie si l'une au moins des coordonnées de l'un de ses points peut devenir, en valeur absolue, arbitrairement grande.

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques notions de branche infini. Pour simplifier l'écriture, ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 1.15. 1. Deux courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont dites *a*symptotes en l'infini si :

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

2. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *d*roite oblique d'équation $y = ax + b$ en l'infini si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Remarque. Le (2) est un cas particulier de (1).

Exemple 1.16. Considérons les fonctions définies par :

$$\begin{array}{lcl} f : & x & \mapsto & x^2(1 + e^{-x}) \\ g : & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes en $+\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Définition 1.17. 1. On dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f admet une *asymptote verticale* en a si $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$, ou $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$.

2. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = b$ en ∞ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$.

Remarque. Une asymptote horizontale est un cas particulier d'une asymptôte oblique

Exemple 1.18. La courbe représentative de la fonction

$$x \mapsto \frac{2x - 1}{x - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1}$$

admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale, et la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale. (Voir figure 2.)

Proposition 1.19. *$y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$

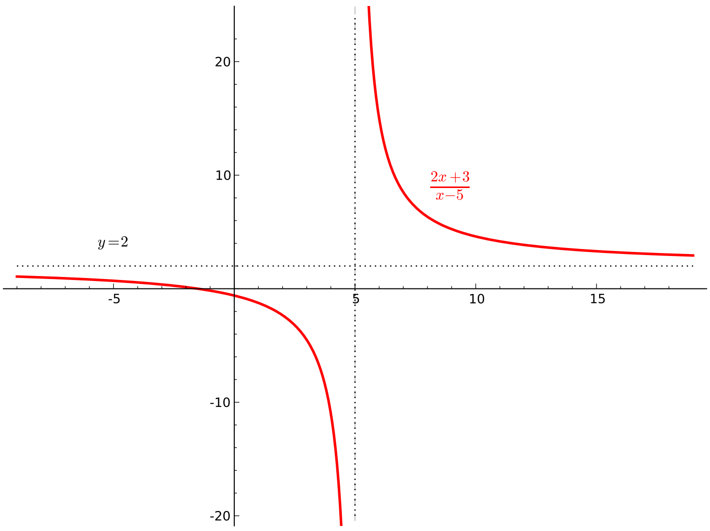


FIGURE 2 – La courbe représentative de $\frac{2x-1}{x-1}$.

Exercice 1.20. Soit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2+x}{x+1}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3.$$

On calcule alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = -2$, et la droite d'équation $y = 3x - 2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. (Voir figure 3.)

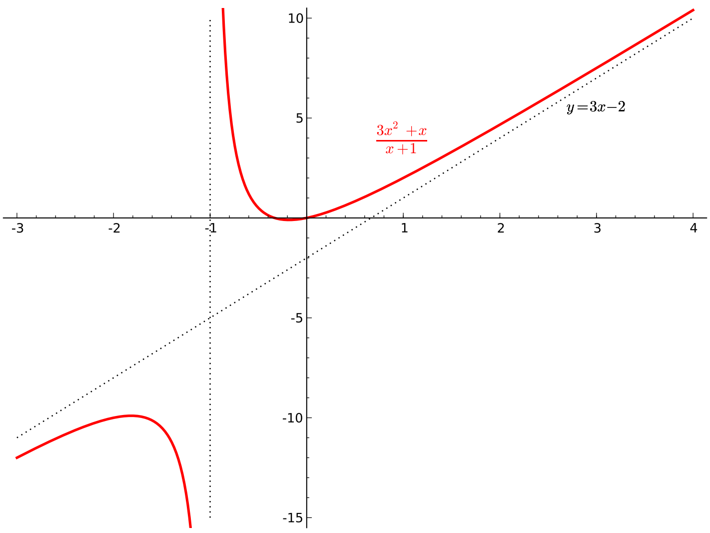


FIGURE 3 – La courbe représentative de $\frac{3x^2+x}{x+1}$.

Définition 1.21. Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \infty$$

on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *branche parabolique dans la direction asymptotique* a en l'infini.

Il y a d'autre notions de « direction asymptotiques » et de « branches paraboliques ». Voici quelques-uns : Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $M(x, f(x))$.

Si la droite (OM) a une position limite (Od) quand M s'éloigne à l'infini sur $\mathcal{C}_f$, la direction (Od) est dite *direction asymptotique de* $\mathcal{C}_f$. Considérons les trois cas suivants :

1. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ alors $\mathcal{C}_f$ admet la direction asymptotique (Oa). C'est le cas d'une asymptote oblique $y = ax + b$, donc si $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Si par contre $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \infty$, la distance entre le point M et la droite $y = ax$ tend vers ∞. On parle alors de $b$ranche parabolique de direction asymptotique (O, a).
2. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors $\mathcal{C}_f$ a la direction asymptotique (Oy) en l'infini. La distance entre le point M et la droite (Oy) tend vers ∞. On parle alors de $b$ranche parabolique de direction asymptotique (O, y).
3. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ a la direction asymptotique (Ox) en l'infini. C'est le cas si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale, donc si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ est fini. Si par contre $\lim_{x\to\infty} f(x) = infty$ on parle de $b$ranche parabolique de direction asymptotique (O, y).

Exemple 1.22. 1. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

2. La courbe représentative $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. La courbe représentative $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.

1.5 Continuité

Définition de la continuité

Définition 1.23. Une fonction f est dite *continue en* $a \in D_f$ si

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Elle est dite *continue* si elle est continue en tout point de D_f.

Les fonctions « classiques » sont continues sur leur domaine de définition :
polynomes, fractions rationnelles, sin, cos, tan, exp, ln, $\sqrt[k]{\cdot}$, e.t.c.

Exemple 1.24. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. Elle a un « saut » en 0. (See figure 4.)

Exemple 1.25. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Si on pose $f(0) = 0$ alors elle devient continue sur $\mathbb{R}$. On dit qu'on peut la *prolonger par continuité* en 0. (Voir figure 5.

Propriétés des fonctions continues

Une fonction continue satisfait le :

Théorème 1.26 (des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur (au moins) un intervalle $[a, b]$. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.*

(Voir la figure 6.)

Remarque. 1. z n'est pas unique en général.

2. On a unicité si f est strictement monotone.

Proposition 1.27. *Si f est continue sur $[a, b]$ alors f atteint son minimum et son maximum.*

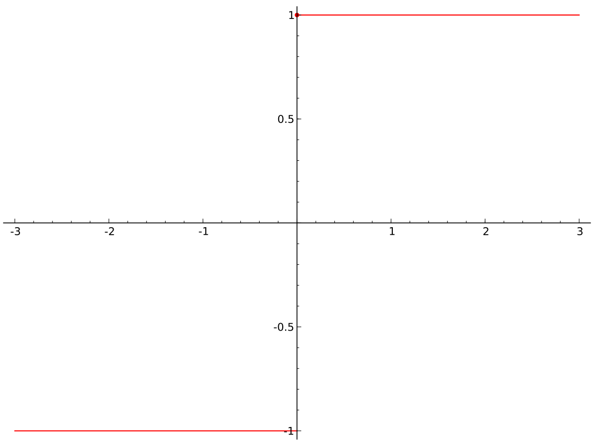


FIGURE 4 – Une fonction qui n'est pas continue en 0.

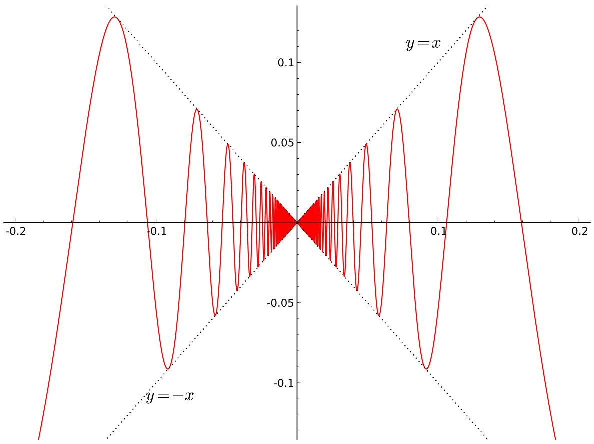


FIGURE 5 – Le graphe de la fonction $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$

1.6 Dérivation

Définition 1.28. On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est *ouvert* si I est de la forme $]b, c[$, $]-\infty, c[$, $]b, +\infty[$.

Définition de la notion de dérivabilité

Définition 1.29. Soit f une fonction définie sur (au moins) un intervalle ouvert I.

1. f est dite *dérivable* au point $a \in I$ si
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
admet une limite réelle quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée *nombre dérivé* de f au point a et notée $f'(a)$.
2. f est dite *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point de I. On note $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Notation 1.30. f' est aussi parfois noté $\dfrac{df}{dx}$ (notation différentielle de Leibniz).

Soient f dérivable en a et $A(a, f(a))$. Le taux d'accroissement de f en a, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, est la pente de la droite (AM) avec $M(x, f(x))$. (Voir figure 7.) Quand M tend vers A sur $\mathcal{C}_f$, la droite tend vers une

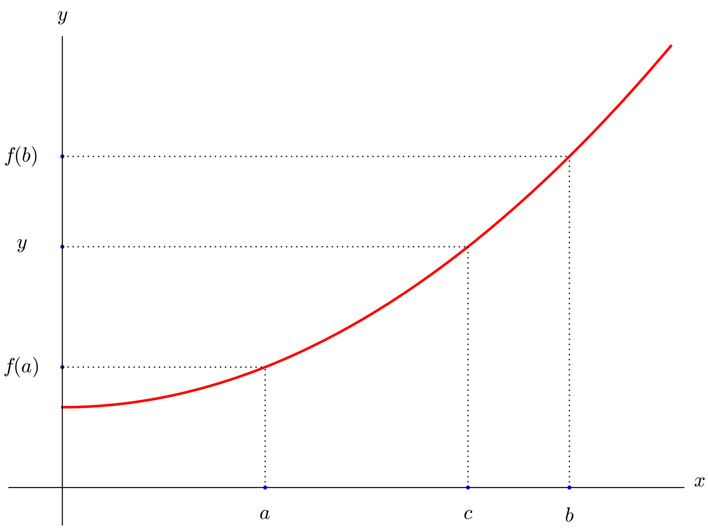


FIGURE 6 – Visualisation du théorème des valeurs intermédiaires

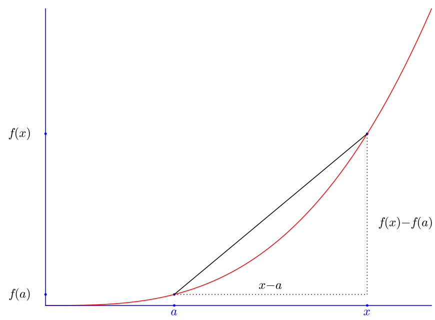


FIGURE 7 – Le taux d'acroissements

position limite : c'est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. La tangente a pour pente $f'(a)$ et passe par A, et a donc pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Définition 1.31.
1. Si f est définie sur $[a, a+\alpha[$ et si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$ alors f est dite *dérivable à droite* en a (demi-tangente).
2. Si les nombres dérivés à droite et à gauche sont distincts, f n'est pas dérivable en ce point et on a un *point anguleux.*

Exemple 1.32. $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. (Voir figure 8.)

Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, la (demi-)tangente est parallèle à l'axe (Oy).

Exemple 1.33. $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet une demi-tangente verticale en O. (Voir figure 9.)

Définition 1.34.
1. On dit que f est *dérivable sur* $[a, b]$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b.
2. Soit f dérivable sur I. Si f' est continue sur I, on dit que f est *continûment dérivable* sur I ou encore que f est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Soit f dérivable sur I. Si f' est dérivable sur I, on définit la *dérivée seconde de* f, notée f'', comme étant la dérivée de f' sur I.
4. On dit qu'une fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable.

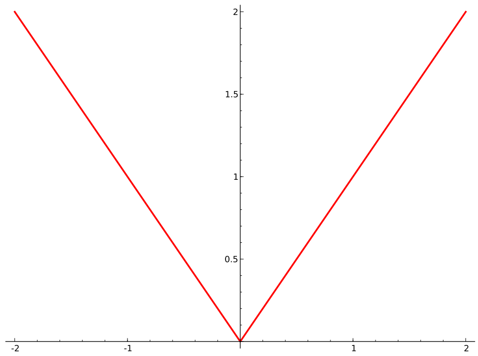


FIGURE 8 – La courbe représentative de $|x|$

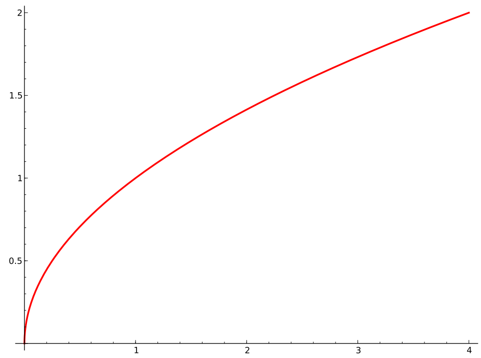


FIGURE 9 – La courbe représentative de $\sqrt{x}$

Opérations sur les dérivées

Théorème 1.35. *Si u, v sont dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$, uv, et ku ($k \in \mathbb{R}$) le sont aussi. Si en plus v ne s'annule pas, alors $1/v$ et u/v sont également dérivables. On a*

1. $(u+v)' = u' + v'$,
2. $(uv)' = uv' + u'v$,
3. $(ku)' = ku'$,
4. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$,
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exercice 1.36. Dérivée de $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Théorème 1.37. *Si u, v sont dérivables et telles que $Im(v) \subset D_u$, alors $u \circ v$ est dérivable et*

$$(u \circ v)'(x) = v'(x)u'(v(x)).$$

Exercice 1.38. Dérivée de

1. $f(x) = \ln(x^2+1)$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k $(k \in \mathbb{R})$	0
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Exercice 1.39. $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Continuité et dérivabilité

Théorème 1.40. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Preuve. Posons $\tau(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Alors $f(x)-f(a) = (x-a)\tau(x)$ et donc :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0.$$

□

Remarque. Attention, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant

Exemple 1.41. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais, comme on l'a vu, *n'est pas* dérivable en 0.

1.7 Extremum local

Définition 1.42. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I. On dit que :

1. f admet un *minimum relatif* en x_0 s'il existe J un intervalle ouvert contenant x_0 tel que
$$\forall x \in J \cap I, \qquad f(x_0) \leq f(x).$$
2. f admet un *maximum relatif* en x_0 s'il existe J un intervalle ouvert contenant x_0 tel que
$$\forall x \in J \cap I, \qquad f(x_0) \geq f(x).$$
3. f admet en x_0 un *extremum relatif* si f admet en x_0 soit un maximum, soit un minimum relatif.

Exemple 1.43. La fonction $f : [-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2-4|$ admet un maximum relatif en -3 et 0 et un minimum relatif en 2 et -2. (Voir figure 10.)

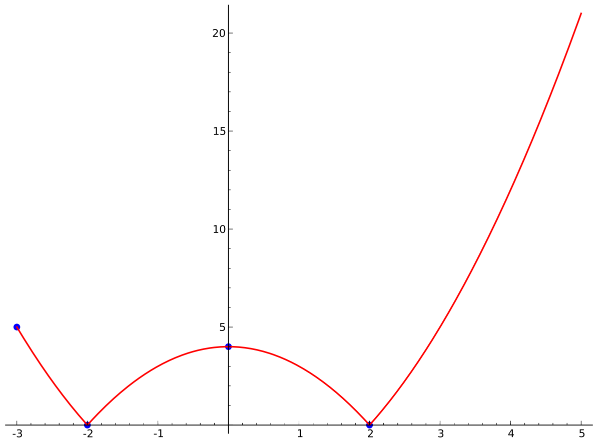


FIGURE 10 – La courbe représentative de $|x^2 - 4|$, $x \in [-3, +\infty[$.

Théorème 1.44. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, $I =]-\infty, b[$ ou $I =]a, +\infty[$. Si $x_0 \in I$ est un extrêmum local de f alors on a $f'(x_0) = 0$.*

Exemple 1.45 (Attention !)**.**

1. La fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais 0 *n'est pas* un extrêmum local. Les solutions $f'(x_0) = 0$ sont les seuls *candidats* pour être extrêmum.
2. La fonction $|x^2 - 4|$ admet un extremum en -2 et 2, mais f *n'est même pas* dérivable en 0.

Définition 1.46. Si $f'(x_0) = 0$ alors on dit que x_0 est un *point critique* de f. On parle aussi de *point stationnaire.*

En utilisant les développements limités (qu'on va voir plus tard) on peut montrer :

Théorème 1.47. *Soit f une fonction deux fois dérivable.*

1. *Si on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$ alors x_0 est un minimum local.*
2. *Si on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \leq 0$ alors x_0 est un maximum local.*

1.8 Quelques propriétés des fonctions dérivables

Théorème des accroissements finis

Théorème 1.48 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si on a $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. f atteint son minimum m et son maximum M. Si on a $m = M$, alors f est constante et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b]$.
Si $m \neq M$ alors f atteint au moins un de ces extrema en un point c de $]a, b[$. Mais on a alors $f'(c) = 0$. □

Théorème 1.49 (Accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve. Utiliser le théorème de Rolle pour la fonction $h(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a))$. □

Fonctions monotones

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un *intervalle* $I =]a, b[$.

Théorème 1.50. *1. Si on a $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante.*

2. Si on a $f'(x) < 0$ sur I alors f est strictement décroissante.

3. Si on a $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante.

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(x_2) - f(x-1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. □

Exercice 1.51. 1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ mais f *n'est pas* décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2. $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais *ne vérifie pas* $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Limites de la dérivée

Théorème 1.52. *Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$. Si f' est continue sur $]a, b]$ et si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$.*

Remarque. La fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0, mais f' n'admet pas de limite en 0.
Il est donc souvent plus simple d'étudier directement le taux d'accroissement de f que d'appliquer ce théorème.

Règle de l'Hospital

Théorème 1.53. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ et telles que $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty$. On suppose de plus que f et g sont dérivables sur I et que ni g ni g' ne s'annulent sur I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un réel ou $\pm\infty$. On a*

$$\textit{si} \quad \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \qquad \textit{alors} \qquad \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Le théorème est encore valable si $b = +\infty$.

Exemple 1.54. Calculer

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x}}{\cos x - \sin x}.$$

On a ici

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-e^{\cos x}\sin x - e^{\sin x}\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque. Il est parfois nécessaire d'appliquer cette règle plusieurs fois consécutives. C'est le cas dans l'exercice suivant :

Exercice 1.55. Vérifier que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\sin^3 x} = \frac{-1}{6}.$$

Remarque. Le théorème précédent a cependant ses limites : il peut arriver en effet que $\frac{f'}{g'}$ n'admette pas de limite, et ce, bien que $\frac{f}{g}$ en ait une. C'est le cas dans l'exercice suivant :

Exercice 1.56. Le vérifier en 0 pour : $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et $g(x) = \sin x$.

1.9 Convexité, concavité

Definition de la convexité, concavité

Définition 1.57.
1. Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est *convexe* si pour tout couple de points P, Q de U le segment $[PQ]$ est aussi dans U.
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *convexe* si la partie de $\mathbb{R}^2$ situé au dessus de $\mathcal{C}_f$ est convexe (comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$). $\mathcal{C}_f$ est dite *concave* si la partie de $\mathbb{R}^2$ située en dessous de $\mathcal{C}_f$ est convexe.

Exercice 1.58. Montrer que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe

Proposition 1.59. *f est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de $\mathcal{C}_f$ le segment $[A, B]$ est situé au-dessus de $\mathcal{C}_f$.*

Remarque. On peut reécrire la proposition sous la forme suivante : f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Preuve. Soient $M(y, f(y)), N(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. Un point P est sur la corde MN si et seulement si $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$ avec $0 \leq t \leq 1$. L'abscisse de P est donc :
$x_P = t(x-y) + y = tx + (1-t)y$ et son ordonnée $y_P = tf(x) + (1-t)f(y)$. D'où le résultat. $\square$

Exemple 1.60. $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Graphiquement, il semble que la courbe représentative de f se situe sous sa corde et on vérifie, à l'aide de la définition, que f est bien convexe :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}(tx + (1-t)y)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 &= t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + 2t(1-t)xy - tx^2 - (1-t)y^2 \\ &= t(t-1)(x^2 + y^2 - 2xy)\end{aligned}$$

On a donc bien ici : $f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) = t(t-1)(x-y)^2 \leq 0$ (car $t \in [0,1]$).

Remarque.
1. $x \longmapsto ax + b$ est à la fois convexe et concave.
2. On a pu remarquer dans l'exemple traité ci-dessus que la définition fournit un critère difficile à employer ; on utilise donc plutôt dans la pratique les résultats du paragraphe suivant, donnant, sous certaines hypothèses, des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit convexe.

Convexité et différentiabilité

Proposition 1.61. *Soit f une fonction différentiable sur I. Alors f est convexe (concave) si et seulement si f' est une fonction croissante (décroissante) sur I*

Corollaire 1.62. *Soit f deux fois dérivable sur I. Alors*
1. *f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*
2. *f est concave si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.*

Définition 1.63. On dit que x_0 est un *point d'inflexion* si $f''(x_0) = 0$ avec changement de signe de f'' en x_0.

Remarque. Il y a donc changement de concavité en un point d'inflexion.

Proposition 1.64.
1. *Si f est dérivable et convexe (concave) sur I alors la courbe représentative de f est sur I au-dessus (en-dessous) de chacune de ses tangentes.*
2. *En un point d'inflexion, la tangente traverse la courbe représentative.*

Exemple 1.65 (Attention !)**.**
1. $x \mapsto x^2$. On a $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un point d'inflexion.
2. $x \mapsto x^3$.

1.10 Plan d'étude d'une fonction

1. Rechercher le domaine de définition et de continuité.
2. Réduire l'intervalle d'étude par utilisation des propriétés d'invariance et de symétrie de la courbe (période, parité,...).
3. Etudier la dérivabilité, le signe de la dérivée; calculer les limites nécessaires et rassembler ces résultats dans un tableau de variations.
   Remarque : Dans certain cas où le signe de f' est difficile à étudier, on peut étudier les variations de celle-ci, ou s'aider d'une fonction auxiliaire.
4. Etudier des branches infinies éventuelles : directions asymptotiques, asymptotes éventuelles et position de la courbe par rapport à celles-ci.
5. Etudier les points remarquables de la courbe, notamment les extrémas; dans tous les cas, on fera apparaître sur le graphe les points à tangente horizontale.
6. Etudier la concavité, convexité en étudiant le signe de f''. Etudier l'existence de points d'inflexion (là où f'' s'annulle) et les faire apparaître sur le graphe avec leur tangente qui traverse la courbe.
7. Représentation graphique.

Exemple 1.66. $f(x) = x\exp(-x)$.

1. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On ne peut pas réduire le domaine pour l'étude.
3. f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et on a : $f'(x) = \exp(-x)(1-x)$.
4. Le signe de f' est immédiat : la fonction exponentielle étant toujours positive, f' est du signe de $1-x$. f est donc croissante sur $]-\infty, 1]$, et décroissante sur $[1, +\infty[$; elle admet un maximum en 1, égal à e^{-1}.
5. On a de plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Le graphe de f a donc une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $-\infty$. En $+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; donc le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. La courbe est au-dessus de son asymptote.
6. f' est dérivable et on a $f''(x) = \exp(-x)(x-2)$. f est donc convexe sur $[2, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 2]$. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x = 2$. De plus $f(2) = 2e^{-2} \sim 0.271$, et $f'(2) = -e^{-2} \sim 0.135$, donc la tangente au point d'inflexion a pour équation $y - 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2)$ qui peut s'écrire sous la forme $y = -e^{-2}x + 4e^{-2}$.
7. Pour la courbe représentative voir la figure 11

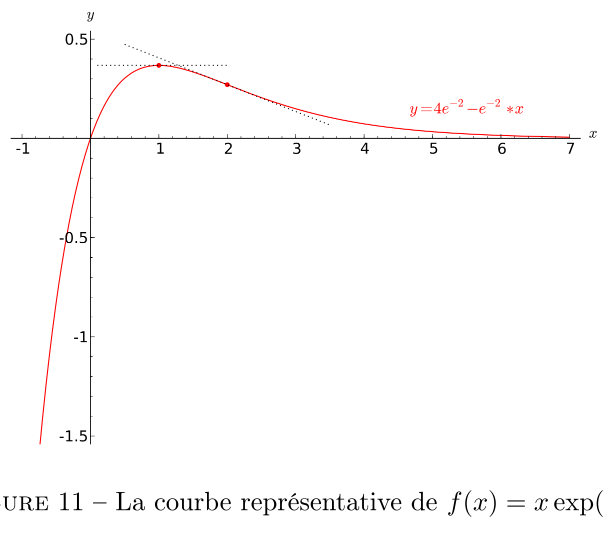


FIGURE 11 – La courbe représentative de $f(x) = x\exp(-x)$

1.11 Fonctions réciproques

Définition et existence d'une fonction réciproque

Définition 1.67.
1. Une fonction $f : I \to J$ est *bijective* si tout y de J admet un unique antécédent x de I. Autrement dit, pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x de I.
2. Dans ce cas, la *fonction réciproque*, noté f^{-1}, est le procédé $f^{-1} : J \to I$, qui à $y \in J$ associe son unique antécédent x in I.

On a donc

$$x \in I \text{ et } y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in J \text{ et } x = f^{-1}(x).$$

Proposition 1.68.

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in I$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in J$$

Théorème 1.69. *Si f est une application continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I dans $f(I)$ (et donc la fonction réciproque existe).*

Exemple 1.70. Les fonctions $e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ et $\ln(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions réciproques. Voir les figures 12 et 13

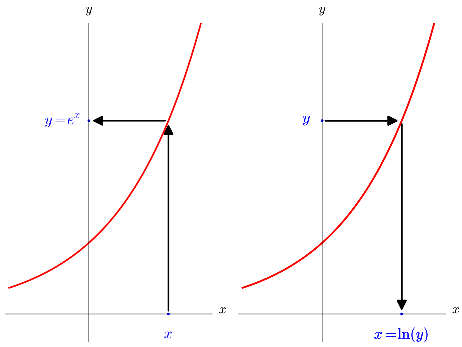


FIGURE 12 – La fonction exponentielle et sa fonction réciproque

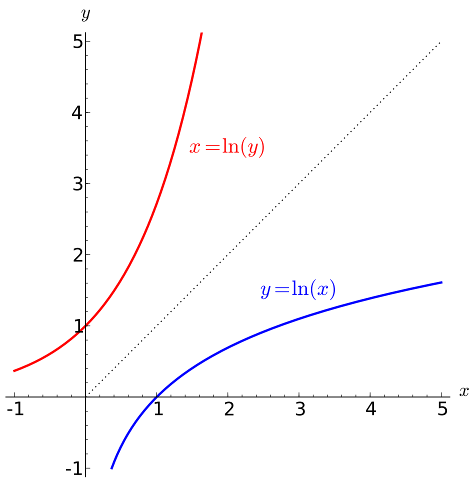


FIGURE 13 – Le logarithme comme fonction réciproque de la fonction exponentielle

Premières propriétés

Proposition 1.71. *1. La courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé est la symétrique de celle de f, par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).*

2. Si f est impaire, f^{-1} est impaire.

Preuve. 1. Au point $M(x, y = f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ correspond de manière unique le point : $M'(y, x = f^{-1}(y))$ de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

2. Cela résulte du point précédent puisqu'une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

□

Exemple 1.72. 1. La fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ n'admet pas de fonction réciproque.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$. Alors f est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. f admet donc une réciproque, définie sur $[0, +\infty[$: c'est $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$. Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par symétrie par rapport à la première bissectrice. Voir la figure 14.

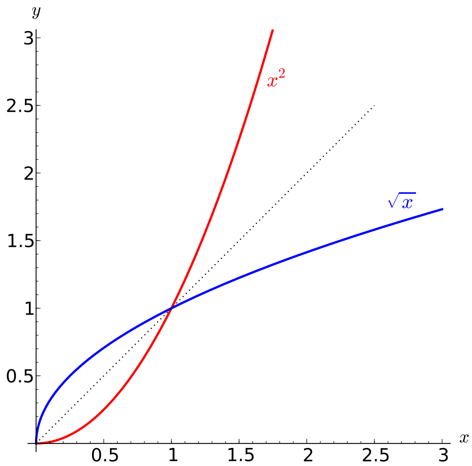


FIGURE 14 – Les courbes représentatives de x^2 et $\sqrt{x}$.

Exemple 1.73. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir sur $[0, +\infty[$ la réciproque de $x \mapsto x^n$. La fonction réciproque est notée $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. Si f est involutive sur I, c'est à dire si $fof = Id_I$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la première bissectrice (exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

Continuité et variations

Proposition 1.74. *Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, f et f^{-1} ont même sens de variation.*

Dérivabilité

Théorème 1.75. *Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I et si f est dérivable au point x_0 de I avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Preuve. Soit $\Delta = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ alors $\Delta = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ où $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Or f^{-1} est continue en y_0 (car f dérivable en x_0 y est continue) et donc x tend vers x_0 quand y tend vers y_0 . D'où : $\lim\limits_{y \to y_0} \Delta = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque. On retiendra la formule : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' o f^{-1}}$, ou, en utilisant la notation de Leibniz : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

Interprétation graphique

La tangente au graphe de f^{-1} en $M'(y_o, x_o)$ est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la tangente au graphe de f en $M(x_o, y_o)$. Les pentes de ces deux droites sont donc inverses l'une de l'autre (ce qui correspond exactement au résultat établi dans le théorème ci-dessus) ; on peut même retenir que la symétrie transforme une tangente horizontale en tangente verticale, afin de visualiser le problème de dérivabilité de f^{-1} aux points où f' s'annule.

Exemple 1.76. Reprenons l'exemple $f : x \mapsto x^2$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$, mais sa dérivée s'annule en $x = 0$. Donc $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée est donnée par :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en 0.

2 Quelques fonctions classiques

2.1 Logarithme népérien

Définition et premières propriétés

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

Définition 2.1. On appelle fonction *logarithme népérien* la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est notée ln.

Proposition 2.2.
1. *La fonction* ln *est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *de dérivée la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
2. $\ln(1) = 0$.
3. ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
4. ln *est une bijection de* $]0,+\infty[$ *dans* $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.
5. ln *est concave.*

Preuve. (1) et (2) : Par définition.
(3) : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
(4) : ln est dérivable, donc continue, et strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
(5) $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in]0,\infty[$. □

Corollaire 2.3.
1. *1 a un unique antécédent (noté e) par* ln.
2. $\forall a,b > 0, \ln a = \ln b \iff a = b$ *et* $\ln a < \ln b \iff a < b$

Exemple 2.4. Résoudre $\ln(4-x) > 0$. Cette équation n'a de sens que si $x < 4$. De plus $0 = \ln 1$ et ln étant strictement croissante on a : $\ln(4-x) > \ln 1 \iff 4 - x > 1$ d'où l'ensemble des solutions $\mathcal{S} =]-\infty, 3[$.

Relations importantes

Proposition 2.5.
1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\forall x,y \in]0,\infty[$.
2. $\ln(\dfrac{1}{x}) = -\ln(x)$, $\forall x \in]0,\infty[$.
3. $\ln(\dfrac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$, $\forall x,y \in]0,\infty[$.
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$, $\forall x > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$.

Preuve. (1) : On pose $f : x \mapsto \ln(ax)$ et on vérifie que f est aussi une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$. Par suite f ne diffère de ln que d'une constante que l'on détermine en prenant $x = 1$.
(2) On applique (1) pour $x = \frac{1}{y}$.
(3) On écrit que $\dfrac{x}{y} = x(\dfrac{1}{y})$ et on applique (2).
(4) Démonstration pour $\alpha = p$, $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Démonstration pour $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$: $\ln x = \ln(x^{\frac{1}{q}})^q = q\ln(a^{\frac{1}{q}})$, donc $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln a$.
Démonstration pour $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$: $\ln(a^{\frac{p}{q}}) = \ln(a^{\frac{1}{q}})^p = \dfrac{p}{q}\ln a$.
Pour finir on passe aux rationnels négatifs à l'aide de (2). □

Limites importantes

Proposition 2.6.

1. $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$
2. $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
6. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Preuve. (1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 3^n$. Alors $\ln(x) \geq \ln(3^n) = n\ln(3)$ et donc $\ln(x) \geq n$ (car $\ln(3) > 1$) d'où $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
(2) En remplaceant x par $1/x$ on déduit : $\lim_{x\to 0^+} \ln(\frac{1}{x}) = +\infty$. Il suffit d'utiliser $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ pour conclure.
(3) on a $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ et donc $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$.
(4) Remplacer x par $x+1$.
(5) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - \sqrt{x}$. On montre que f est croissante sur $]0,4]$ et décroissante sur $[4,+\infty[$. D'où $\forall x > 0$, $f(x) \leq f(4) \leq 0$, c'est à dire $\ln(x) \leq \sqrt{x}$. On déduit que $\forall x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On a donc : $\forall x > 1$, $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Le résultat découle alors du théorème des gendarmes.
(6) Il suffit de remplacer x par $1/x$. $\square$

Représentation graphique de la fonction $\ln$

L'étude précédente permet de tracer la courbe représentative de la fonction ln ; on remarque en particulier que celle-ci admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox). (Voir la figure 15.)

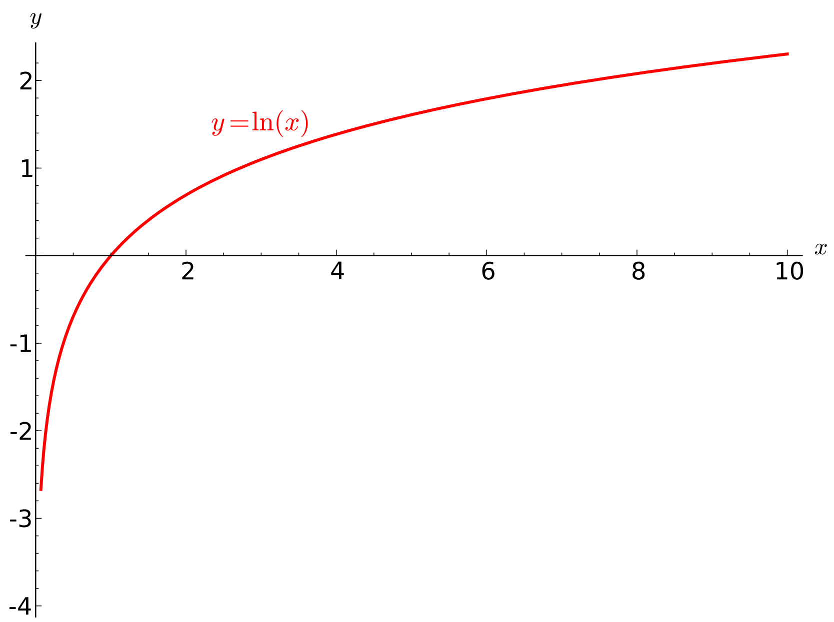


FIGURE 15 – La courbe représentative de ln

Logarithme de base a

Soit $a > 0$ et différent de 1. On pose

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Les propriétés de $\log_a$ se déduisent de celles de ln. On a notamment $\log_a a = 1$. ln est lui même parfois appelé logarithme de base e.

Représentation graphique de la fonction $\log_a$

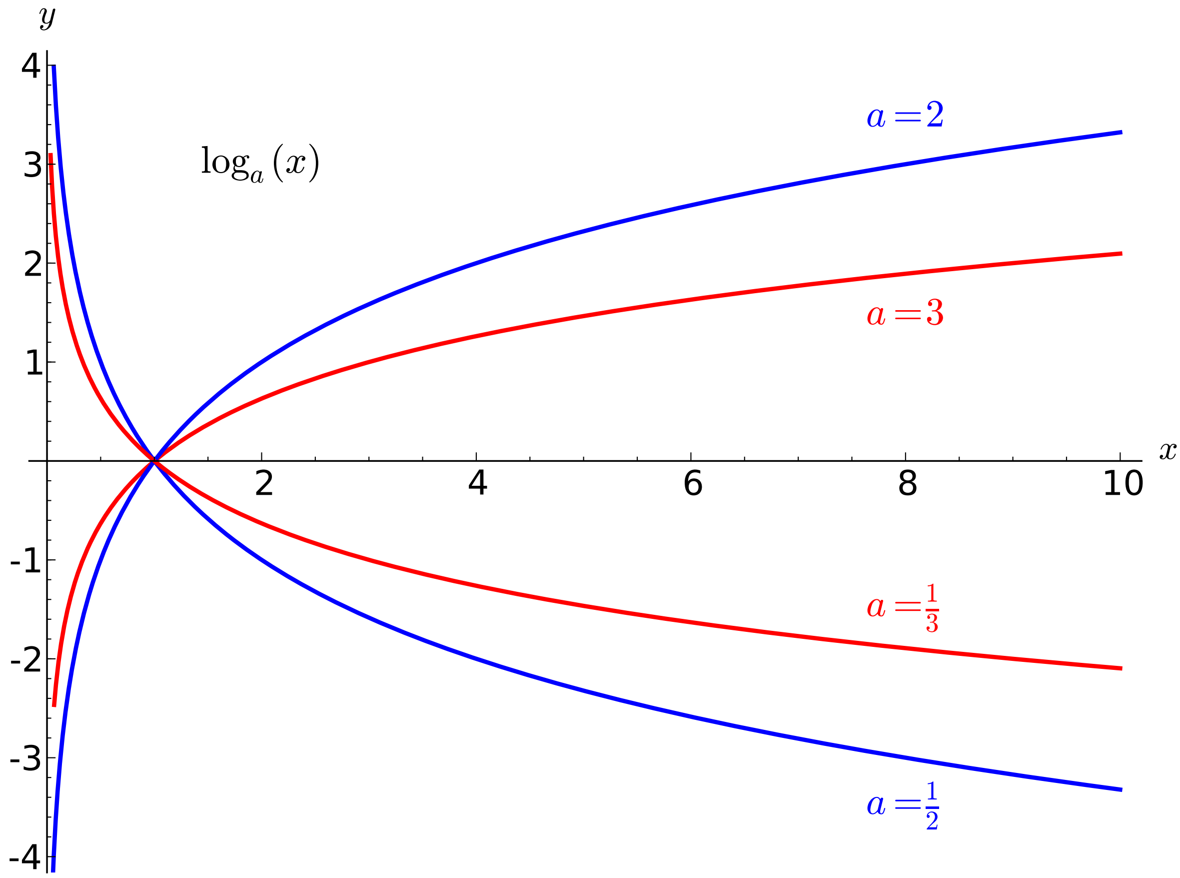


Figure 16 – La courbe représentative de $\log_a$

2.2 La fonction exponentielle

Définition et premières propriétés

La fonction ln est définie, continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque.

Définition 2.7. La fonction réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est appelée *fonction exponentielle de base e* et notée $\exp_e$:

$$\exp_e : \mathbb{R} \mapsto]0,+\infty[.$$

On écrit aussi e^x au lieu de $\exp_e(x)$.

Remarque. La raison pour la notation e^x est la suivante : Comme ln et $\exp_e$ sont des fonctions réciproques on a $\ln(\exp_e r) = r$, pour tout $r \in \mathbb{R}$, donc en particulier pour $r \in \mathbb{Q}$.
En utilisant la proposition 2.5 (4) pour $x = e$ on voit que $\ln(e^r) = r$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$. On a donc $\exp_e r = e^r$. Cette propriété vraie sur $\mathbb{Q}$ est adoptée comme notation sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.8.
1. *La fonction $x \to e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,\infty[$.*
2. $e^0 = 1$.
3. $y = e^x$ *ssi* $x = \ln(y)$ *et* $y \in]0,+\infty[$.
4. *La fonction $x \to e^x$ est continue et différentiable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
5. $(e^x)' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *donc la fonction $x \to e^x$ est une fonction strictement croissante.*

Relations importantes

Proposition 2.9. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a*
1. $e^{x+y} = e^x e^y$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
4. $(e^x)^y = e^{xy}$

Limites importantes

On déduit des propriétés des fonctions réciproques :

Proposition 2.10.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Représentation graphique

La fonction exponentielle étant la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, sa courbe représentative dans un repère orthonormé est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de celle de la fonction ln. (Voir la figure 17.)

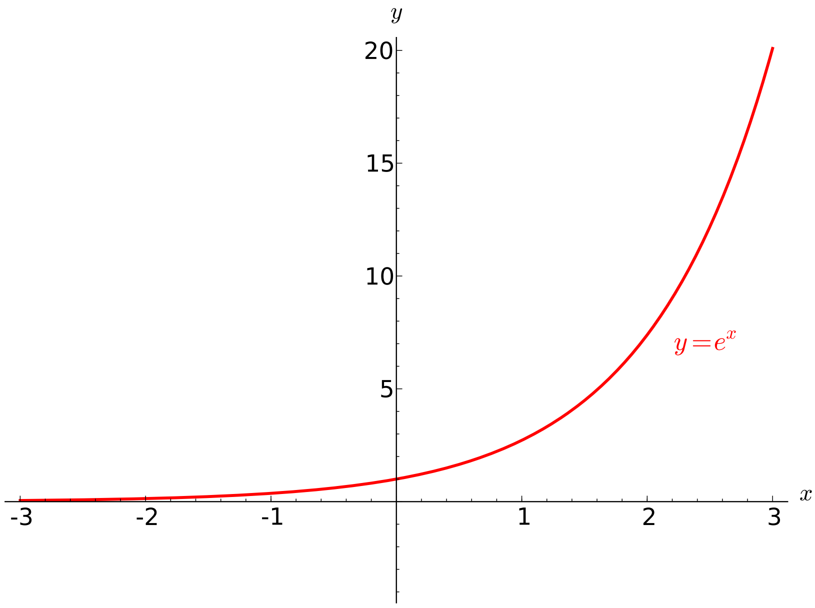


FIGURE 17 – La courbe représentative de $x \mapsto e^x$

2.3 Exponentielle de base a

Définition et premières propriétés

Soit $a > 0, a \neq 1$. La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$ qu'elle applique bijectivement sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.11. Soit $a > 0, a \neq 1$. La fonction réciproque de $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est appelée fonction *exponentielle de base* a et notée $\exp_a$:

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[.$$

On la note aussi $x \mapsto a^x$.

Remarque. La raison pour la notation e^x est la suivante : Comme $\log_a$ et $\exp_a$ sont des fonctions réciproques on a $\log_a(\exp_a r) = r$, pour tout $r \in \mathbb{R}$, donc en particulier pour $r \in \mathbb{Q}$.
En utilisant les propriétés du $\log_a$ on voit que $\log_a(a^r) = r \log_a(a) = r$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$. On a donc $\exp_a r = a^r$. Cette propriété vraie sur $\mathbb{Q}$ est adoptée comme notation sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\exp_a x = a^x$ n'est pas définie pour $a = 1$. Il est naturel de poser $\exp_1 x = 1^x = 1$.

Proposition 2.12. *Soit $a > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$y = \exp_a x = a^x \iff e^{x \ln a}.$$

Preuve. Soit $a > 0$, $a \neq 1$. $y = \exp_a x$ si et seulement si $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, soit $x \ln a = \ln y$ et donc $y = e^{x \ln a}$. Il est immédiat que la relation est valable pour $a = 1$. □

Propriétés

Elles se déduisent de celles de l'exponentielle de base e. En particulier :

Proposition 2.13. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$, on a*

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Représentation graphique

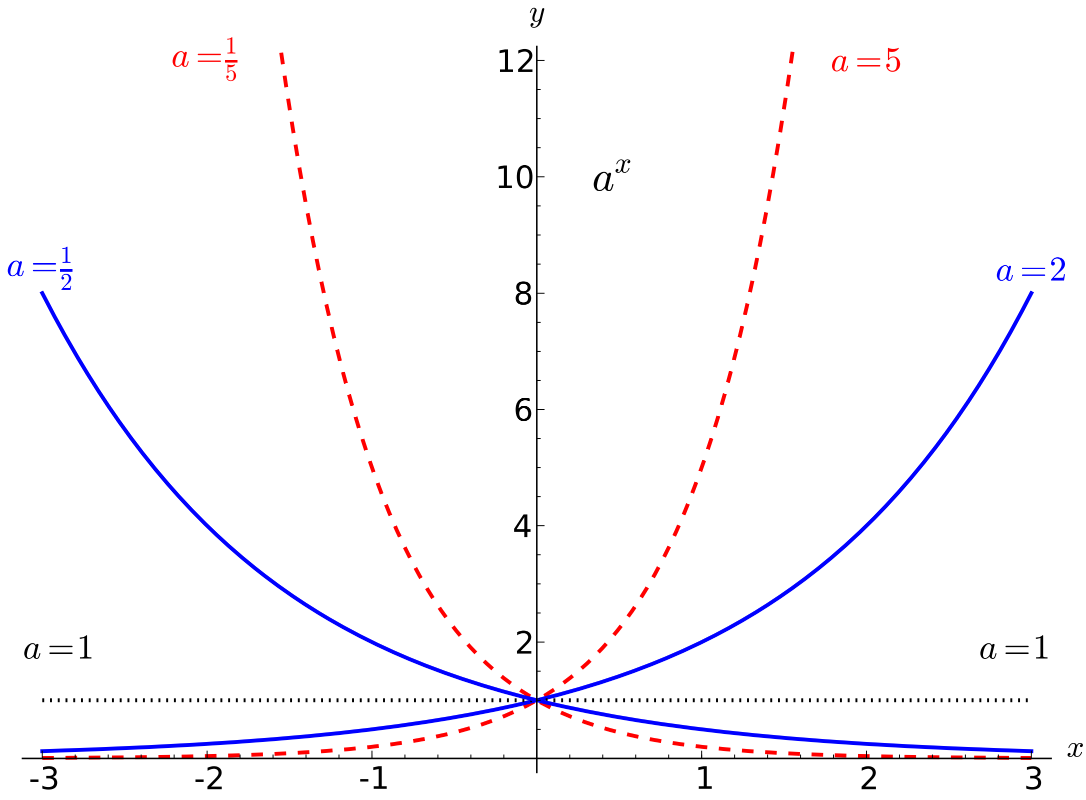


FIGURE 18 – La courbe représentative de $x \mapsto a^x$

2.4 Fonction puissance

Définition

On vient de voir que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, a^x = e^{x \ln a}$.

Définition 2.14. Pour tout réel α, on appelle *fonction puissance* α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Remarque. La notation x^α désigne bien une fonction définie uniquement sur $]0, +\infty[$, car il faut pouvoir calculer $\ln x$. Cependant, pour certains valeurs de α, le domaine de définition peut changer. Par exemple, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ le domaine est $\mathbb{R}$. Pour α rationnel, il faudra dans certains cas distinguer deux notations : par exemple, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est définie sur $]0, +\infty[$, mais $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (étant la fonction réciproque de $x \mapsto x^3$).

Etude de fonction

Pour étudier $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ on exclu les cas triviaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

1. f_α est définie et continue sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$. et on a $f_\alpha(x) > 0$ sur $\mathcal{D}_f$.
2. On a
$$\lim_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
et
$$\lim_{x \to 0+} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
Donc f_α a une asymptote verticale en 0 si $\alpha < 0$ et une tangente horizontale en $+\infty$ si $\alpha > 0$.
3. f_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée et on a :
$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$
On a
$$f'_\alpha(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ < 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
Donc f_α est croissante (décroissante) si $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).
4. f'_α est dérivable et
$$f''_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}.$$
On a
$$f''_\alpha(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha < 0 \\ < 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$
Donc f_α est convexe sie $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$ et concave si $0 < \alpha < 1$.
5. Notons qu'on a
$$\lim_{x \to 0+} f'_\alpha(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Remarque. Lorsque $\alpha \neq 0$, f_α est bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de fonction réciproque $f_{\frac{1}{\alpha}}$.

Représentation graphique de la fonction puissance

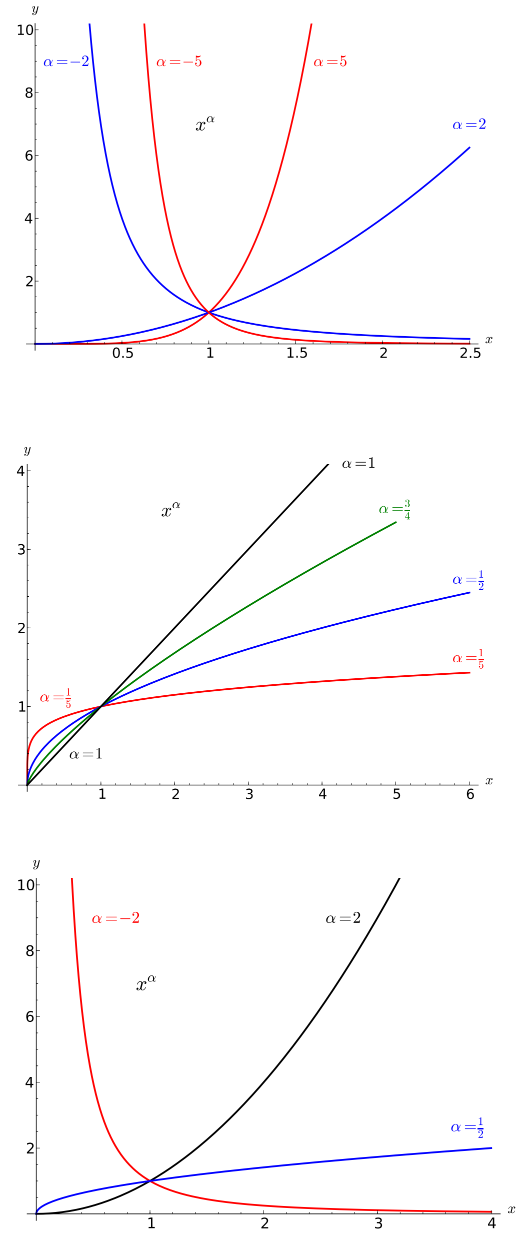


FIGURE 19 – La courbe représentative de $x \mapsto x^\alpha$

2.5 Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance

Théorème 2.15.

$$\forall \alpha, \beta > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0.$$

Preuve.

$$\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta}.$$

D'où le résultat car $x^{\alpha/\beta}$ tend vers $+\infty$ avec x et $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. □

Théorème 2.16.

$$\forall \alpha > 0, \forall a > 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0$$

Preuve.

$$\ln\left(\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}\right) = \alpha \ln x - x \ln a = x \left[\alpha \frac{\ln x}{x} - \ln a\right]$$

qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ car $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Le résultat s'en déduit en passant à l'exponentielle. □

Théorème 2.17.

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$$

Preuve. $x^{\alpha} \ln x = -\frac{\ln X}{X^{\alpha}}$ en posant $x = \frac{1}{X}$. Le résultat découle alors du théorème 2.15 car X tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 .

□

Remarque. Ces limites sont à connaître et à utiliser ! On peut retenir « les puissances l'emportent sur le log », « l'exponentielle l'emporte sur les puissances », mais non l'écrire sur une copie. Il faut donc toujours se rapporter aux formules ci-dessus.

2.6 Fonctions circulaires

Définition des fonctions circulaires

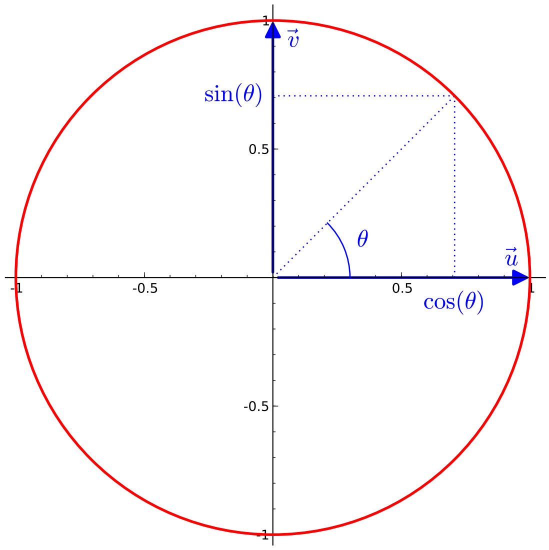


FIGURE 20 – Définition du sin et cos

$$\tan\alpha = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Formules de base

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

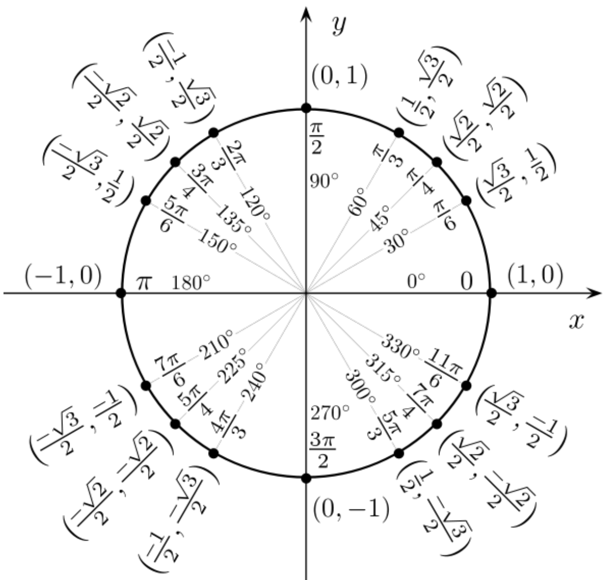


FIGURE 21 – Valeurs remarquables (Source : wikiversity)

La fonction sinus

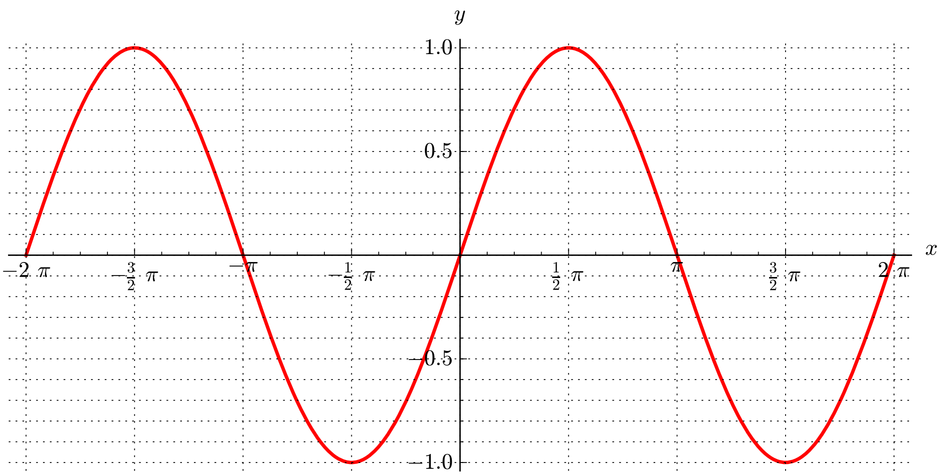


FIGURE 22 – La courbe représentative du sinus

La fonction Sinus est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, de dérivée

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

La fonction cosinus

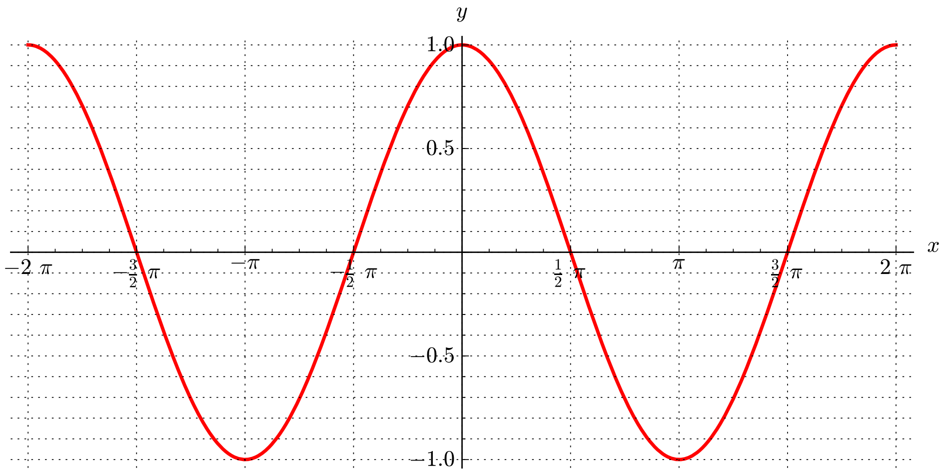


Figure 23 – La courbe représentative du cosinus

La fonction Cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, de dérivée

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

La fonction tangente

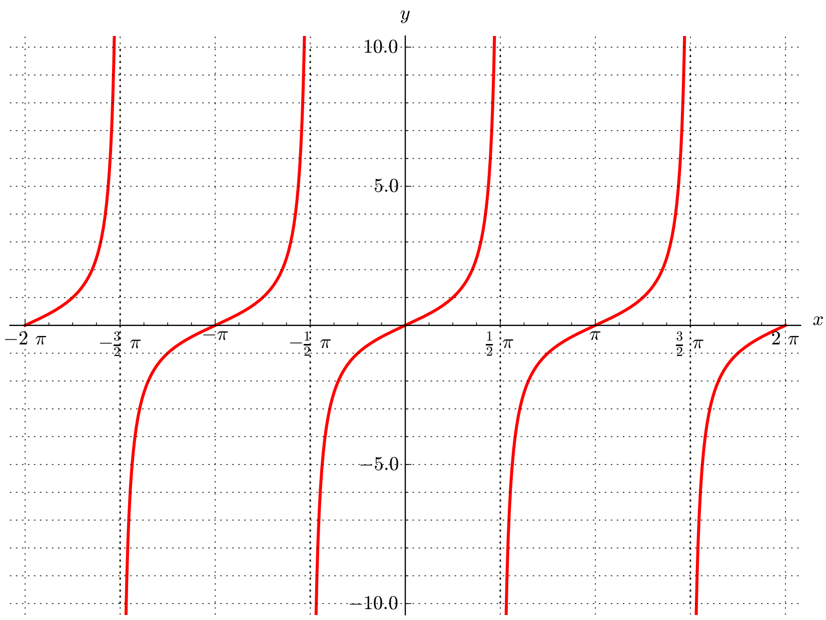


Figure 24 – La courbe représentative de la fonction tangente

La fonction Tangente est définie sur $\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, impaire, π-périodique, de dérivée

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

2.7 Formules trigonométriques

Symétries du sinus et cosinus

$$\cos(-a) = \cos(a) \qquad \sin(-a) = -\sin(a) \qquad \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(a+\pi) = -\cos(a) \qquad \sin(a+\pi) = -\sin(a) \qquad \tan(a+\pi) = \tan(a)$$

$$\cos(\pi-a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi-a) = \sin(a) \qquad \tan(\pi-a) = -\tan(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\frac{1}{\tan(a)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$$

La troisième (quatrième) ligne se déduit des premières deux.
La troisième colonne se déduit des premières deux.

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

En utilisant les symmétries on obtient

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

en en quotientant

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

En prenant $a = b$ dans les formules d'addition on obtient

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

La première formule et $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donnent

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Transformation de produit en somme

Les formules d'addition donnent :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

Limites classiques

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

La deuxième limite se déduit de la première.
Pour se rappeler des trois autres limites on peut utiliser la règle de l'Hopital.

2.8 Fonctions circulaires réciproques

La fonction arcsinus

La fonction Sinus n'est pas bijective, mais elle le devient si on restreint le domaine. Par exemple, la restriction du sinus au domaine $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante, donc bijective, donc admet une fonction réciproque.

Définition 2.18. La fonction réciproque de

$$\begin{aligned} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

est notée arcsin :

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

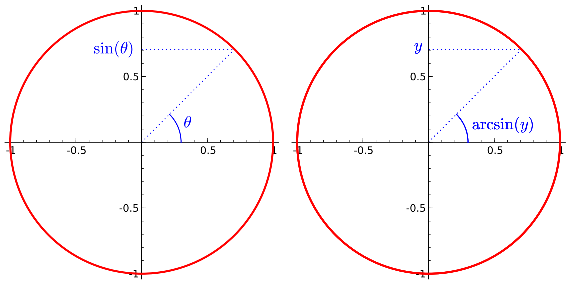
Donc on a la caractérisation suivante du arcsin

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \arcsin(x) \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \sin(\theta) = x \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le +\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

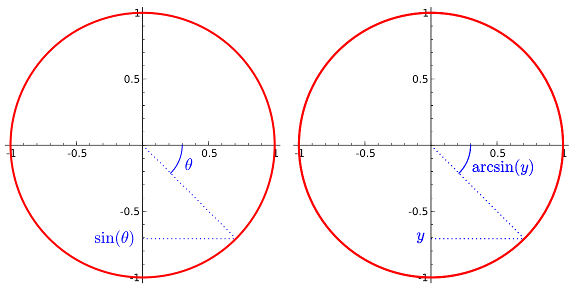
Proposition 2.19.

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x, \qquad \text{pour tout } x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin(\theta)) &= \theta, \qquad \text{ssi } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

Donc $\sin(\arcsin(x)) = x$ *toujours*, c.à.d. sur tout le domaine de définition de arcsin.

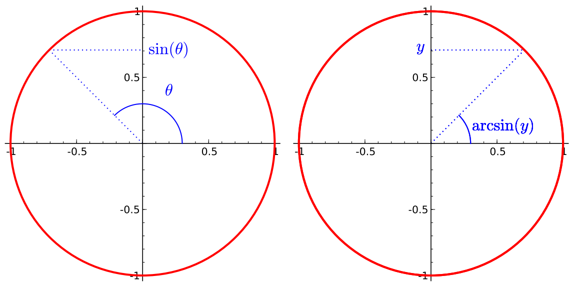


La figure montre $\theta = \frac{\pi}{4}$, $y = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin(y) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\arcsin(\sin\theta) = \theta$.



La figure montre $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $y = \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin(y) = -\frac{\pi}{4}$. Donc $\arcsin(\sin\theta) = \theta$.

Et si on prend $\theta = \frac{3\pi}{4}$?



$\theta = \frac{3\pi}{4}$, $y = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin(y) = \frac{\pi}{4}$. $\arcsin(\sin\theta) = \pi - \theta$. Donc $\arcsin(\sin\theta) \neq \theta$.

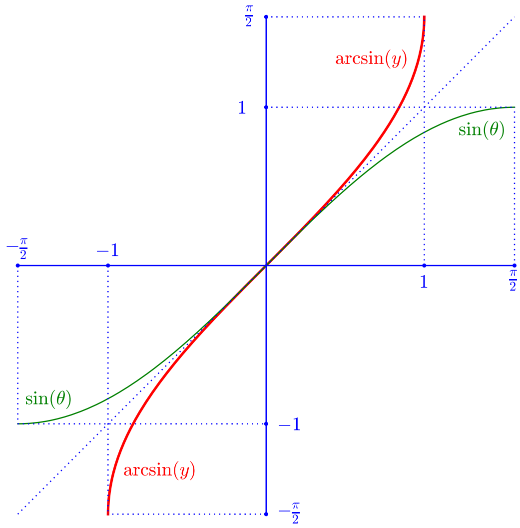


FIGURE 25 – La courbe représentative de l'arcsinus

Proposition 2.20. 1. *La fonction* arcsin *est continue, strictement croissante et impaire sur son domaine de définition* $[-1, 1]$.

2. arcsin *n'est dérivable que sur* $]-1, 1[$, *et :*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La fonction arccosinus

Définition 2.21. La fonction réciproque de

$$\begin{aligned}[0,\pi] &\to [-1,1]\\ x &\mapsto \cos(x)\end{aligned}$$

est notée arccos :

$$\begin{aligned}[-1,1] &\to [0,\pi]\\ x &\mapsto \arccos(x)\end{aligned}$$

Donc on a la caractérisation suivante du arccos

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \arccos(x)\\ 0 \leq x \leq 1\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\cos(\theta) = x\\ 0 \leq \theta \leq \pi\end{array}\right.$$

Proposition 2.22.

$$\begin{aligned}\cos(\arccos(x)) &= x, \qquad \textit{pour tout } x \in [-1,1]\\ \arccos(\cos(\theta)) &= \theta, \qquad \textit{ssi } \theta \in [0,\pi]\end{aligned}$$

Donc $\cos(\arccos(x)) = x$ *toujours*, c.à.d. sur tout le domaine de définition de arccos.

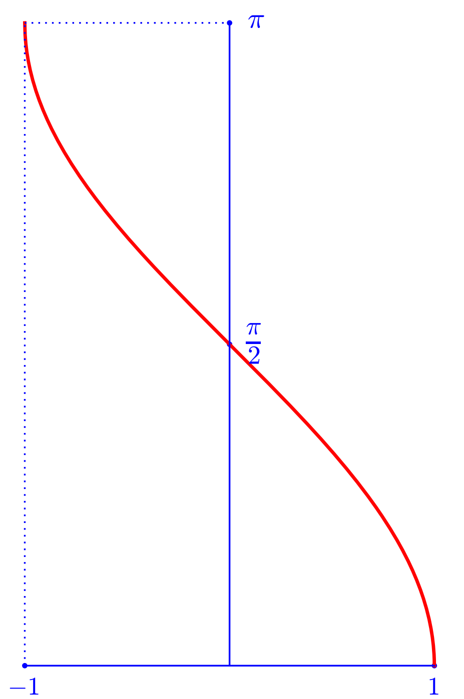


FIGURE 26 – La courbe représentative du arccosinus

Proposition 2.23. *1. La fonction* arccos *est continue et strictement décroissante sur son domaine de définition* $[-1,1]$*. Elle est ni paire ni impaire.*

2. arccos *n'est dérivable que sur* $]-1,1[$*, et :*

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctangente

Définition 2.24. La fonction réciproque de

$$\begin{aligned}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

est notée arctan :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Donc on a la caractérisation suivante du arctan

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tan(\theta) = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Proposition 2.25.

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x, && \textit{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(\theta)) &= \theta, && \textit{ssi } \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

Donc $\tan(\arctan(x)) = x$ *toujours*, c.à.d. sur tout le domaine de définition de arctan.

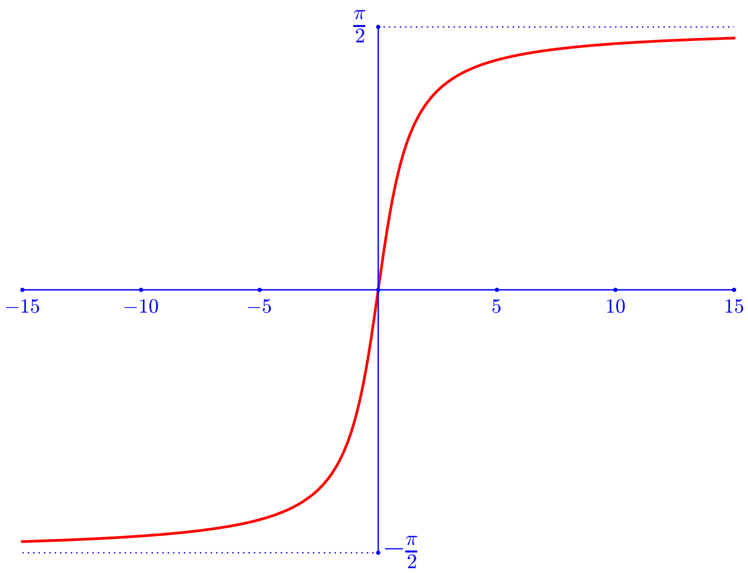


FIGURE 27 – La courbe représentative de la fonction Arctangente

Proposition 2.26. *1. La fonction* arctan *est continue, strictement croissante et impaire sur son domaine de définition* $\mathbb{R}$*.*

2. arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et :*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Quelques formules

Exercice 2.27. Montrer que

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1,1], \qquad & \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \\
\forall x > 0, \qquad & \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\
\forall x < 0, \qquad & \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

——————————— begin details ———————————

Soient $x \in [-1,1]$ et $y = \arcsin x$. Alors $x = \sin y$ avec $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $x = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$ avec $\frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi]$. Et donc par définition $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$.

Soient $x \in]0, +\infty[$ et $y = \arctan x$. Alors $x = \tan y$ avec $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et on a par suite $\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan y} = \tan(\frac{\pi}{2} - y)$ avec $\frac{\pi}{2} - y \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\frac{\pi}{2} - y = \arctan(\frac{1}{x})$.

La fonction arctan étant impaire, le troisième ré sultat en dÕcoule.

——————————— end details ———————————

2.9 Fonctions hyperboliques

Définition des fonctions hyperboliques

On définit trois fonctions sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && \text{(cosinus hyperbolique)} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && \text{(sinus hyperbolique)} \\ \tanh x &= \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} && \text{(tangente hyperbolique).} \end{aligned}$$

La fonction sinus hyperbolique

1. sinh est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ donc sinh est impaire on pourrait réduire le domaine détude à $[0, +\infty[$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$.
4. sinh est (indéfiniment) dérivable sur $\mathbb{R}$, et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

   Or

   $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

   donc sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Notons que comme $\sinh(0) = 0$ on déduit que $\sinh(x) > 0$ si $x > 0$ et $\sinh(x) < 0$ si $x < 0$.
6. On a

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

   Donc

   $$\sinh''(x) = \sinh(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   On déduit que sinh est convexe sur $[0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0]$. De plus, sinh admet un point d'inflexion en 0 avec pente de la droite tangente $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$.
7. Pour la courbe représentative voir la figure 28

La fonction cosinus hyperbolique

1. La fonction cosh est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\cosh(-x) = \cosh(x)$, donc cosh est paire.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$
4. On a déjà vu que $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Vu le signe de sinh on déduit que cosh est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Donc cosh admet un minimum (global) en 0 avec $\cosh(0) = 1$.
5. $\cosh''(x) = \cosh(x) \geq 1 > 0$, donc cosh est convexe sur $\mathbb{R}$. On peut de plus remarquer que puisque $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, les courbes de cosh et sinh sont asymptotes en $+\infty$, la courbe représentative de cosh étant constamment au dessus de celle de sinh.
6. Pour la courbe représentative voir la figure 29

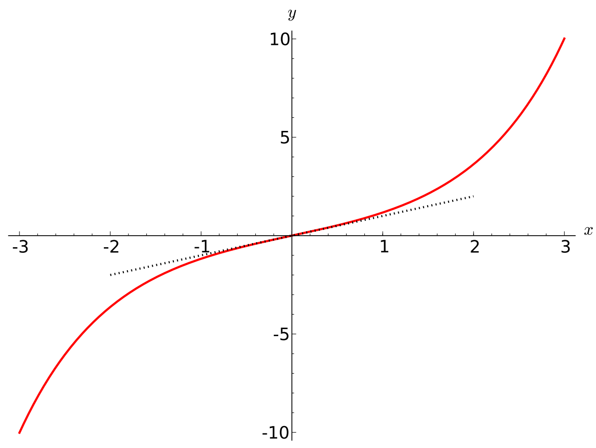


FIGURE 28 – La courbe représentative de la fonction sinus hyperbolique

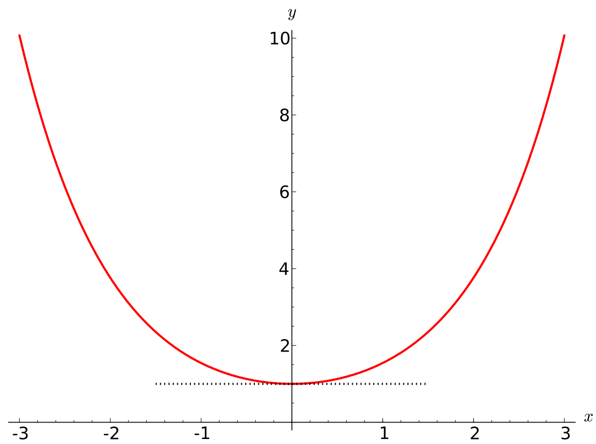


FIGURE 29 – La courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique

Remarque. La courbe du cosh est appelée *chaînette*. Elle correspond en effet à la position d'équilibre d'un fil inextensible suspendu par deux de ses points.

La fonction tangente hyperbolique

1. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh x \geq 1$, tanh est définie et continue dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\tanh(-x) = -\tanh(x)$: la fonction tanh est impaire. On pourrait donc l'étudier sur $I = [0, +\infty[$.
3. tanh est indéfiniment dérivable et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \overset{(*)}{=} \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$
(On a utilisé (*) : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Pour vérifier cette relation il suffit d'utiliser la définition de cosh et sinh et de dévélopper.)
La fonction tanh est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Pour l'étude des branches infinies, on observe que
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

donc $\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$. La courbe représentative de la fonction tanh admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

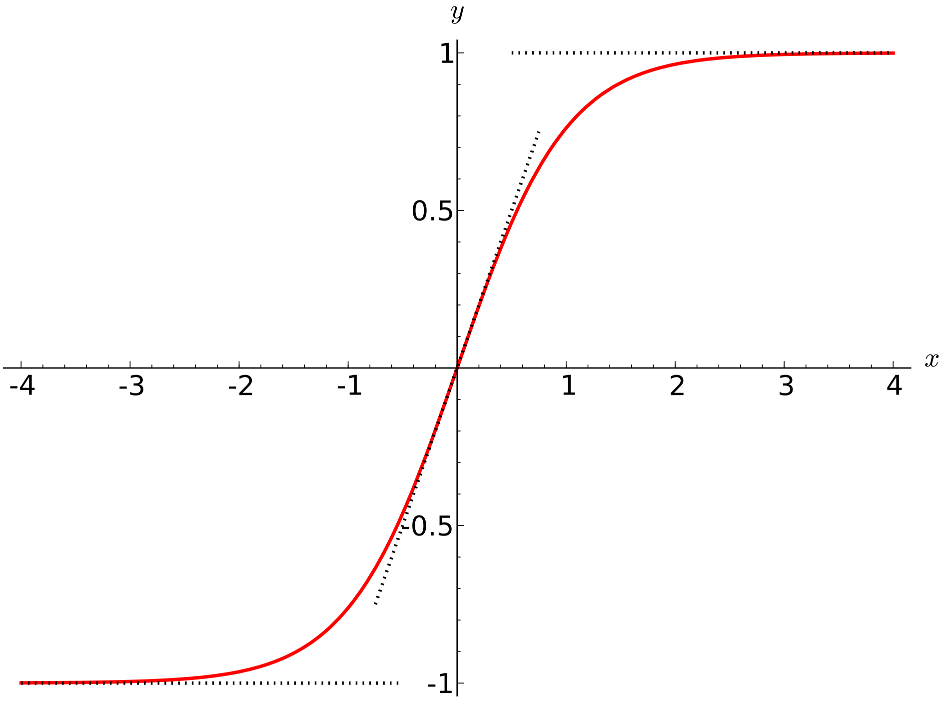


FIGURE 30 – La courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique

Limites classiques

Proposition 2.28.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh x}{x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x} = 0.$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Preuve.

$$1.\ \lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \text{sh } 0}{x - 0} = \cosh 0 = 1.$$

2. Conséquence immédiate de 1)

$$3.\ \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - \cosh 0}{x - 0} = \sinh(0) = 0.$$

$$4.\ \cosh(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 = 2\left(\sinh \frac{x}{2}\right)^2.$$

Donc

$$\frac{\cosh(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Il suffit alors d'utiliser 1. □

Remarque. Pour se rappeler ce ces limites on peut utiliser la règle de l'Hospital.

2.10 Formules trigonométriques hyperboliques

Formules de Base

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \qquad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2(x) = 1 \qquad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Les premières deux formules découlent directement de la définition. En prenant le produit des deux premières on obtient la troisième et la quatrième est une conséquence de la troisième.

Symétrie

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \qquad \sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad \tanh(-x) = -\tanh(x)$$

Formules d'addition

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \qquad \sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

Pour vérifier ces formules il suffit d'utiliser la définition et de dévélopper le côté droit. Pour retrouver ces formules voir la fin de cette section.
On en déduit par symmétrie

$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) \qquad \sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$

et en quotiant

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \qquad \tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

Formules de duplication

En prenant $x = y$, les formules d'addition donnent

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \qquad \sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \qquad \tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

En utilisant $\cosh^2 x - \sinh^2(x) = 1$ on obtient

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x)$$

Transformation de produit en sommes

Les formules d'addition donnent

$$\cosh(x)\cosh(y) = \frac{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)}{2} \qquad \sinh(x)\sinh(y) = \frac{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)}{2}$$

$$\sinh(x)\cosh(y) = \frac{\sinh(x+y) + \sinh(x-y)}{2} \qquad \cosh(x)\sinh(y) = \frac{\sinh(x+y) - \sinh(x-y)}{2}$$

Remarque. On a pu observer une certaine correspondance entre les formules de la trigonométrie hyperbolique et celles de la trigonométrie circulaire. En fait, on passe aisément des secondes aux premières par les transformations : $\cos x \mapsto \cosh x$, $\sin x \mapsto i \sinh x$, $\tan x \mapsto i \tanh x$.

Exemple 2.29. 1. Linéariser $\cosh^5 x$.
On a :

$$\cosh^5 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^5.$$

On développe, on regroupe les termes "similaires" et on obtient :
$\cosh^5 x = \frac{1}{2^4}(\cosh 5x + 5ch3x + 10\cosh x)$.

2. Exprimer $\sinh 3x$ à l'aide des puissances de $\sinh x$.
Par définition $\sinh 3x = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$. Notons qu'on a $e^{3x} = (\cosh x + \sinh x)^3$ et $e^{-3x} = (\cosh x - \sinh x)^3$. En développant ces deux expressions et en simplifiant, on obtient :

$$\sinh 3x = \sinh^3 x + 3\cosh^2 x \sinh x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x$$

3 Les nombres complexes

3.1 Nombres complexes

Définition et notations

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble qui :
- Contient tous les nombres réels
- Est muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les mêmes propriétés que les opérations correspondantes de $\mathbb{R}$
- Contient un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Est constitué de tous les nombres $z = a + ib$, avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Il est impossible de comparer deux nombres complexes : si z et z' sont deux complexes, l'expression « z plus grand que z' » n'a pas de sens ; il est en particulier absurde de parler de complexes positifs.

Notation 3.1. Soit z un complexe.

1. L'écriture $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dite *forme algébrique* de z.
2. a est *la partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
3. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est *imaginaire pur*. On pose $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$.
4. b est *la partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$. (Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, z est un réel.)

Proposition 3.2. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.*

Représentation géométrique

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à z le point $M(a, b)$. On dit que M est *l'image* de z. Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on peut associer un unique complexe z, défini par $z = a + ib$, z est appelé *affixe* de M ; on dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

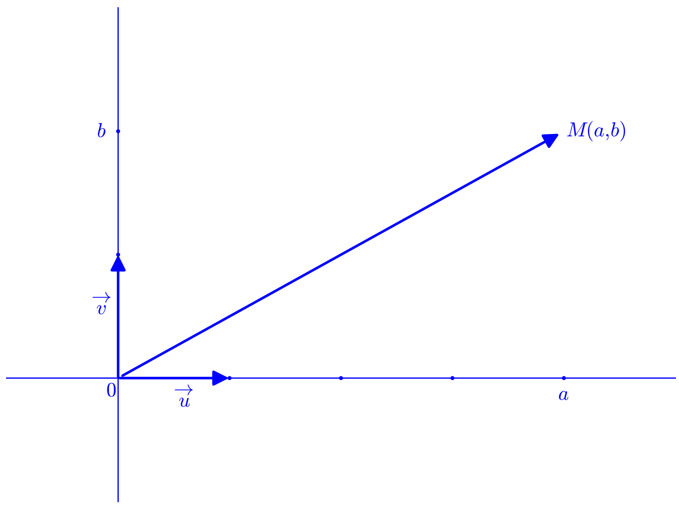


FIGURE 31 – L'image $M(a, b)$ de $z = a + ib$

3.2 Conjugué, module et argument

Conjugué

Définition 3.3. Soit un nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le *conjugué* de z, noté $\bar{z}$ est défini par $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 3.4. *Soient $z, w \in \mathbb{C}$.*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$.
3. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
4. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.
5. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ *si* $z \neq 0$.
6. $\overline{z} = z$ *si et seulement si z est réel*
7. $\overline{z} = -z$ *si et seulement si z est imaginaire pur*
8. $z\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$

Module

Définition 3.5. Soit un nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le *module de z*, noté $|z|$ est défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Géométriquement, on a $|z| = OM$, où M est l'image de z

Proposition 3.6. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. *(ainsi $1/z$ est un nombre complexe).*

Remarque. La proposition précédente montre que si $z \in \mathbb{C}$ alors $\frac{1}{z}$ est aussi un nombre complexe. On peut voir que $\mathbb{C}$ avec les opérations d'addition et de multiplication (et sousstraction, division) suit les mêmes règles que $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$) est un *corps commutatif.*

Proposition 3.7. *Soient $z, w \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$
2. $|z| = |-z|$
3. $|\lambda z| = |\lambda||z|$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *si* $z \neq 0$
6. $|\,|z| - |w|\,| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire).

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition 3.8. *L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ munis de la multiplication est un groupe commutatif :*
– *il contient l'élément neutre pour la multiplication,* 1
– *si $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors $zz' = z'z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*
– *si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors $\frac{1}{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*
– *si $z, z', z'' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ alors $z(z'z'') = (zz')z''$.*

Argument et forme trigonométrique

Définition 3.9. On note par U l'ensemble des complexes de module 1 :

$$U = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}.$$

Exercice 3.10. Montrer que $U = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = 1\}$ muni de la multiplication est un groupe commutatif.

Notons que $z = x + iy$ est dans U, si et seulement si $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, si et seulement si $M(x, y)$ est dans le cercle trigonométrique de $\mathbb{R}^2$ donné par $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Dans ce cas, par définition du sin et cos, il existe un θ tel que $\cos(\theta) = x$ et $\sin(\theta) = y$.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si on écrit $r = |z|$, alors le module de $\frac{z}{r}$ est 1, autrement dit $\frac{z}{r} \in U$. Donc il existe θ tel que $\frac{z}{r} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On a montré que

Proposition 3.11. *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si on note $r = |z|$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta)). \qquad \text{(forme géométrique)}$$

Définition 3.12. Soient z et θ comme dans la proposition précédente.

1. Le nombre θ est appelé un *argument* de z.
2. Les nombres r et θ associés à z s'appellent *coordonnées polaires de* z.
3. L'écriture $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelée *forme géométrique* de z.

Proposition 3.13. *Soit $z \neq 0$ et θ un argument de z. Alors les arguments de z sont les réels de la forme $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.*

On rappelle les « formules d'addition » du chapitre 2.7 :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \qquad \text{(formule d'addition 1)}$$
$$\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') \qquad \text{(formule d'addition 1)}$$

Proposition 3.14. *Si z et z' sont deux complexes non nuls de modules r et r' et d'arguments θ et θ' alors zz' est de module rr' et d'argument $\theta + \theta'$:*

$$[r(cos(\theta) + i\sin(\theta))] \cdot [r'(cos(\theta') + i\sin(\theta'))] = (rr')(cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')).$$

Preuve. Si on développe le coté gauche on trouve

$$rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right]$$

Il suffit alors d'appliquer les « formules d'addition » pour conclure □

Forme exponentielle

On pose

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Voir figure 32.

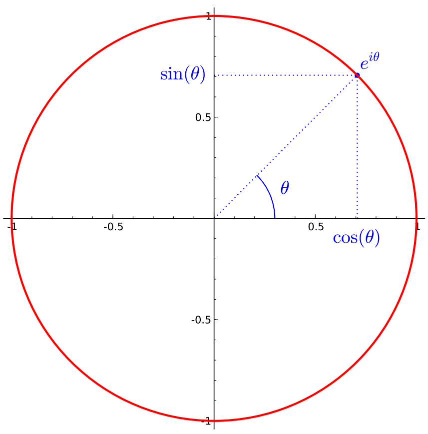


FIGURE 32 – Représentation géométrique de $e^{i\theta}$

Notons qu'avec cette notation, l'ensemble des complexes de module 1 est

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si on pose $r = |z|$ alors on peut écrire

$$z = re^{i\theta}. \qquad \text{(forme exponentielle)}$$

Voir figure 33.

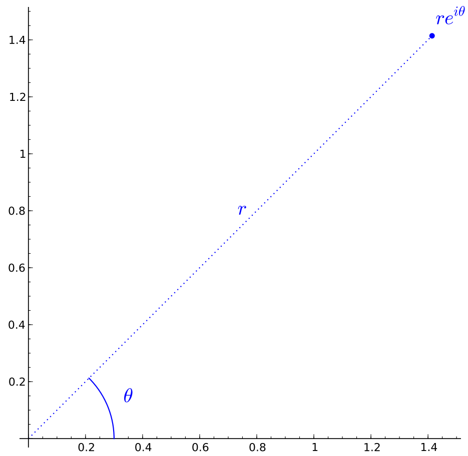


FIGURE 33 – Forme exponentielle

Proposition 3.15. *Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, alors*

1. $zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$.
4. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Preuve. 1) C'est une réécriture de la proposition 3.14.
2)

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \overline{r\cos\theta + ir\sin\theta} = r\cos\theta - ir\sin\theta = r\cos(-\theta) - ir\sin(-\theta) = re^{-i\theta}$$

3)

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{r^2} \overset{2)}{=} \frac{re^{-i\theta}}{r^2} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

4) se déduit de 1) et 3) □

Remarque. 1. La proposition 3.15 dit que la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ a la propriété d'additivité d'une fonction exponentielle : $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ (et donc la notation « $e^{i\theta}$ » est bien choisie).

2. Si on se rappelle que la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ a la propriété d'additivité, alors on peut *retrouver* les « formules d'addition » :

$$\begin{aligned}
re^{i\theta}r'e^{i\theta'} &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\
rr'e^{i(\theta+\theta')} &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))
\end{aligned}$$

En comparant les deux formules on retrouve les « formules d'addition ».

3. Notons que la proposition 3.15 nous donne aussi les propriétés du module enoncé dans la proposition 3.7.
4. La proposition 3.15 nous donne aussi les propriétés suivantes de l'argument :

$$arg(zz') = \theta + \theta' \quad arg(\bar{z}) = -\theta \quad arg(\frac{1}{z}) = -\theta \quad arg(\frac{z}{z'}) = \theta - \theta'$$

3.3 Linéarisation

Formule du binôme

Rappelons la convention $0! = 1$ et la définition des coefficients binômiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On a alors

Proposition 3.16 (Formule du binôme)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Formules de base

Notons qu'on a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

En prenant la somme et la différence de ces deux égalités on obtient

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{(Formule de base 1)}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \text{(Formule de base 2)}$$

Un exemple de linéarisation

$$\begin{aligned} \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 &= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) \end{aligned}$$

3.4 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit z un complexe non nul. On dit que w est une *racine carrée* de z si w vérifie $w^2 = z$.

Racines carrées sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné. On cherche w tel que $\omega^2 = z$. Posons $\omega = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\omega^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$, la relation $\omega^2 = z$ nous donne $\alpha^2 - \beta^2 = a$ et $2\alpha\beta = b$. Pour simplifier les calculs on rajoute la relation $|\omega|^2 = |z|$, donc $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a montré :

Proposition 3.17. *$\omega = \alpha + i\beta$ est racine carrée de $z = a + ib$ si et seulement si α et β vérifient*

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= a \\ 2\alpha\beta &= b \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Exemple 3.18. On cherche les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$. Il faut donc resoudre le système

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1 \tag{1}$$

$$2\alpha\beta = -\sqrt{3} \tag{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 \tag{3}$$

La somme des équations (1) et (3) nous donne $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. La différence de (3) et (1) nous donne $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'équation (2) implique que α et β ont des signes opposés, donc on trouve $(\alpha_1, \beta_1) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\alpha_2, \beta_2) = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Conclusion : les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$ sont $\omega_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\omega_1$.

Remarque. Si z est réel, donc si $b = 0$, on obtient $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ si $a > 0$ et $\omega_{1,2} = \pm i\sqrt{-a}$ si $a < 0$.

Racines carrées sous forme exponentielle

Soit $z = re^{i\theta}$ donné, où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche ω tel que $\omega^2 = z$.

1. Posons $\omega = \rho e^{i\alpha}$, où $\rho \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (sont des inconnus). On cherche donc ρ et α tel que
$$\rho^2 e^{i2\alpha} = re^{i\theta}.$$
2. Comme $r > 0$ et $\rho \geq 0$ on obtient $\rho = \sqrt{r}$.
On obtient aussi $2\alpha \equiv \theta\ (2\pi)$. Les solutions de cette équation sont $2\alpha_k = \theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha_k = \frac{\theta}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit de prendre (par exemple) $k = 0, 1$.
3. Conclusion : les racines carrées de $z = re^{i\theta}$ sont $\omega_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\omega_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$.
Notons qu'on a bien $\omega_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = -\omega_0$. On a montré :

Proposition 3.19. *Chaque nombre complexe $z \neq 0$ admet deux racines carrées. Si on note par ω_1 et ω_2 les deux racines carrées alors on a $\omega_2 = -\omega_1$.*

Exemple 3.20. On cherche à nouveau les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$, mais cette fois-ci sous forme exponentielle :

1. On a $|z| = 2$ et $\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2. On cherche $\omega = \rho e^{i\alpha}$ tel que $\rho^2 e^{i2\alpha} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. On obtient $\rho = \sqrt{2}$ et $2\alpha \equiv -\frac{\pi}{3}\,(2\pi)$, donc $\alpha \equiv -\frac{\pi}{6}\,(\pi)$.
Les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$ sont donc $\omega_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\omega_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -\omega_1$.
3. Notons qu'on a $\omega_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc on trouve bien le même résultat que par la méthode qui utilise la forme algébrique.

Remarque. Si x est un nombre réel positif, alors x amet deux racines carrées. Une positive, qu'on note $\sqrt{x}$, et une négative, qui est alors $-\sqrt{x}$. Donc $\sqrt{x}$ est l'unique racine carrée positive de x. Si z est un nombre complexe, non réel, alors z a encore deux racines carrées. Mais il n'y a pas de faDon « naturelle » de privilégier l'une parmi les deux qu'on appellera $\sqrt{z}$. Il est donc interdit d'utiliser la notation $\sqrt{z}$.

Exemple 3.21. 1. Calculer les racines carrées de $z = 2 + 2i$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2. En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
3. Vérifier ce résultat en utilisant des formules trigonométriques (formules de duplication).

Solution :

1. Posons $\omega = \alpha + i\beta$ et résolvons $\omega^2 = z$. On obtient les équations : $\alpha^2 - \beta^2 = 2$, $\alpha^2 + \beta^2 = 2\sqrt{2}$, $2\alpha\beta = 2$. On trouve $\alpha = \pm\sqrt{\sqrt{2}+1}$ et $\beta = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$. α et β ont le même signe, donc les racines carrées de z sont
$$\omega = \sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1} \qquad \text{et} \qquad -\omega.$$
2. On a
$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
Les racines carrées de z sont donc
$$\pm 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$
3. En comparant les racines carrées de z sous forme algébrique et sous forme exponentielle, et en utilisant $\cos(\pi/8) > 0$ et $\sin(\pi/8) > 0$ on obtient
$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
et de même
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
4. On utilise
$$\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos(2\frac{\pi}{8})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$
En utilisant $\cos(\pi/8) > 0$ on trouve la même formule pour $\cos(\pi/8) > 0$ que ci-dessus.
De même,
$$\sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1-\cos(2\frac{\pi}{8})}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

3.5 Equation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

On veut résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c, et z sont des complexes, avec $a \neq 0$. Comme dans le cas réel, on la met sous forme canonique :

$$\begin{aligned} 0 = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Pour resoudre cette équation on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit ω une racine carrée de Δ. (Si $\Delta \neq 0$ on choisit une des deux racines carrées de Δ et si $\Delta = 0$ on pose $\omega = 0$.) $\frac{\omega}{2a}$ est alors une racine carrée de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. On peut donc écrire

$$0 = az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}\right] = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\omega}{2a}\right)$$

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont donc : $z_1 = \frac{-b+\omega}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\omega}{2a}$.

Notons que si $\Delta \neq 0$, alors on trouve deux solutions distinctes. On dit que ces solutions sont des racines du trinôme $az^2 + bz + c$. Si $\Delta = 0$, on trouve une seule solution et on dira que c'est une racine double de $az^2 + bz + c$. (Cette terminologie sera expliqué dans le prochain chapitre.)

On a montré :

Théorème 3.22. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

1. *Le trinôme $az^2 + bz + c$ admet soit deux racines distinctes soit une racine double.*
2. *Plus explicitement, soient $\Delta = b^2 - 4ac$ et ω une racine carrée de Δ.*
   Alors les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-b + \omega}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \omega}{2a}.$$

Remarque. Les deux racines z_1 et z_2 de $az^2 + bz + c$ vérifient $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

La proposition suivante traite le cas d'un trinôme à coefficients réels :

Proposition 3.23. *Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme réel, donc $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $a \neq 0$.*

1. *Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ est strictement positive alors le trinôme admet deux racines réels distinctes.*
2. *Si $\Delta = 0$ alors le trinôme admet une racine réel double.*
3. *Si $\Delta < 0$ alors le trinôme admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées*

Preuve. Les cas 1) et 2) sont immédiats.

Au cas 3) on note qu'une racine carrée de Δ est $i\sqrt{-\Delta} \in i\mathbb{R}$. Donc les racines du trinôme sont

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}.$$

□

Exemple 3.24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$.

1. On trouve $\Delta = 2i$.
2. Une racine de Δ est $\omega = 1 + i$. (Pour voir cela on peut chercher les racines carrées de Δ sous forme algébrique comme décrit plus haut. On peut aussi écrire $\Delta = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Une racine carrée est alors $\omega = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$.)
3. Les solutions de $z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0$ sont $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 2 + i$.

3.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 3.25. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que $w \in \mathbb{C}$ est une *racine n-ième de z* si $w^n = z$. Si $z = 1$ alors on dit que w est une *racine n-ième de l'unité.*

Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche ω tel que $\omega^n = 1$. Posons $\omega = \rho e^{i\alpha}$, où $\rho \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (sont des inconnus). Comme $1 = e^{i0}$ il faut trouver ρ et α tel que

$$\rho^n e^{in\alpha} = e^{i0}.$$

Comme $\rho \geq 0$ on obtient $\rho = 1$.

On obtien aussi $n\alpha \equiv 0\ (2\pi)$. Les solutions de cette équation sont $n\alpha_k = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha_k = k\frac{2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\omega^n = 1$ sont donc $\omega_k = \sqrt{r}e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme on a $\omega_{k+n} = \omega_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il suffit de prendre (par exemple) ω_k, pour $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

On a montré :

Théorème 3.26 (Racines n-ièmes de l'unité)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $\omega^n = 1$ admet n solution distinctes dans $\mathbb{C}$:*

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Exemple 3.27.

1. Si $n = 2$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$
2. Si $n = 3$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ce cas est à connaître. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; on a $j^2 = \bar{j} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et $j^2 = \bar{j}$.
3. Si $n = 4$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\omega_2 = -1 = e^{i\pi}$, $\omega_3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Proposition 3.28. *Les images des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés, tracé sur le cercle unité, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.*

Exemple 3.29. La figure 34 montre les racines 8-ièmes de l'unité comme sommets d'un octagon régulier.

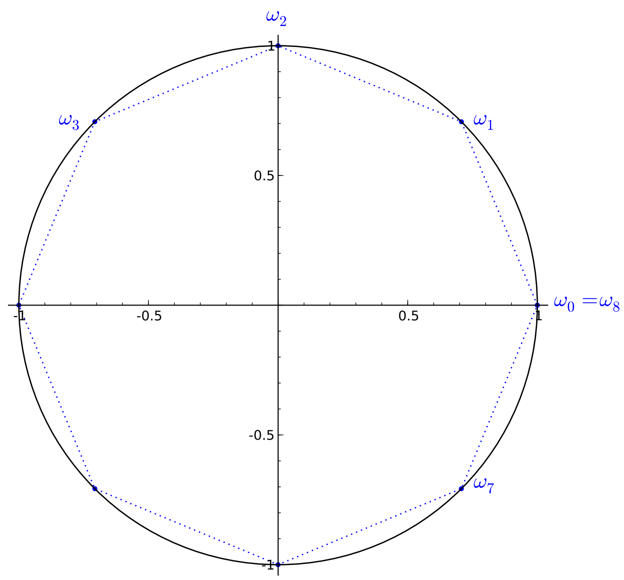


FIGURE 34 – Les racines 8-ièmes sont les sommets d'un octagon régulier

Théorème 3.30.

1. *Si ω est une racine n-ième de l'unité, avec $\omega \neq 1$, alors*
$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$
2. *La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.*

Preuve. 1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})(1 - z) = 1 - z^n$. Donc si $z \neq 1$, alors on a

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Si ω est maintenant une racine n-ième de l'unité qui est différent de 1 alors on obtient

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0.$$

2) Les racines n-ièmes de l'unité sont $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Si on utilise 1) avec $\omega = \omega_1$, on obtient

$$1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{n-1} = 0.$$

Notons que $\omega_0 = 1$ et $\omega_1^k = \omega_k$, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On peut donc écrire la relation précédente par

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = 0,$$

ce qu'il fallait montrer □

Exemple 3.31. j étant une racine 3-ième de l'unité on a : $1 + j + j^2 = 0$. De même pour l'autre racine 3-ième de l'unité : $1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$. Les racines de $1 + z + z^2$ sont donc j et $\bar{j}$.

Racines n-ièmes d'un complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul (donné). Ecrivons z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche u tel que $u^n = z$. Posons $u = \rho e^{i\alpha}$, où $\rho \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (sont des inconnus). Il faut trouver ρ et α tel que

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Comme $\rho \geq 0$ et $r > 0$ on obtient $\rho = \sqrt[n]{r}$.
On obtien aussi $n\alpha \equiv \theta(2\pi)$. Les solutions de cette équation sont $n\alpha_k = \theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de $u^n = z$ sont donc $u_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme on a $u_{k+n} = u_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il suffit de prendre (par exemple) u_k, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
On a montré :

Théorème 3.32 (Racines n-ièmes d'un nombre complexe)**.** *Soit n un entier non nul. Tout complexe non nul $z = re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes distinctes dans $\mathbb{C}$:*

$$u_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Remarque. 1. Notons qu'on a

$$u_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\omega_k,$$

où ω_k est racine n-ième de l'unité.

2. Il est façil de deviner une racine n-ième de $z = re^{i\theta}$: $u_0 = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$. En utilisant 1) on voit qu'on obtient les autres racines n-ième de z en multipliant u_0 par les n racines n-ièmes de l'unité.
3. Pour obtenir une représentation dans le plan des (images des) racines n-ièmes de $z = re^{i\theta}$, on commence par représenter les racines n-ièmes de l'unité, on applique ensuite une rotation par l'angle $\frac{\theta}{n}$ (on multiplie les racines n-ièmes de l'unité par $e^{i\frac{\theta}{n}}$) en on applique ensuite une homothétie de rapport $\sqrt[n]{r}$.

Exemple 3.33. Calculer les racines quatrièmes de

$$z = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

Solution. On a

$$2 + 2i\sqrt{3} = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4e^{i\frac{\pi}{3}},$$

et

$$\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Les racines quatrièmes de z sont

$$u_0 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{24}}, \quad u_1 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{13\pi}{24}}, \quad u_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{25\pi}{24}}, \quad u_3 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{37\pi}{24}}.$$

Notons qu'il suffit de multiplier u_0 par les racines 4-ièmes de l'unitée :

$$u_0 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{24}}, \quad u_1 = iu_0, \quad u_2 = -u_0, \quad u_3 = -iu_0.$$

Exemple 3.34. Représenter les racines 8-ièmes de $16i$ dans le plan complexe.

Solution. Les racines 8-ièmes de $16i = 2^4 e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont

$$u_k = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{16}} e^{i\frac{k\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{16}} \omega_k.$$

On a vu (figure 34) que les racines 8-ièmes de l'unité forment un octagon régulier. Il suffit d'appliquer une rotation d'angle $\frac{\pi}{16}$ suivie d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ pour obtenir les racines 8-ièmes de $16i$. Voir la figure 35.

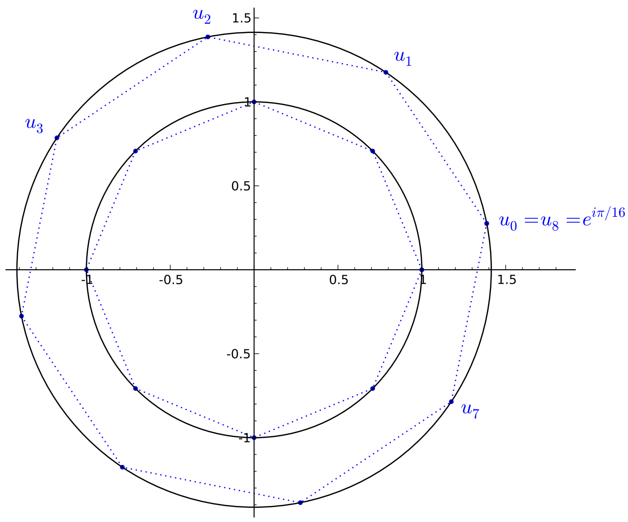


FIGURE 35 – Les racines 8-ièmes de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

4 Polynômes et fractions rationnelles

4.1 Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Il ne s'agit pas ici de développer la théorie des polynômes mais seulement d'énoncer quelques résultats utiles au calcul de primitives et d'intégrales.

Vocabulaire sur les polynômes

Définition 4.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires de $\mathbb{K}$ tous nuls à partir d'un certain rang. On dit alors que
$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$
est un polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que a_i est le *coefficient* de P de degré i
2. Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même puissance sont deux à deux égaux. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
3. Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ un polynôme non nul. Le *degré* du polynôme P est le plus grand des entiers n tels que a_n soit non nul. On note $d = \deg(P)$ et on dit que a_d est le *coefficient dominant* de P. Donc
$$P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n = a_0 + a_1 X + \cdots a_d X^d, \qquad a_d \neq 0.$$
4. On convient que le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
5. On appelle *valuation* de P le plus petit des entiers n tels que a_n soit non nul. On note $r = \mathrm{val}(P)$. On convient que le polynôme nul a pour valuation $+\infty$. Donc
$$P(X) = a_r X^r + a_{r+1} X^{r+1} + \cdots + a_d X^d, \qquad r \leq d, \quad a_r, a_d \neq 0.$$

Définition 4.2. Soient $P(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, et $Q(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit la somme et le produit de P et Q de la manière suivante :

1. le *polynôme somme* s'écrit $P + Q$, avec
$$(P+Q)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) X^n.$$
2. le *polynôme produit* s'écrit PQ, avec
$$(PQ)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n X^n, \quad \text{où} \quad d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Proposition 4.3. *Soient P et Q deux polynômes. Alors :*

1. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
2. $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$
3. $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$ *avec égalité si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$
4. $\mathrm{val}(P+Q) \geq \inf\{\mathrm{val}(P); \mathrm{val}(Q)\}$ *avec égalité si* $val(P) \neq \mathrm{val}(Q)$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Remarque. Dans toute la suite, on identifiera souvent le polynôme P avec la fonction polynôme P qui à tout k de $\mathbb{K}$ associe $P(k)$.

Division euclidienne

Théorème 4.4. *Soient A et B deux polynômes, $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :*

$$A = BQ + R, \qquad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement quotient *et* reste *dans la division euclidienne de A par B.*

Preuve. *Unicité* Soit (Q', R') un autre couple solution. Alors on a :
$O = B(Q - Q') + (R - R')$ c'est à dire $B(Q - Q') = R' - R$ et donc :
$\deg(R' - R) = \deg(B) + \deg(Q - Q')$.
Or $\deg(R' - R)$ est inférieur à $\max\{\deg(R'); \deg(R)\}$ donc strictement inférieur à $\deg(B)$. Cela implique que $Q = Q'$ et par suite que $R = R'$.
Existence On la montre par récurrence sur le degré de A. Lorsque $\deg(A) < \deg(B)$, le couple $(0, A)$ convient. Supposons alors l'existence montrée pour tous les polynômes de degré strictement inférieur à n et soit A de degré n avec $n > \deg(B)$. On a : $A = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et $B = b_p X^p + \cdots + b_1 X + b_0$ avec $a_n \neq 0, b_p \neq 0$ et $n > p$. Posons alors $A_1 = A - \dfrac{a_n}{b_p} X^{n-p} B$. On a$\deg(A_1) < n$, donc par hypothèse de récurrence, $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$. D'où $A = B(Q_1 + \dfrac{a_n}{b_p} X^{n-p}) + R_1$. □

Cette démonstration fournit la méthode pratique d'obtention de Q et R (division suivant les puissances décroissantes).

Exemple 4.5. Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ par $X^2 + 1$.

Solution.

A	X^3	$+3X^2$	$+2X$	$+1$	$X^2 + 1$	B
$Q_1 B$	X^3		$+X$		$X + 3$	$Q_1 + Q_2 = Q$
$A - Q_1 B$		$3X^2$	$+X$	$+1$		
$Q_2 B$		$3X^2$		$+3$		
R			X	-2		

Donc

$$X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + 1)(X + 3) + X - 2.$$

$Q = X + 3$ est le quotient, et $R = X - 2$ est le reste.

Exercice 4.6. Que peut-on dire sur le reste si on divise un polynôme P de degré $deg(P) \geq 2$ par $Q = (x - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Définition 4.7. On dit que B *divise* A et on écrit $B|A$ s'il existe un polynôme C tel que $A = BC$.

Remarque.
1. On a $B|A$ lorsque le reste R de la division euclidienne de A par B est 0.
2. Notons qu'on a alors $\deg(B) \leq \deg(A)$ et si $\deg(B) = \deg(A)$, alors $B = \lambda A$, avec $\lambda \in K$.

Racines

Définition 4.8. Si $a \in \mathbb{K}$ vérifie $P(a) = 0$, on dit que a est *racine* (ou *zéro)* du polynôme P.

Théorème 4.9. *a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P, c.à.d. s'il existe Q tel que*

$$P = (X - a)Q.$$

Exemple 4.10. $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ a pour racine 1, factoriser $X - 1$.

Définition 4.11. La *multiplicité* (ou *l'ordre*) d'un zéro a d'un polynôme non nul P est le plus grand entier $k \geq 1$ tel que $(X-a)^k$ divise P, c.à.d. $k \geq 1$ tel que

$$P = (X-a)^k Q, \qquad \text{avec} \qquad Q(a) \neq 0.$$

Exemple 4.12. Soit $P(X) = X^4 + 2X^2 + 1$. On a $P(X) = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, donc i et $-i$ sont racines de multiplicité 2 de P.

Théorème 4.13. *Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, et a un élément de K. Alors a est racine d'ordre k de A si et seulement si*

$$A(a) = A'(a) = \ldots = A^{(k-1)}(a) = 0 \quad \textit{et} \quad A^{(k)}(a) \neq 0.$$

On admettra ce théorème. L'exemple suivant donne une idée de la démonstration :

Exercice 4.14. Supposons que 0 est un zero de P de multiplicité 2.

1. En dérivant $P(X) = X^2 Q(X)$, montrer que $P'(0) = 0$.
2. En dérivant à nouveau, montrer que $P''(0) \neq 0$.

Supposons maintenant que P est un polynôme de degrée au moins 2.

1. Montrer qu'on peut écrire $P = X^2 Q + R$ où R est de la forme $R = aX + b$.
2. Montrer que si P vérifie $P(0) = P'(0) = 0$ alors $R = 0$ et donc 0 est un zero d'ordre au moins 2.

Exemple 4.15.

1. Déterminer l'ordre de la racine 1 de $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.
2. Déterminer toutes les racines de P.

Solution. $P(1) = 0$; $P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2$; $P'(1) = 0$;
$P''(X) = 12X^2 - 12X$; $P''(1) = 0$; $P^{(3)}(X) = 24X - 12$; $P^{(3)}(1) \neq 0$;
1 est donc racine d'ordre 3 ; Une division euclidienne de P par $B = (X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ donne $P = B(X+1)$;
Conclusion : $P = (X-1)^3(X+1)$.

Exemple 4.16. Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que :
$P(1) = P'(1) = 0$, $P(2) = 0$ et $P(0) = 2$.

Solution. P admet 1 comme racine double et 2 comme racine simple, donc $P(X) = (X-1)^2(X-2)Q(X)$. Le degrée de P est 3, donc le degrée de Q est 0. Q est donc constant et on a $P(X) = \lambda(X-1)^2(X-2)$. On a de plus $P(0) = 2 = -2\lambda$. On en déduit que $P(X) = (X-1)^2(2-X)$.

Remarque. Cette méthode est plus rapide que la méthode d'identification qui consiste à poser $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ et à traduire les quatre conditions imposées, on se ramène alors à la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues.

Factorisation

Définition 4.17. Un polynôme non constant P est dit *irréductible* sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de la forme λP ($\lambda \in \mathbb{K}$).

Cela signifie que P n'est « pas factorisable ».

Exemple 4.18. Soit $P(X) = X^2 + pX + q$ un polynôme réel tel que $p^2 - 4q < 0$. Alors P est irréductible.

Solution. Observons d'abord que le discriminant de P est $p^2 - 4q$. Comme il est négatif, P n'admet pas de racine réelle. Si P admet un diviseur Q dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a :
- soit $\deg(Q) = 0$, et Q est une constante
- soit $\deg(Q) = 2$. Dans ce cas, le quotient de P par Q est de degrée 0, donc une constante. On déduit que Q est de la forme λP
- soit $\deg(Q) = 1$, et Q est de la forme $\lambda(X-a)$, avec λ et $a \in \mathbb{R}$, mais alors a serait racine de P. C'est impossible.

Notons que P n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}[X]$. On a on a $P(X) = (X-\omega)(X+\bar{\omega})$, où ω est une racine (non réelle) de P.

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$

Théorème 4.19 (de D'Alembert)**.** *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.*

Corollaire 4.20. *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d admet exactement d racines (comptées avec leurs multiplicités).*
P a une unique factorisation (à l'ordre près des facteurs) de la forme

$$P(X) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{k_r},$$

où les $a_1, \dots, a_r$ sont les racines (complexes) distinctes de P de multiplicitées respectives $k_1, \dots, k_r$ (avec $k_1 + \dots + k_r = d$).

Notation 4.21. Le corollaire dit que tout polynôme P est factorisable en un produit de facteurs du premier degré. On dit que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est *scindé* et que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos.*

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$

La factorisation dans $\mathbb{C}$ d'un polynôme réel nous permet de trouver une factorisation dans $\mathbb{R}$. L'outil clef est :

Proposition 4.22. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

1. $\overline{P(\omega)} = P(\bar{\omega})$.
2. *ω est racine de P si et seulement si $\bar{\omega}$ l'est aussi.*
3. *$(X - \omega)(X - \bar{\omega})$ est un polynôme* réel. *Son discriminant est négatif.*

Preuve. 1. Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\overline{P(\omega)} = \overline{a_n \omega^n + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{a_n}\, \overline{\omega}^n + \dots + \overline{a_1}\, \overline{\alpha} + \overline{a_0} = a_n \overline{\alpha}^n + \dots + a_1 \overline{\alpha_1} + a_0 = P(\bar{\alpha}).$$

2. $P(\omega) = 0 \iff \overline{P(\omega)} = 0 \iff P(\bar{\omega}) = 0$.
3. Soit $\omega = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. $(X - \omega)(X - \bar{\omega}) = X^2 - sX + p$, où $s = \omega + \overline{\omega} = 2x \in \mathbb{R}$ et $p = \omega\overline{\omega} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. En plus, $s^2 - 4p = -4y^2 < 0$. □

Soit alors P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant. On sait que P admet une racine ω. Si ω est réelle alors $x - \omega$ est un facteur (réel) de P. Si ω n'est pas réel, alors $\bar{\omega}$ est aussi une racine, et donc le polynôme réel $(X - \omega)(X - \bar{\omega})$ est un facteur de P (et son discriminant est négatif).
Dans les deux cas, on divise P par le facteur (de degrée 1 ou 2) et si le quotient Q n'est pas constant (donc $\deg(Q) \geq 1$) on applique la même procédure sur Q.
On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.23.
1. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont soit de la forme : $\lambda(X - \omega)$ ($\lambda, \omega \in \mathbb{R}$), soit de la forme $X^2 - sX + p$ avec $s^2 - 4p < 0$ ($s, p \in \mathbb{R}$).*
2. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se décomposer en produit de tels facteurs irréductibles.*

Exemple 4.24. Décomposer le polynôme $P = X^6 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Solution. On effectue d'abord la décomposition dans $\mathbb{C}$: Notons que $X^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$. Les racines de $x^3 - 1$ sont les racines troisièmes de l'unité, donc $1, j, j^2 = \bar{j}$. Comme P est pair, $-1, -j, -\bar{j}$ sont aussi des racines, donc $P = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j})(X + 1)(X + j)(X + \bar{j}^2)$. (Notons qu'on vient de trouver les racines 6-ièmes de l'unité.)
En regroupant les facteurs conjugués on obtient $P = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

Exemple 4.25. Factoriser $P = X^8 - 1$.

Solution.

$$X^8 - 1 = (X^4 - 1)(X^4 + 1) = (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)(X^4 + 1)$$

Les solutions de $X^4+1=0$ sont les racines quatrièmes de $-1=e^{i\pi}$. Une racine quatrième est

$$\omega_0 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

donc les racines quatrièmes de -1 sont

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \omega_1 = i\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad \omega_2 = -\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \quad \omega_3 = -i\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Notons que $\omega_2 = \overline{\omega_1}$ et $\omega_3 = \overline{\omega_0}$.
On a

$$(X-\omega_0)(X-\omega_3) = X^2 - \sqrt{2}X + 1, \quad \text{et} \quad (X-\omega_1)(X-\omega_2) = X^2 + \sqrt{2}X + 1.$$

Conclusion : $X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)\cdot(X^2+\sqrt{2}X+1)$ et donc

$$X^8 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).$$

Variante pour décomposer X^4+1 : Le polynôme $P(X) = X^4+1$ n'a pas de racine réelle, donc aucun facteur de degré 1. P se décompose donc en facteurs irréductibles de degrés 2. Posons

$$X^4 + 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d).$$

$$\begin{aligned}
&a + c = 0 && \Rightarrow c = -a && && \text{(i)}\\
&d + b + ac = 0 && \Rightarrow d + b = c^2 && && \text{(ii)}\\
&ad + bc = 0 && \Rightarrow a(d-b) = 0 && \Rightarrow d = b && \text{(iii)}\\
&bd = 1 && && && \text{(iv)}
\end{aligned}$$

Pour (iii) on a utilisé que $a \neq 0$. Sinon on aurait $c = 0$ et $b = d = 0$.
(ii) et (iii) donnent $2b = c^2$ (v)
(iii) et (iv) donnent $b^2 = 1$. (v) implique que $b \geq 0$, donc $b = 1$.

4.2 Fractions rationnelles

Définition d'une fraction rationnelle

Définition 4.26.

1. On appelle *fraction rationnelle à une indéterminée* tout couple (P, Q) de $K[X] \times K[X]^*$. On la note $\dfrac{P}{Q}$.
2. Si $PS = QR$, on identifie les deux fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{R}{S}$.
3. On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est une *fraction irréductible* si P et Q n'ont aucune racine complexe commune.

Une fraction a toujours une représentation en fraction irréductible, unique à multiplication par un nombre près.

Définition 4.27. Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction écrite sous forme irréductible. On appelle *pôle* de R toute racine de Q. a est un *pôle d'ordre* n de R si a est une racine de multiplicité n de Q ; si $n = 1$, on dit que a est un *pôle simple* de R.

Exemple 4.28. Soit $R(X) = \dfrac{X^2 - 3X + 2}{X^4 - 1}$. R n'est pas sous forme irréductible, car on a :

$$R(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{X-2}{(X+1)(X-i)(X+i)}.$$

Les pôles de R sont donc -1, i et $-i$ (ils sont tous simples).

Partie entière d'une fraction rationnelle

Quitte a diviser numérateur et dénominateur d'une fraction rationnelle par le terme en commun, on va supposer qu'une fraction rationnelle est sous forme irréductible.

Proposition 4.29. *Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction écrite sous forme irréductible. Il existe un unique polynôme E (appelé* partie entière *de la fraction R) et un unique polynôme P_1 tels que*

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}, \qquad \textit{et} \quad \deg(P_1) < \deg(Q).$$

Preuve. Cette écriture est équivalente à $P = QE + P_1$ et donc E et P_1 sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par Q.

□

Exemple 4.30. La division euclidienne de $P(X) = 2X^4+3X^3-X+1$ par $Q(X) = X^2-3X+1$ s'écrit :

$$2X^4 + 3X^3 - X + 1 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 9X + 25) + 65X - 24,$$

on a donc :

$$\frac{2X^4 + 3X^3 - X + 1}{X^2 - 3X + 1} = 2X^2 + 9X + 25 + \frac{65X - 24}{X^2 - 3X + 1}.$$

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Notation 4.31.

1. On dit qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{A}{(X-a)^n}, \qquad a, A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

est un *élément simple de la première espèce.*

2. Soit X^2+pX+q un polynôme réel sans racine réelle, donc $p^2-4q < 0$. Alors on dit qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{CX + D}{(X^2 + pX + q)^n}, \qquad C, D \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

est un *élément simple de la deuxième espèce.*

Le but est de montrer que chaque fraction rationnelle irréductible peut être écrit comme somme d'éléments simples.

On suppose donc maintenant que $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle irréductible telle que $\deg P < \deg Q$.

Cas : Q admet une racine réelle de degrée m.

Théorème 4.32. *Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle réelle irréductible telle que* $\deg P < \deg Q$. *Supposons que a est une racine réelle de Q de degrée m : $Q(X) = (X-a)^m Q_1(X)$. Alors il existent des nombres réels $A_1, \dots, A_m$ tels que*

$$R(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^m Q_1(X)} = \frac{A_1}{X-a} + \frac{A_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(X-a)^m} + \frac{P_1}{Q_1(X)},$$

avec P_1 un polynôme qui vérifie $\deg P_1 < \deg Q_1$.

Remarque. Si Q possède une autre racine $b \neq a$, alors b est racine de Q_1 et on peut utiliser le théorème précédent pour la fraction rationnelle $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$. On procède de la même manière avec toutes les racines réelles de Q.

Cas : Q admet une racine complexe (non réelle) α de degrée n.

On a vu que dans ce cas, $\overline{\alpha}$ est aussi racine (de degrée n) de Q et que $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ est un polynome réelle de la forme X^2+pX+q avec $p^2-4q<0$. Donc $(X^2+pX+q)^n$ divise Q.

Théorème 4.33. *Soit $R=\dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle réelle irréductible telle que $\deg P<\deg Q$. Supposons que le polynome $(X^2+pX+q)^n$ vérife $p^2-4q<0$ et divise Q (n étant maximal) : Donc $Q(X)=(X^2+pX+q)^nQ_1(X)$. Alors il existent des nombres réels $C_1,\dots,C_n$ et $D_1,\dots,D_n$ tels que*

$$\begin{aligned}R(X)=&\frac{P(X)}{(X^2+pX+q)^nQ_1(X)}\\=&\frac{C_1X+D_1}{X^2+pX+q}+\frac{C_2X+D_2}{(X^2+pX+q)^2}+\cdots+\frac{C_nX+D_n}{(X^2+pX+q)^n}+\frac{P_1(X)}{Q_1(X)},\end{aligned}$$

avec P_1 un polynôme qui vérifie $\deg P_1<\deg Q_1$.

Remarque. On procède de la même manière avec toutes les (couples) de racines complexes de Q.

Les théorèmes 4.32 et 4.33 affirment donc que

Corollaire 4.34. *Chaque fraction rationnelle réelle irréductible $R=\dfrac{P}{Q}$ telle que $\deg P<\deg Q$ peut être déecomposée comme somme d'éléments simples (d'une faoņ unique).*

Pour savoir quelle est la forme de la décomposition, il est mieux d'utiliser les théorèmes 4.32 et 4.33, plutôt que d'utiliser une formule générale. Pour être complèt, on donne quand même la formule générale dans le théorèm suivant :

Théorème 4.35. *Soit $R=\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle réelle irreductible. Supposons que la décomposition de Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme*

$$Q(X)=c(X-a_1)^{m_1}\,\dots\,(X-a_k)^{m_k}\cdot(X^2+p_1X+q_1)^{n_1}\,\dots\,(X^2+p_sX+q_s)^{n_s},$$

où $c\in\mathbb{R}$, $a_1,\dots,a_k$ Alors R peut être décomposée en éléments simples :

$$\begin{aligned}\frac{P(X)}{Q(X)}=E(X)&+\frac{A_1^1}{X-a_1}+\frac{A_2^1}{(X-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{m_1}^1}{(X-a_1)^{m_1}}+\\&+\frac{A_1^2}{X-a_2}+\frac{A_2^2}{(X-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{m_2}^2}{(X-a_2)^{m_2}}+\\&\vdots\\&+\frac{A_1^k}{X-a_k}+\frac{A_2^k}{(X-a_k)^2}+\cdots+\frac{A_{m_k}^k}{(X-a_k)^{m_k}}+\\&+\frac{C_1^1X+D_1^1}{X^2+p_1X+q_1}+\frac{C_2^1X+D_2^1}{(X^2+p_1X+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{n_1}^1X+D_{n_1}^1}{(X^2+p_1X+q_1)^{n_1}}+\\&+\frac{C_1^2X+D_1^2}{X^2+p_2X+q_2}+\frac{C_2^2X+D_2^2}{(X^2+p_2X+q_2)^2}+\cdots+\frac{C_{n_2}^2X+D_{n_2}^2}{(X^2+p_2X+q_2)^{n_2}}+\\&\vdots\\&+\frac{C_1^sX+D_1^s}{X^2+p_sX+q_s}+\frac{C_2^sX+D_2^s}{(X^2+p_sX+q_s)^2}+\cdots+\frac{C_{n_s}^sX+D_{n_s}^s}{(X^2+p_sX+q_s)^{n_s}}\end{aligned}$$

ou E est la partie entière de la fraction rationnelle.
(Tous les constants dans la formule sont des nombres complexes ou réels.)

L'écriture précédente se nomme *décomposition en éléments simples* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Etapes à suivre pour la décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.

1. Si F n'est pas irreductible, diviser P et Q par le facteur en commun.
2. Si $\deg P$ n'est pas *strictement* plus petit que $\deg Q$, faire une division euclidienne : $P = E + \dfrac{P_1}{Q}$, et continuer les étapes suivantes avec $\dfrac{P_1}{Q}$.
3. Factoriser le dénominateur pour déterminer ses racines et leurs multiplicités.
4. Déterminer la « décomposition théorique » en éléments simples (en utilisant les théorèmes 4.32 et 4.33, ou alors le théorème 4.35).
5. Déterminer les coefficients de la forme théorique.

Exemples de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Avant de s'occuper du problène de déterminer les constantes dans la décomposition en éléments simples, on donne quelques exemples de la « forme théorique » :

Exemple 4.36.

$$\frac{5X^2+4X+3}{X(X-1)(X+3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+3}$$

Le numérateur de la fraction rationnelle n'intervient pas dans la décomposition théorique. Il faut juste s'assurer que son degré est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Exemple 4.37.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)(X-2)^3(X-1)^2} = \frac{a}{X+1} &+ \\ &+ \frac{b_1}{X-2} + \frac{b_2}{(X-2)^2} + \frac{b_3}{(X-3)^3} + \\ &+ \frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{(X-1)^2}\end{aligned}$$

Exemple 4.38.

$$\frac{3X^4+7X^3+11X^2}{(X^2+X+1)^3} = \frac{A_1X+B_1}{X^2+X+1} + \frac{A_2X+B_2}{(X^2+X+1)^2} + \frac{A_3X+B_3}{(X^2+X+1)^3}$$

Exemple 4.39.

$$\frac{X^2-1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Exemple 4.40.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)^2(X^2+1)^3} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{(X+1)^2} &+ \\ &+ \frac{b_1X+c_1}{X^2+1} + \frac{b_2X+c_2}{(X^2+1)^2} + \frac{b_2X+c_2}{(X^2+1)^3}\end{aligned}$$

On va maintenant voir comment déterminer les coefficients de la forme théorique.

Exemple 4.41. On a déjà vu que

$$\frac{5X^2+4X+3}{X(X-1)(X+3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+3}. \tag{*}$$

- Pour déterminer a on multiplie (*) par X :

$$\frac{5X^2+4X+3}{(X-1)(X+3)} = a + \frac{b}{X-1}X + \frac{c}{X+3}X,$$

et on pose $X=0$. On trouve $a=-1$.
- Pour déterminer b on multiplie (*) par $X-1$:

$$\frac{5X^2+4X+3}{X(X+3)} = \frac{a}{X}(X-1) + b + \frac{c}{X+3}(X-1),$$

et on pose $X=1$. On trouve $b=3$.
- Pour déterminer c on multiplie (*) par $X+3$:

$$\frac{5X^2+4X+3}{X(X-1)} = \frac{a}{X}(X+3) + \frac{b}{X-3}(X+3) + c,$$

et on pose $X=-3$. On trouve $c=3$.
- Conclusion :

$$\frac{5X^2+4X+3}{X(X-1)(X+3)} = -\frac{1}{X} + \frac{3}{X-1} + \frac{3}{X+3}.$$

Exemple 4.42.

$$F(X) = \frac{4}{(X^2-1)^2}.$$

- La décomposition en facteurs irréductible de $(X^2-1)^2$ est

$$(X^2-1)^2 = ((X+1)(X-1))^2 = (X+1)^2(X-1)^2.$$

La décomposition théorique de F est donc

$$\frac{4}{(X+1)^2(X-1)^2} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2}. \qquad (*)$$

En multipliant (*) par $(X+1)^2$ on obtient

$$\frac{4}{(X-1)^2} = a_1(X+1) + a_2 + \frac{b_1}{X-1}(X+1) + \frac{b_2}{(X-1)^2}(X+1).$$

En posant $X=-1$ on obtient $a_2=1$.
- Pour déterminer a_1 on pourrait avoir envie de multiplier (*) par $X+1$ et de poser $X=-1$, mais ceci ne donne rien (essayez !). La méthode générale est de passer $\frac{1}{(X+1)^2}$ dans le côté gauche de (*) et de simplifier :

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2} = -\frac{X^2-2X-3}{(X+1)^2(X-1)^2} = -\frac{(X+1)(X-3)}{(X+1)^2(X-1)^2} = -\frac{X-3}{(X+1)(X-1)^2}.$$

On a donc

$$-\frac{X-3}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2}. \qquad (**)$$

En multipliant (**) par $X+1$ en en posant $X=-1$ on obtient $a_1=1$.
- La même méthode marche pour b_2 et b_1 : En multipliant (**) par $(X-1)^2$ en en posant $X=1$ on obtient $b_2=-1$. On passe alors $\frac{1}{(X-1)^2}$ dans le côté gauche de (*) et on simplifie. Après simplification, on multiplie par $X-1$ et on pose $X=1$. On trouve $b_1=-1$.
- Si on avait gardé notre calme avant de nous lancer dans les calculs de b_1 et b_2 on aurait pu observer que la fraction rationnelle de (*) est paire. On a donc $b_1=-a_1$ et $b_2=a_2$.

– Conclusion
$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Exemple 4.43.
$$R(X) = \frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2}.$$

– La décomposition théorique de R est
$$\frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

– En multipliant R par $(X^2+1)^2$ et en faisant $X=i$, on obtient $e=1$ et $f=0$.
– En multipliant R par X et en faisant $X=0$, on obtient $a=-1$.
– En multipliant R par $X-1$ et en faisant $X=1$, on obtient $b=1/2$.
– Cette méthode ne marche pas pour c et d (pourquoi ?). La méthode générale est de passer $\dfrac{X}{(X^2+1)^2}$ dans le membre de gauche et de simplifier :
$$\frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} - \frac{X}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X(X-1)(X^2+1)},$$
donc
$$\frac{1}{X(X-1)(X^2+1)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$
En multipliant par X^2+1 et en faisant $X=i$, on obtient $c=1/2$ et $f=-1/2$.
Une autre méthode pour déterminer c et d est de multiplier par X et de faire tendre X vers $+\infty$: on trouve $c=1/2$. En posant $X=-1$ (par exemple) on trouve $d=-1/2$.
– Conclusion :
$$\frac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{X-1}{2(X^2+1)} + \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$

Exemple 4.44.
$$F(X) = \frac{2X^7+X^6-X^3+3}{(X^2+X+1)^3}.$$

Pour cette exemple on utilise une autre méthode :
– On effectue la division euclidienne de $2X^7+X^6-X^3+3$ par X^2+X+1 :
$$2X^7+X^6-X^3+3 = (X^2+X+1)(2X^5-X^4-X^3+2X)+2X+3,$$
donc
$$\frac{2X^7+X^6-X^3+3}{(X^2+X+1)^3} = \frac{2X^5-X^4-X^3+2X}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2X+3}{(X^2+X+1)^3}.$$
– De même,
$$2X^5-X^4-X^3+2X = (X^2+X+1)(2X^3-3X^2+5)-7X-5,$$
donc
$$\frac{2X^5-X^4-X^3+2X}{(X^2+X+1)^2} = \frac{2X^3-3X^2+5}{X^2+X+1} + \frac{-7X-5}{(X^2+X+1)^2}.$$
– Pour finire,
$$2X^3-3X^2+5 = (X^2+X+1)(2X-5)+3X+10,$$
donc
$$\frac{2X^3-3X^2+5}{X^2+X+1} = 2X-5+\frac{3X+10}{X^2+X+1}.$$
– Conclusion
$$F(X) = \frac{2X^7+X^6-X^3+3}{(X^2+X+1)^3} = 2X-5+\frac{3X+10}{X^2+X+1} + \frac{-7X-5}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2X+3}{(X^2+X+1)^3}.$$

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

On suppose que $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle complexe irréductible telle que $\deg P < \deg Q$.

Q possède toujours une racine complexe (ou réelle) a. (On dit « complexe ou réelle », mais vu que les réels peuvent être vus comme un sous-ensemble des complexes on pourrait simplement dire « complexe ».) Le théorème 4.32 est valable sans changement dans le cas complexe :

Théorème 4.45. *On suppose que $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle (complexe ou réelle) irréductible telle que $\deg P < \deg Q$. Supposons que a est une racine (complexe ou réelle) de Q de degrée m : $Q(X) = (X-a)^m Q_1(X)$. Alors il existent des nombres (complexes ou réelles) $A_1, \dots, A_m$ tels que*

$$R(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^m Q_1(X)} = \frac{A_1}{X-a} + \frac{A_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(X-a)^m} + \frac{P_1(X)}{Q_1(X)},$$

avec $\deg P_1 < \deg Q_1$.

Théorème 4.46. *On suppose que $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle irreductible telle que $\deg P < \deg Q$. La décomposition de Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$ est de la forme*

$$Q(X) = c(X-a_1)^{m_1} \ \dots \ (X-a_k)^{m_k}.$$

Alors R peut être décomposée en éléments simples :

$$\begin{aligned}\frac{P(X)}{Q(X)} = E &+ \frac{A_1^1}{X-a_1} + \frac{A_2^1}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}^1}{(X-a_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{A_1^2}{X-a_2} + \frac{A_2^2}{(X-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{m_2}^2}{(X-a_2)^{m_2}} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{A_1^k}{X-a_k} + \frac{A_2^k}{(X-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{m_k}^k}{(X-a_k)^{m_k}}\end{aligned}$$

ou E est la partie entière de la fraction rationnelle.
(Tous les constants dans la formule sont des nombres réels.)

L'écriture précédente se nomme *décomposition en éléments simples* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemples de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

Exemple 4.47.

$$F(X) = \frac{X^4+1}{X^3-1}.$$

– Une division euclidienne donne
$$F(X) = X + \frac{X+1}{X^3-1}.$$
La décomposition en facteurs irréductibles de X^3-1 est $X^3-1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$.

– La forme théorique de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X+1}{X^3-1}$ est donc

$$\frac{X+1}{(X-1)(X-j)(X-j^2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}. \qquad (*)$$

– On multiplie (*) par $(X-1)$ et en posant $X=1$ on obtient $a = \dfrac{2}{3}$.

- On multiplie (*) par $(X-j)$ et en posant $X=j$ on obtient $b=-\dfrac{1}{3}$.
- On multiplie (*) par $(X-j^2)$ et en posant $X=j^2$ on obtient $c=-\dfrac{1}{3}$.
- On aurait pu déterminer c sans calcul : Pour cela, prenant X réel dans (*) et prenant le conjugué de (*). En notant qu'on a $\overline{j}=j^2$ et $\overline{j^2}=j$ on voit que $b=\bar{c}$ et $c=\bar{b}$. Donc $c=b=-\dfrac{1}{3}$.
- Conclusion :
$$\frac{X^4+1}{X^3-1}=X+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{X-1}-\frac{1}{X-j}-\frac{1}{X-j^2}\right).$$

Récapitulatif des méthodes utilisées

Pour décomposer sur $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle irréductible, de partie entière nulle, on peut :

1. Si a est un pôle d'ordre k de la fraction, multiplier par $(X-a)^k$ et remplacer X par a.
2. Multiplier par (X^2+pX+q) et remplacer X par une racine complexe du trinôme (X^2+pX+q).
3. Des considérations de parité donnent des relations entre certains coefficients.
4. Faire passer certains termes connus dans l'autre membre et réduire.
5. Méthode des divisions euclidiennes successives.
6. Remplacer X par un réel ou un complexe fixé.
7. Faire tendre X vers l'infini (limite), après avoir éventuellement multiplié par un facteur approprié.

L'emploi des méthodes suivantes est également possible, mais fortement déconseillé :

1. Faire la décomposition sur $\mathbb{C}$ et regrouper les termes conjugués.
2. Méthode des coefficients indéterminés (pôles compliqués) : il est toujours possible d'identifier les coefficients de la décomposition théorique en réduisant au même dénominateur...

5 Calcul de primitives

5.1 Notion de primitive

Définition 5.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est une fonction dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème 5.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Alors f admet une primitive sur I.*
2. *Si F est une primitive de f alors l'ensemble des primitives est*

$$\{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

Notation 5.3 (et avertissement)**.** On utilisera la notation usuelle $\int f(x)\,dx$ pour désigner l'ensemble des primitive de la fonction $f(x)$. Par abus de notation, on dénote aussi l'ensemble $\{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ des primitives par $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$
$\cos \omega x$	$\dfrac{1}{\omega}\sin \omega x$
$\sin \omega x$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos \omega x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan \dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$a^x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$

On a aussi

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|, \quad \text{pour } x>1$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\dfrac{x}{2}\right\|$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$

Définition 5.4. Soient a et b deux réels d'un invervalle I, et f une fonction continue sur I. Soit F une primitive quelconque de f sur I. Alors :
l'integrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)dx$, est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

5.2 Linéarité

Proposition 5.5. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et α, β des nombres réels. Alors*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Exemple 5.6. $\int \sin 2x \cos 3x\,dx$.
On va utiliser $\sin a\, \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$:

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x\,dx &= \int \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5.3 Intégration par parties

Proposition 5.7. *Soient u et v des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Si $a, b \in I$ alors on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Remarque.
1. On rappelle que « être de classe $\mathcal{C}^1$ » veut dire « dérivable avec dérivée continue ». Donc si u est de classe $\mathcal{C}^1$ alors u' est continue, mais du fait que u est dérivable, uf est aussi continue. Donc u et u' admettent des primitives.
2. La formule du théorème vient simplement par intégration de $uv' = (uv)' - u'v$.
3. Pour l'utilisation de cette formule, il faut reconnaître dans la fonction à intégrer le morceau u et le morceau v'. Il faut qu'on connaisse une primitive v de v' et que $u'v$ est « plus simple » que uv'.

Exemple 5.8.

$$\int x \ln x \, dx$$

Solution. On va utiliser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 5.9.

$$\int e^x \sin 2x \, dx.$$

Solution. On va utiliser $u(x) = \sin 2x$ et $v'(x) = e^x$. (On pourrait aussi utiliser $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin 2x$.)

$$\int e^x \sin 2x \, dx = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x \, dx$$

On pourrait penser qu'on n'a rien gagné, mais si on pose $u(x) = \cos 2x$ et $v'(x) = e^x$ alors on obtient

$$\int e^x \sin 2x \, dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int e^x \sin 2x \, dx$$

d'où

$$\int e^x \sin 2x \, dx = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'on aura pu aussi commencer par $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin 2x$, mais dans ce cas on devrait continuer avec $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos 2x$.

Exemple 5.10.

$$\int e^x \cosh x \, dx$$

Solution. Ici la méthode de l'éxercice précédent ne marche pas :

$$\begin{aligned}\int e^x \cosh x \, dx &= e^x \cosh x - \int e^x \sinh x \, dx \\ &= e^x \cosh x - e^x \sinh x + \int e^x \cosh x \, dx \\ &= 1 + \int e^x \cosh x \, dx,\end{aligned}$$

d'où semble-t-il $0 = 1$. Expliquer ce paradoxe (se souvenir qu'une primitive n'est définie qu'à une constante près), et trouver une autre méthode pour calculer la primitive.

5.4 Changement de variables

Proposition 5.11. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J, et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J. Soit F est une primitive de f. Alors*

$$\int f(u(x))u'(x) \, dx = F(u(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx$$

Remarque. La formule vient par intégration de la formule de dérivation des fonctions composées :

$$(F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'.$$

Le changement de variables s'utilise de deux façons pour calculer des primitives.
Cas 1 : On veut $\int f(u(x))u'(x)\,dx$, et on connait $\int f(x)\,dx$. Par exemple :

Exemple 5.12.

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

Solution.

1. On voit que $2x+1$ est la dérivée de x^2+x+1. On pose $u(x) = x^2+x+1$ et $f(X) = 1/\sqrt{X}$. Une primitive de f est $F(X) = 2\sqrt{X}$. On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int \frac{u'(x)\,dx}{\sqrt{u(x)}} = \int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + c \\ &= 2\sqrt{u(x)} + c = 2\sqrt{x^2+x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Pour le calcul précédent il est utile d'écrire $du = u'(x)\,dx$. On ne sait pas donner de sens à cette égalité pour le moment, mais c'est bien consistant avec la notation de Leibniz $\frac{du}{dx} = u'(x)$.
On pose donc $u(x) = x^2+x+1$ et $du = (2x+1)dx$:

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{du(x)}{\sqrt{u(x)}} = 2\sqrt{u(x)} + c = 2\sqrt{x^2+x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On peut même écrire

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{x^2+x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Pour évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

on a deux possibilités. Soit on détermine une primitive $2\sqrt{x^2+x+1}$ et l'intégrale est alors

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} - 2.$$

Mais on peut aussi dire que $u(x) = x^2+x+1$ donne $u(0) = 1$ et $u(1) = 3$ et d'écrire

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int_{u=1}^{u=3} \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_{u=1}^{u=3} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Cas 2 : On veut $\int f(x)\,dx$. On choisit comme avant une fonction $u = u(x)$ mais on écrit plutôt x comme fonction de u : $x(u)$. Donc on utilise la fonction réciproque de u. Ceci n'est possible que si u est inversible.

Exemple 5.13.

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x}\,dx, \quad \text{avec } x \in]0,1[.$$

Solution. Il n'y a pas de changement de variables évident. Le terme $\sqrt{1-\sqrt{x}}$ est embêtant, donc on tente notre chance avec $u(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$. Ceci donne $u^2 = 1 - \sqrt{x}$ et $x = (1-u^2)^2$. La fonction $x(u) = (1-u^2)^2$ est bien une bijection décroissante de $]0,1[$ sur $]0,1[$, et $u(x)$ et $x(u)$ sont $\mathcal{C}^\infty$.
Donc on utilise le changement de variables $x = (1-u^2)^2$ ce qui nous donne $dx = -4(1-u^2)u$. On est amené à calculer

$$\int \frac{u}{(1-u^2)^2} \cdot (-4(1-u^2)u)\,du = \int \frac{-4u^2}{1-u^2}\,du$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{-4u^2}{1-u^2} = 4 - \frac{4}{1-u^2} = 4 + \frac{4}{(u-1)(u+1)} = 4 + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1}$$

d'où

$$\int \frac{-4u^2}{1-u^2}\,du = 4u + 2(\ln(u-1) - \ln(u+1)) + c = 4u + 2\ln\frac{u-1}{u+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conclusion

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x}\,dx = 4\sqrt{1-\sqrt{x}} - 2\ln\frac{1+\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$$

5.5 Primitives de fractions rationnelles

Les fractions rationnelles en x sont des fonctions dont on peut toujours calculer une primitive (en théorie du moins). L'outil fondamental est la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, qui permet d'écrire une fraction rationnelle comme somme

– d'un polynôme,
– d'éléments simples de première espèce

$$\frac{\lambda}{(x-a)^n},$$

– d'éléments simples de deuxième espèce

$$\frac{\lambda x + \mu}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \quad \text{avec } p^2 - 4q < 0.$$

Les primitives de polynômes sont faciles à calculer. De même pour les primitives d'éléments simples de première espèce :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\lambda}{(x-a)^n}\,dx &= \frac{\lambda}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad \text{si } n \neq 1,\\
\int \frac{\lambda}{(x-a)}\,dx &= \lambda \ln|x-a|.
\end{aligned}$$

Pour les éléments simples de deuxième espèce, on écrit d'abord

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}.$$

Or, $p^2 - 4q < 0$, donc $-\frac{p^2-4q}{4} > 0$. En notant $a = \frac{p}{2}$ et b la racine carrée positive de $-\frac{p^2-4q}{4}$ on voit que l'élément simple de deuxième espèce à la forme

$$\frac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}, \quad b > 0.$$

On écrit

$$\frac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n} = \frac{\lambda}{2}\frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n} + \frac{\mu+\lambda a}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}.$$

La primitive du premier terme se calcule facilement car $2(x-a)$ est la dérivée de $(x-a)^2+b^2$:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{n-1}}, \qquad \text{si } n \neq 1,$$

$$\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \ln\left((x-a)^2+b^2\right).$$

Pour la primitive du deuxième terme on écrit

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n} = \frac{1}{b^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right]^n} = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \frac{du}{(u^2+1)^n},$$

où on a utilisé le changement de variables $u = \dfrac{x-a}{b}$, $du = \dfrac{dx}{b}$. On est donc ammené à déterminer

$$I_n(u) = \int \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

On a $I_1(u) = \arctan u$, et $I_n(u)$ se calcule par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties : en prenant $U' = 1$ et $V = \dfrac{1}{(1+u^2)^n}$ on trouve

$$\begin{aligned} I_n(u) = \int \frac{du}{(1+u^2)^n} &= \frac{u}{(1+u^2)^n} + \int \frac{2nu^2}{(1+u^2)^{n+1}}\,du \\ &= \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+u^2)^n} - \frac{1}{(1+u^2)^{n+1}}\right) du = \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left((2n-1)I_n + \frac{u}{(1+u^2)^n}\right).$$

Ainsi, en théorie, on sait calculer la primitive de n'importe quelle fraction rationnelle en x, en suivant le chemin ci-dessus.

Avant de ce lancer sans réfléchir dans une décomposition en éléments simples, il vaut mieux voir s'il n'y a pas plus simple.

Exemple 5.14.

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$$

L'exemple risque d'être très pénible à calculer en décomposant en éléments simples. Par contre en posant $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, on se ramène à calculer

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3},$$

qui est beaucoup plus agréable. La forme théorique de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u+1)^3} + \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{D}{u+1}.$$

En multipliant par $u-1$ et en faisant $u=1$ on obtient $A = 1/8$. En multipliant par $(u+1)^3$ et en faisant $u=-1$ on obtient $B=-1/2$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $D = -1/8$. En faisant $u=0$ on trouve $C = -1/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3} &= \frac{1}{8}\ln|u-1| + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{8}\ln|u+1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{u+2}{4(u+1)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{x^2+2}{8(x^2+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5.6 Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Fonctions polynômiales en $\cos x$ et $\sin x$.

Exemple 5.15. 1. $\int \cos^3 x \sin^6 x dx$
2. $\int \cos^8 x \sin^5 x dx$
3. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

Pouvez-vous devinez une règle générale ?

Solution.

1. On pose $u = \sin x$, donc $du = \cos x dx$:
$$\int \cos^3 x \sin^6 x dx = \int \cos^2 x \sin^6 x \cos x dx = \int (1-u^2)u^6 du$$
$$= \int u^6 - u^8 du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + c = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + c$$
2. On pose $u = \cos x$, donc $du = -\sin x dx$:
$$\int \cos^8 x \sin^5 x dx = \int \cos^8 x \sin^4 x \sin x dx = -\int u^8 (1-u^2)^2 du$$
$$= -\int u^8 - 2u^{10} + u^{12} du = -\frac{\cos^9 x}{9} + 2\frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + c$$
3. Linéarisation :
$$\cos^2 x \sin^4 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \cdot \frac{e^{4x} - 4e^{2x} + 6 - 4e^{-2x} + e^{-4x}}{16}$$
$$= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{6x} + e^{-6x}}{2} - 2\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} - \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 2\right) = \frac{1}{16} + \frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{32}$$
Conclusion :
$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \frac{1}{16}x + \frac{\sin 6x}{192} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{64} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

La règle générale pour le calcul d'une primitive de :
$$\int \cos^n x \sin^m x dx, \qquad n, m \in \mathbb{N} :$$

1. Si n est impair, on fait le changement de variable $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$. En utilisant $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$ on obtient
$$\int \cos^{2p+1} x \sin^m x \, dx = \int (1-u^2)^p u^m du.$$
2. Si m est impair, on fait le changement de variable $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$. En utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$ on obtient
$$\int \cos^n x \sin^{2p+1} x \, dx = \int u^n (1-u^2)^p du.$$
3. Si m et n sont pairs, on linéarise l'expression.

Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.

Ce sont les fonctions construites à partir de $\cos x$ et $\sin x$ et des constantes en utilisant les "quatre opérations" $+$, $-$, $\times$, $/$. Autrement dit, ce sont les fractions rationnelles en deux variables $R(u, v)$ dans lesquelles on remplace u par $\cos x$ et v par $\sin x$.

1. Pour calculer $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ on peut toujours essayer $u = \cos(x)$ ou $u = \sin(x)$ ou $u = \tan(x)$ et espérér qu'un de ces changements de variables marche.
2. Il y a même une règle connu sous le nom de *règles de Bioche* qui est la suivante :
   - Si $f(-x) = -f(x)$, faire le changement de variable $u = \cos x$. On doit avoir cette propriété si on peut écrire $f(x)\, dx = g(\cos x) \times (-\sin x\, dx) = g(u)\, du$.
   - Si $f(\pi - x) = -f(x)$, faire le changement de variables $u = \sin x$. On doit avoir cette propriété si on peut écrire $f(x)\, dx = g(\sin x) \times \cos x\, dx = g(u)\, du$.
   - Si $f(\pi + x) = f(x)$, faire le changement de variables $u = \tan x$. On doit avoir cette propriété si on peut écrire $f(x)\, dx = g(\tan x) \times dx/\cos^2 x = g(u)\, du$.
3. il y a un changement de variable qui marche toujours : c'est pour $x \in]-\pi, \pi[$,

   $$t = \tan(\frac{x}{2}), \quad \text{soit} \quad x = 2 \arctan t.$$

   On a alors
   $$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt.$$
   et on est amené à calculer
   $$\int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2}\, dt,$$
   qui est la primitive d'une fraction rationnelle en t, pas très agréable en général.

Exemple 5.16.
$$f(x) = (1 + \sin x) \tan x, \qquad x \in] - \pi/2, \pi/2[.$$

Solution. C'est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$.
Méthode 1 : Comme $f(\pi - x) = -f(x)$, on pose $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$. Notons que

$$\int \frac{(1 + \sin x) \sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{(1 + \sin x) \sin x}{\cos^2 x} \cos x dx.$$

On a donc à calculer

$$\int \frac{u(1 + u)}{1 - u^2}\, du = \int \left(\frac{1}{1 - u} - 1\right) du = -u - \ln |1 - u|, \quad c \in \mathbb{R},$$

d'où

$$\int (1 + \sin x) \tan x\, dx = -\sin x - \ln(1 - \sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 : Avec $t = \tan(x/2)$, on aurait eu à calculer

$$\int \left(1 + \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2t}{1 - t^2} \frac{2\, dt}{1 + t^2} = \int \frac{4t(1 + t)}{(1 + t^2)^2 (1 - t)}\, dt.$$

La méthode 1 est beaucoup plus simple.

Fractions rationnelles en e^x, $\cosh x$, $\sinh x$.

Règle générale : on pose $u = e^x$.
On a alors

$$dx = \frac{du}{u}, \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \qquad \sinh x = \left(u - \frac{1}{u}\right).$$

On est alors ramené au calcul d'une primitive de fraction rationnelle en u.

Exemple 5.17.

$$\int e^x \cosh x \, dx$$

Solution.

$$e^x \tanh x = e^x \, \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} I = \int e^x \tanh x \, dx = \int \frac{u^2 - 1}{u + u^{-1}} \frac{du}{u} = \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du = \int 1 - \frac{2}{u^2 + 1} du \\ = u - 2 \arctan u + c = e^x - 2 \arctan e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6 Équations différentielles

6.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

La loi de refroidissement de Newton

Un corps de température T, placé dans un milieu à la température plus basse va subir un transfert de chaleur vers le milieu. Le modèle de Isaac Newton dit que le taux de refroidissement est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu. Notons par $T(t)$ la température du corps à l'instant t. Bien qu'en refroidissant, le corps va rechauffer le milieu, on suppose que le chauffement du milieu est négligeable, donc la température du milieu, notée M, est constante. Considerons un laps de temps Δt très court à un instant t_0 donnée. Le taux de refroidissement est donc

$$\frac{T(t_0 + \Delta t) - T(0)}{\Delta t}.$$

En prenant Δt de plus en plus petit, ce taux tend vers $T'(t_0)$. Le modèle de Newton dit qu'il est proportionnel à la différence de température entre du corps et du milieu : $T(t_0) - M$. Newton a donc modélisé cette situation par

$$T'(t) = -k(T(t) - M),$$

où k est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales. Notons que $T' < 0$ et $T(t) - M > 0$, donc $k > 0$. (On a choisi $-k$ dans la formule pour avoir une constante k positive.)

On va dire que la température T est une solution de l'équation

$$y' = -k(y - M),$$

ou k et M sont des constantes.

Définition d'une equation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 6.1. 1. Si a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert I, alors on dit qu'une *équation différentielle linéaire d'ordre* 1 est une équation de la forme

$$y' + a(x)y = b(x).$$

(On devrait écrire $y' + ay = b$, mais on veut insister sur le fait que a et b sont des fonctions.)

2. On dit que la fonction b est le *second membre* de l'équation différentielle. Si $b = 0$ alors on dit que l'équation $y' + a(x)y = 0$ est *homogène* ou encore *sans second membre*. Pour faire la distinction on va aussi dire que $y' + a(x)y = b(x)$ est l'équation *non-homogène* ou encore *avec second membre*.
3. On dit qu'une fonction f qui est continûment dérivable sur I est une *solution de* $y' + a(x)y = b(x)$ si f vérifie $f'(x) + a(x)y = b(x)$, pour tout $x \in I$.

Remarque. 1. On dit que l'équation est une équation différentielle car elle fait intervenir une fonction inconue y et ses dérivées.

2. Dire qu'elle est du premier ordre veut dire que cette équation ne fait intervenir que la fonction y et sa dérivée première y'.
3. La notion de linéarité va être expliqué plus loin.

Exemple 6.2. 1. $y' = -k(y - M)$ et $y' + y \sin x = 2 \sin x$ sont des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

2. $y'y = \sin(x)$ *n'est pas* une équation différentielle linéaire.

Proposition 6.3. *Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Soient S l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ et S_0 l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$.*

1. *Si y_1 et y_2 sont des solutions de $y' + a(x)y = 0$, alors pour tout c et d des nombres réels, $cy_1 + dy_2$ est aussi une solution de $y' + a(x)y = 0$:*

$$\text{pour tout } c, d \in \mathbb{R}, \qquad y_1, y_2 \in S_0 \implies cy_1 + dy_2 \in S_0$$

2. *Soit y_p une solution quelconque de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est*
$$S = \{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S\}$$

Notation 6.4. En utilisant la notation de la proposition 6.3 :

1. On dit que $cy_1 + dy_2$ est une *combinaison linéaire* de y_1 et y_2. Proposition 6.3 (1) dit que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène est encore une solution de cette équation. D'où la notion d'équation différentielle *linéaire*.
2. Plutôt que de parler de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle on parle de *la solution générale* de cette équation.
3. On dit souvent que y_p est une *solution particulière* de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$. Proposition 6.3 (2) dit que :

   La solution générale de l'équation non-homogène est la somme d'une solution particulière de l'équation non-homogène et de la solution générale de l'équation homogène.

Preuve. (Propositon 6.3) 1) Supposons que $y_1 \in S$ et $y_2 \in S$, donc $y_1' + a(x)y_1 = 0$ et $y_2' + a(x)y_2 = 0$. Alors
$$(cy_1 + dy_2)' + a(x)(cy_1 + dy_2) = c(y_1 + a(x)y_1) + d(y_2 + a(x)y_2) = 0.$$
Donc $cy_1 + dy_2 \in S$.
2) Soit y_p une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$ et S l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$.
On montre : $y_p + y_0$ est une solution de $y' + a(x)y = b(x)$ pour tout $y_0 \in S$.
On sait donc que $y_p' + a(x)y_p = b(x)$ et que $y_0' + a(x)y_0 = 0$. On a
$$(y_p + y_0)' + a(x)(y_p + y_0) = (y_p' + a(x)y_p) + (y_0' + a(x)y_0) = b(x),$$
donc $y_p + y_0$ est bien une solution de $y' + a(x)y = b(x)$.
On montre : toute solution de $y' + a(x)y = b(x)$ peut s'écrire comme $y_p + y_0$ avec $y_0 \in S$.
Soit donc y_q une solution arbitraire de $y' + a(x)y = b(x)$. Alors $y_q - y_p$ vérifie
$$(y_q - y_p)' + a(x)(y_q - y_p) = y_q' + a(x)y_q - [y_p' + a(x)y_p] = b(x) - b(x) = 0.$$
Donc $y_q - y_p \in S$. Il existe donc $y_0 \in S$ tel que $y_q - y_p = y_0$. On a donc bien $y_q = y_p + y_0$.
Conclusion : y_q est solution de l'équation non-homogène *si et seulement si* $y_q = y_p + y_0$. □

Ceci va guider notre démarche pour l'équation différentielle linéaire du premier ordre. On commence par chercher la solution générale de l'équation sans second membre, puis on voit comment trouver une solution de l'équation avec second membre.

La solution générale de l'équation sans second membre

Nous cherchons la solution générale de l'équation
$$y' + a(x)y = 0,$$
où a est une fonction réelle continue sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Si $y \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{y'}{y} = -a(x)$. En intégrant on trouve $\ln(|y|) = -\int a(x)\,dx + d$, $d \in \mathbb{R}$. Si on note par $A(x)$ une primitive de $a(x)$, alors on a
$$|y| = e^d\, e^{-A(x)} \implies y = \pm e^d\, e^{-A(x)}.$$
Or, $d \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, donc $\pm e^d$ est une constante non-négative arbitraire. Il est évident que la fonction $y = 0$ est toujours solution de $y' + a(x)y = 0$, donc on peut aussi prendre la constante 0 :
$$y = ce^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$
Ce calcul est délicat à justifier complètement (en particulier l'hypothèse $y \neq 0$), mais il nous donne tout de même la solution.

Théorème 6.5. *La solution générale de l'équation sans second membre $y' + a(x)y = 0$ est*

$$y = ce^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.
(Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ est $\{ce^{-A(x)} \ : \ c \in \mathbb{R}\}$.)

Preuve. Soit y une fonction continûment dérivable sur I. Puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule jamais sur I, on peut bien poser

$$y(x) = u(x)e^{-A(x)} \qquad \text{c'est à dire} \qquad u(x) = e^{A(x)}y(x).$$

Ceci définit une fonction u continûment dérivable sur I. On a

$$y' + a(x)y = u'e^{-A(x)} + u(-a(x)e^{-A(x)}) + a(x)ue^{-A(x)} = u'e^{-A(x)},$$

et donc y est solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ si et seulement si $u'e^{-A(x)} = 0$, c'est à dire si et seulement si u est une constante puisque $e^{-A(x)}$ ne s'annule pas sur I. Ceci montre le théorème. □

Remarque. Ceci nous donne la réponse, dans la mesure où l'on sait calculer une primitive de a.

Exemple 6.6.

$$y' + y\sin x = 0, \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Méthode 1 : Une primitive de $a(x) = \sin x$ est $A(x) = -\cos x$. Donc la solution générale de cette équation est

$$y_0 = ce^{-A(x)} = ce^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 : $y' + y\sin x = 0$ s'écrit sous la forme

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \cos x + d \quad \Longrightarrow \quad y = \pm e^d e^{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad y_0 = ce^{\cos x}$$

où $c \in \mathbb{R}$.
Remarquons qu'une solution ou bien est constamment nulle sur l'intervalle I, ou bien ne s'annule jamais sur I. Ceci justifie a posteriori le calcul qui consistait à exclure le cas $y = 0$ et à diviser par y.

Solution de l'équation non-homogène

On cherche la solution générale de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ ayant déjà trouvé la solution générale de l'équation homogène associé. On sait, d'après la discussion ci-dessus (Propositon 6.3 (2)) qu'il suffit de connaître une solution particulière de l'équation non-homogène.

Exemple 6.7.

$$y' + y\sin x = 2\sin x.$$

Solution.

1. Ici on a la chance de voir une solution sans calcul. Par exemple, $y_p = 2$ est une solution évidente.
2. On a déjà montré (voir exemple 6.6) que $y_0 = ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de l'équation homogène associé, donc la solution générale de $y' + y\sin x = 2\sin x$ est

$$y_p + y_0 = 2 + ce^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Il y a une méthode générale pour trouver une solution particulière, la méthode de *variation de la constante.* Elle consiste à remplacer la constante c dans la solution générale de l'équation homogène par une fonction $x \mapsto c(x)$ qu'on détermine ensuite.

Exemple 6.8. Voyons ce que cela donne pour l'exemple qu'on a déjà travaillé (voir l'exemple 6.7.)

$$y' + y\sin x = 2\sin x.$$

Solution. La solution de l'équation homogène est $y_0 = ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$ (voir l'exemple 6.6). On remplace c par une fonction inconnue $c(x)$ et on pose $y_p = c(x)e^{\cos x}$. Notons que $y_p' = c'(x)e^{\cos x} - c(x)\sin x e^{\cos x}$. Donc y_p est solution de l'équation non-homogène si et seulement si

$$2\sin x = y_p' + y_p \sin x = c'(x)e^{\cos x} - c(x)\sin x e^{\cos x} + c(x)e^{\cos x}\sin x = c'(x)e^{\cos x}.$$

On trouve donc

$$c'(x) = 2\sin x e^{-\cos x} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = 2\int \sin x e^{-\cos x}\, dx.$$

en utilisant le changement de variables $u(x) = -\cos x$, $du = \sin x\, dx$, on trouve

$$c(x) = 2\int e^u\, du = 2e^u = 2e^{-\cos x}.$$

(On ne cherche qu'une solution, donc il suffit de trouver une primitive.)
On retrouve donc $y_p = c(x)e^{\cos x} = 2e^{-\cos x}e^{\cos x} = 2$.
Le calcul de l'exercice marche en général :
On cherche une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$. La solution générale de l'équation homogène associée est $y_0 = ce^{-A(x)}$, où A est une primitive de a. Posons $y_p = c(x)e^{-A(x)}$, où $c(x)$ est une fonction différentiable à déterminer. Notons que $y_p' = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)}$, donc y_p est une solution de $y' + a(x)y = b(x)$ si et seulement si

$$b(x) = y_p' + y_p a(x) = c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + c(x)e^{-A(x)}a(x) = c'(x)e^{-A(x)}.$$

On a donc

$$c'(x) = b(x)e^{A(x)} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int b(x)e^{A(x)}\, dx$$

Récapitulons.

Théorème 6.9. *Soit a et b deux fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert I. Soient A une primitive de a, et B une primitive de be^A. Alors la solution générale de l'équation différentielle*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

est

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6.10.

$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]0,1[.$$

Méthode 1 : On utilise la méthode décrite précédemment (plutôt que d'utiliser la formule du théorème précédent).

1. *Solution générale de l'équation homogène $xy' - y = 0$.*

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + d \quad \Longrightarrow \quad y = \pm e^d x \quad \Longrightarrow \quad y = cx,$$

   $c \in \mathbb{R}$. (Comme d'habitude on utilise le fait que pour $c = 0$ on obtient aussi une solution.)

2. *Une solution particulière de l'équation non-homogène $xy' - y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.*

   On fait varier la constante en posant $y_p = c(x)x$. On a $y_p' = c'(x)x + c(x)$, donc y_p est une solution de l'équation non-homogène si et seulement si

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = xy_p' - y_p = c'(x)x^2 + c(x)x - c(x)x = c'(x)x^2.$$

   On trouve donc

$$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \arcsin x.$$

   $y_p = x \arcsin x$ est donc une solution particulière de l'équation non-homogène.

3. *Solution générale de l'équation non-homogène.*
   La solution générale de l'équation non-homogène est
$$y_p + y_0 = x \arcsin x + cx = x(\arcsin x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Méthode 2 : On utilise la formule du théorème précédent.

1. Il faut d'abord écrire
$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]0,1[.$$
   sous la forme
$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]0,1[,$$
   exigée par le théorème précédent pour voir qu'on a
$$a(x) = -\frac{1}{x}, \qquad \text{et} \quad b(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. Une primitive de $a(x)$ est $A(x) = -\ln|x| = -\ln x$, car $x > 0$.
3. Une primitive de $b(x)e^{A(x)}$ est
$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{-\ln x}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x,$$
   où on a utilisé
$$e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$
   Le théorème précédent affirme alors que la solution générale de l'équation différentielle est
$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c) = e^{\ln x}(\arcsin x + c) = x(\arcsin x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque. 1. On pourrait naivement penser que l'équation
$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
   est définie sur $]-1,1[$. Surtout car la fonction $x(\arcsin x + c)$ est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et on vérifie par un calcul qu'elle vérifie $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
2. Si on veut appliquer la théorie dévéloppé ci-dessus, il faut écrire l'équation différentielle sous la forme
$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$
   donc il faut bien exclure $x = 0$.
3. Aussi, en suivant la méthode 1 ou 2 on voit qu'il faut diviser par x et utiliser $\ln x$.
4. On va aborder cette question à nouveau dans la partie « interprétation géométrique ».

Solution vérifiant une condition initiale

Définition 6.11. La donnée d'une *condition initiale* pour l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle ouvert I est la donnée d'une relation $y(x_0) = y_0$, où x_0 est un point de I et y_0 est un réel :
$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Une fonction continûment dérivable sur I est une *solution* de cette équation différentielle avec condition initiale, si f est une solution de $y' + a(x)y = b(x)$ et vérifie en plus $f(x_0) = y_0$.

Théorème 6.12. *Il existe une et une seule solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

Preuve. On a vu que la solution générale s'écrit

$$y = e^{-A(x)}(B(x) + b),$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, $B(x)$ une primitive de $e^{A(x)}b(x)$, et c une constante réelle. La condition initiale permet de déterminer cette constante :

$$y_0 = e^{-A(x_0)}(B(x_0) + c), \quad \text{soit} \quad c = e^{A(x_0)}y_0 - B(x_0),$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale. □

Exemple 6.13.

$$\begin{cases} y' + y\sin x = 2\sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a vu (voir l'exemple 6.7) que la solution générale de l'équation sans condition initiale est $y = 2+ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$. La condition initiale donne $0 = y(0) = 2 + ce$, d'où $c = -2/e$ et $y = 2(1 - e^{\cos(x)-1})$.

Le problème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale (appelé problème de Cauchy) est un problème important de la théorie des équations différentielles.

Interprétation graphique

Exemple 6.14. $y' = y$. Il ne s'agit pas ici de trouver les solutions (qui sont $f(x) = ce^x$) mais de les construire géométriquement.

Une solution f vérifie $f'(x) = f(x)$. Donc le coefficient directeur de la droite tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$ est $f'(x) = f(x)$. Un vecteur directeur de la droite tangente est donc par exemple le vecteur $(1, f'(x)) = (1, f(x))$. Donc si le graphe passe par un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un vecteur directeur de la droite tangente en ce point est $(1, y)$. Dans la figure 36 on a tracé pour un réseau de points (x, y) du carrée $[-3, 3] \times [-3, 3]$ le vecteuer $(1, y)$ basé en ce point (x, y). On appelle cela un *champs de vecteurs.* (Le dessin montre des vecteurs normalisés de longueur 1.) La figure 36 montre 7 exemples de courbes qui, en tout point de la courbe, sont tangentes au vecteur du champs en ce point. Chacune de ses courbes est le graphe d'une solution de $y' = y$. On comprend donc pourquoi on n'a pas unicité de la solution d'une équation différentielle.

Se donner une condition initiale $y_0 = y(x_0)$ veut dire exiger que la courbe passe par le point (x_0, y_0). Par exemple, si on se donne la condition initiale $y(0) = -2$ alors on cherche une courbe qui passe par le point $(0, 2)$. (Si on resout léquation différentielle on trouve qu'il s'agit de la courbe représentative de la fonction $y = 2e^x$.

Les 7 courbes de la figure 36 correspondent aux conditions initiales $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y(0) = 0$, $y(0) = -\frac{1}{3}$, $y(0) = 1$, et $y(0) = -2$. On peut se convaincre géométriquement pourquoi une condition initiale rend la solution unique.

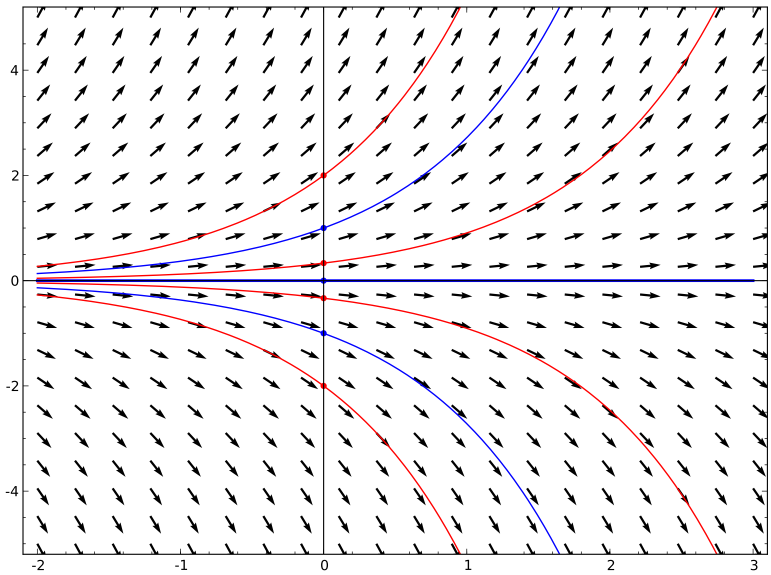


FIGURE 36 – Les solutions de $y' = y$ avec $y(0) = 2, 1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1, -2$

Exemple 6.15. $y' + y \sin x = 2 \sin x$. (Voir l'exercice 6.7.) On a procédé comme pour l'éxemple précédent en traçéant un champs de vecteurs dans le rectangle $[-2\pi, 2\pi] \times [-8, 8]$. Le vecteur qui est placé au point (x, y) est le vecteur $(1, -y \sin x + 2 \sin x)$.

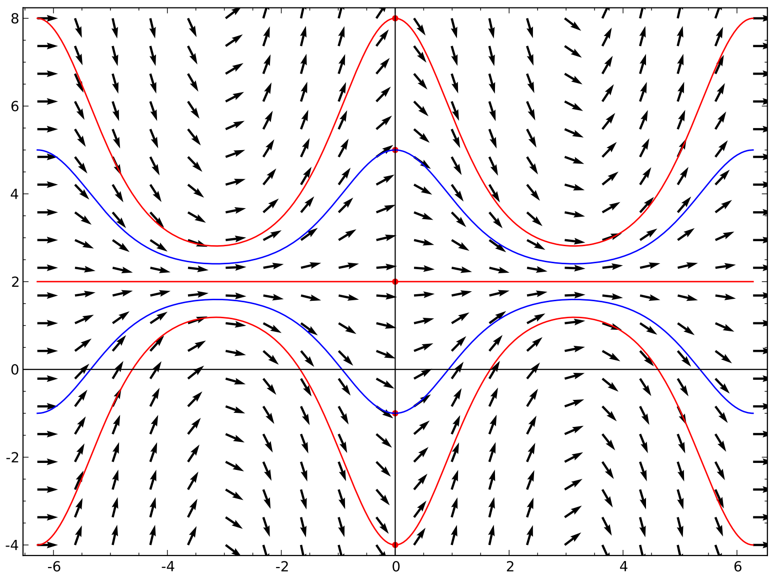


FIGURE 37 – Les solutions de $y' + y \sin x = 2 \sin x$ avec $y(0) = 8, 5, 2, -1, -4$

Exemple 6.16. $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. (Voir l'exercice 6.10.) Il est clair qu'il faut restreindre x à $]-1,1[$. Si on pose $x = 0$ alors on trouve $y = 0$ mais aucune condition sur y'. Pour $x \neq 0$ on a

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La figure 38 montre que si on s'approche de l'axe des ordonnées le longue d'une droite verticale alors les vecteurs du champ deviennent de plus en plus verticale (avec une direction limite différente si on s'approche de l'axe par la droite ou par la gauche). Le champs n'est donc pas définie sur l'axe des ordonnées. C'est la raison géométrique pour laquelle il faut exclure $x = 0$.

Un calcul confirme ce constat. Pour y fixé, si x tend vers $0+$ (resp. $0-$) on voit que

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$).

Les courbes de la figure 38 passent tous par 0. Ils semblent s'approcher de $(0,0)$ avec une direction limite et ressortir de $(0,0)$ avec la même direction.

Un calcul confirme ce constat : la solution générale de l'équation différentielle est $y = x(\arcsin x + c)$, $c \in \mathbb{R}$, donc $y' = \arcsin x + c + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tend vers c lorsque x tend vers 0.

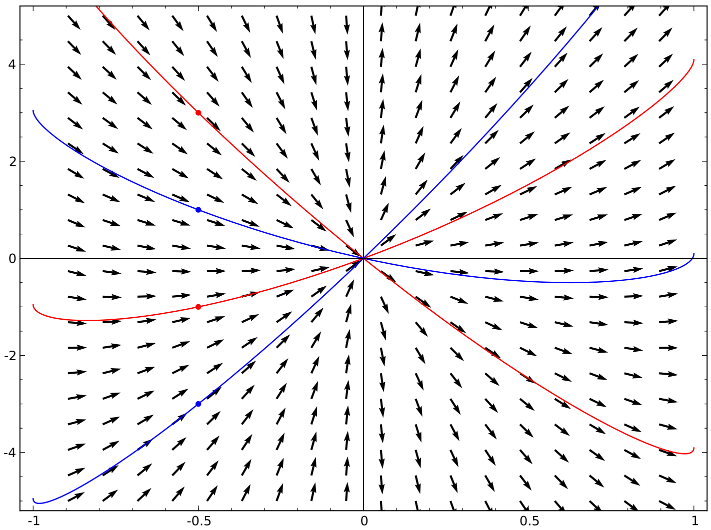


FIGURE 38 – Les solutions de $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $y(-0.5) = 3, 1, -1, -3$

6.2 Equations du premier ordre à variables séparées

On appelle équation différentielle à variables séparées une équation de la forme

$$f(y)y' = g(x), \tag{*}$$

où f est une fonction réelle continue dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle et continue sur un intervalle ouvert J.

Remarque. On peut écrire "$f(y)dy = g(x)dx$", ce qui explique leur nom.

Proposition 6.17. *Soit F une primitive de f dans I et G une primitive de g dans J. Pour qu'une fonction $x \longrightarrow y(x)$, définie et dérivable dans un sous-intervalle de J, vérifie l'équation (*), il faut et il suffit que*

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

où C est une constante réelle.

Preuve. Pour que la fonction dérivable $x \mapsto F(y(x)) - G(x)$ soit constante dans l'intervalle de définition de la fonction y, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle ; or cette dérivée vaut $f\big(y(t)\big)y'(t) - g(x)$; elle est donc nulle. $\square$

Remarque. Si on suppose de plus que, pour tout $y \in I$, $f(y) \neq 0$, on en dÕduit que F a une dÕrivÕe non nulle ; elle est donc bijective de I dans $F(I)$ et $y(x) = F^{-1}\big(G(x) + C\big)$.

Exemple 6.18.

1. Résoudre $yy' = \cos x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. On obtient en intégrant $\int y\,dy = \int \cos x\,dx + C$, soit $y^2 = 2\sin x + 2c$. La condition initiale impose $c = 1/2$. On a donc $y^2 = 2\sin x + 1$. On peut en tirer $y = \sqrt{1 + 2\sin x}$ sur $[-\pi/6, 7\pi/6]$.
2. Résoudre $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$. Pour $y \neq 0$, on écrit $y'/y^2 = 1$, ce qui donne en intégrant $-1/y = x + c$. La condition initiale impose $c = -2$, d'où une solution $y = 1/(2 - x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

6.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ressort

Définition d'une equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition 6.19.

1. Soient a, b, c des constantes réelles, avec $a \neq 0$, et f une fonction définie et continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Alors on dit qu'une *equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* est une équation de la forme
$$ay'' + by' + cy = g(x).$$
2. On a les mêmes notions de : *second membre*, *équation homogène* ou *sans second membre*, et *équation non-homogène* ou *avec second membre* que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.
3. On dit qu'une fonction f qui est deux fois continûment dérivable sur I est une *solution* de $ay'' + by' + cy = g(x)$ si f vérifie $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$, pour tout $x \in I$.
4. La donnée d'une *condition initiale* pour l'équation $ay'' + by' + cy = g(x)$ est la donnée de deux relations $y(x_0) = y_0$, et $y'(x_0) = y_1$, où x_0 est un point de I et y_0, y_1 sont deux réels :
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$
5. Une fonction f est une *solution* de l'équation différentielle avec condition initiale, si f est une solution de $ay'' + by' + cy = g(x)$ et vérifie en plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

La proposition 6.3 est encore valable :

Proposition 6.20. *Soit $ay'' + by' + cy = g(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

1. *Soit S l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (donc de $ay'' + by' + cy = 0$). Alors*
$$\text{pour tout } c, d \in \mathbb{R}, \qquad y_1, y_2 \in S \implies cy_1 + dy_2 \in S$$
2. *Soit y_p une solution quelconque de $ay'' + by' + cy = g(x)$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = g(x)$ est*
$$\{y_p + y_0 \ : \ y_0 \in S\}$$

Donc on a comme pour les équations du premier ordre :

> La solution générale de l'équation non-homogène est la somme d'une solution particulière de l'équation non-homogène et de la solution générale de l'équation homogène.

L'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

On recherche une solution de la forme $y = e^{rx}$, où r est une constante. En substituant dans l'équation, on trouve

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ s'appelle *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle. Trois cas sont à distinguer.

1. *Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2 $(b^2 - 4ac > 0)$. Alors $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ sont solutions de l'équation sans second membre. La solution générale de l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}$ est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes* $\lambda = \alpha + i\beta$ *et* $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ $(b^2 - 4ac < 0)$. Alors $e^{\lambda x}$ et $e^{\overline{\lambda} x}$ sont des fonctions *à valeurs complexes* de x, qui sont solutions de l'équation différentielle sans second membre. On a

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \\ e^{\overline{\lambda} x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) \end{aligned}$$

Nous sommes intéressés par les solutions réelles. La partie réelle $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et la partie imaginaire $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ de $e^{\lambda} x$ sont des solutions réelles de l'équation, et la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre est

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Le polynôme caractéristique a une racine réelle double* s $(b^2 - 4ac = 0)$. Cette racine vérifie aussi $P'(s) = 2as + b = 0$. Alors $y_1 = e^{sx}$ est solution de l'équation, et aussi $y_2 = xe^{sx}$. En effet

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = \big(a(2s + s^2 x) + b(1 + sx) + cx\big)\, e^{sx} = 0.$$

La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre est

$$y = e^{sx}(c_1 + c_2 x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Théorème 6.21. *Soit l'équation différentielle sans second membre*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{*}$$

où a, b *et* c *sont des réels et* $a \neq 0$. *Soit* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *le polynôme caractéristique associé.*

1. *Si* p *admet deux racines réelles distinctes* r *et* s, *alors la solution générale de (*) est*

$$y_0 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si* p *admet une racine réelle double* s *alors la solution générale de (*) est*

$$y_0 = e^{sx}(c_1 + c_2 x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si* P *admet deux racines complexes conjuguées* $r = \alpha + i\beta$ *et* $\overline{r} = \alpha - i\beta$, *alors la solution générale de (*) est*

$$y_0 = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous avons montré que ces fonctions étaient bien solutions de l'équation sans second membre ; nous admettrons que ce sont les seules.

L'équation avec second membre

Soit l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

On cherche une solution particulière y_p. Nous passons en revue quelques cas particuliers importants où l'on connait a priori la forme de y_p.

Cas 1 : Second membre de la forme $g(x) = e^{\lambda x}P(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme de degrée $n \geq 0$.

On cherche une solution de la forme

1. $y_p = e^{\lambda x}Q(x)$, ou $Q(x)$ est un polynôme avec $\deg Q = \deg P$, si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique $p(x) = ax^2 + bx + c$;
2. $y_p = xQ(x)$ avec $\deg Q = \deg P$, si λ est racine simple du polynôme caractéristique ;
3. $y_p = x^2Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P$, si λ est racine double du polynôme caractéristique.

On trouve les coefficients de Q par identification. Donnons deux exemples.

Exemple 6.22.

$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1.$$

1. Le polynôme caractéristique est $p(x) = x^2 + x + 1$. Les racines sont $r = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{r}$.
2. La solution générale de l'équation homogène associée est
$$y_0 = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Le second membre est $g(x) = x^2 + x + 1$, qui est de la forme $(ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$. $\lambda = 0$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p = ax^2 + bx + c$. En portant dans l'équation on trouve
$$ax^2 + (b + 2a)x + c + b + 2a = x^2 + x + 1.$$
L'identification des coefficients nous donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues, que l'on résout facilement en $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. On a donc comme solution particulière
$$y_p = x^2 - x.$$
4. La solution générale de $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$ est alors
$$y_p + y_0 = x^2 - x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6.23.

$$y'' - y' = e^x(x + 1).$$

1. Le polynôme caractéristique est $p(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ donc les racines sont $r = 0$ et $s = 1$.
2. La solution générale de l'équation homogène associée est
$$y_0 = c_1e^{0x} + c_2e^x = c_1 + c_2e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Le second membre est $g(x) = e^x(x + 1)$, qui est de la forme $(ax + b)e^x$. $\lambda = 1$ est une racine du polynôme caractéristique, donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p = x(ax + b)e^x$. Notons qu'on a
$$\begin{aligned} y_p &= (ax^2 + bx)e^x \\ y_p' &= (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ y_p'' &= (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{aligned}$$

donc

$$e^x(x+1) = y_p'' - y_p' = (2ax + 2a + b)e^x.$$

Ceci donne $a = 1/2$ et $b = 0$. On a donc comme solution particulière

$$y_p = \frac{x^2}{2}e^x.$$

Remarquer dans le calcul que le fait que $\lambda = 1$ est racine simple du polynôme caractéristique se manifeste par la disparition du terme en x^2.

4. La solution générale de $y'' - y' = e^x(x+1)$ est alors

$$y_p + y_0 = \frac{x^2}{2}e^x + c_1 + c_2e^x = c_1 + (c_2 + \frac{x^2}{2})e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Second membre de la forme $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)P(x)$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme. On peut se ramener au cas précédent en constatant qu'on a dans le premier cas la partie réelle de $e^{(\alpha+i\beta)x}P(x)$, et dans le second cas la partie imaginaire. On procède alors comme ci-dessus, avec $\lambda = \alpha + i\beta$ complexe.

Une autre façon de mener le calcul, sans passer par le complexe, est de rechercher une solution de la forme $y_p = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme qui vérifie $\deg(Q) = \deg(P)$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine du polynôme caractéristique. Si $\alpha + i\beta$ est racine du polynôme caractéristique, alors il faut multiplier y_p par x : $y_p = xe^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)Q(x)$ où $Q(x)$ est vérifie $\deg(Q) = \deg(P)$. (Le cas d'une racine double non réelle ne se présente pas).

Exemple 6.24.

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x. \tag{*}$$

1. Le polynôme caractéristique est $p(x) = x^2 - 2x + 2$. Les racines sont $r = 1 + i$ et $\bar{r}$.
2. La solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_0 = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. On cherche une solution particulière en passant par le complexe. Le second membre est

$$g(x) = e^x\cos x = \mathrm{Re}(e^x(\cos x + i\sin x)) = \mathrm{Re}(e^xe^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$$

On cherche donc une solution particulière (complexe) de

$$y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}. \tag{**}$$

Ici $\lambda = 1 + i$ est racine simple du polynôme caractéristique. On pose donc $y_p = axe^{(1+i)x}$. Notons qu'on a

$$\begin{aligned} y_p &= axe^{(1+i)x} \\ y_p' &= a(1 + (1+i)x)e^{(1+i)x} \\ y_p'' &= a(2 + 2i + 2ix)e^{(1+i)x}, \end{aligned}$$

donc

$$e^{(1+i)x} = y'' - 2y' + 2y = 2iae^{(1+i)x},$$

d'où $a = -i/2$. Une solution particulière de (**) est donc $y_p = -i\frac{x}{2}e^{(1+i)x}$. Une solution particulière de l'équation (*) est donc

$$\mathrm{Re}(y_p) = \mathrm{Re}(-i\frac{x}{2}e^{(1+i)x}) = \frac{1}{2}xe^x\sin x.$$

4. On fait à nouveau le calcul pour déterminer y_p, mais sans passer par le complexe.
Le second membre est $e^x \cos x$ et comme $1+i$ est racine du polynôme caractéristique, on prend

$$y_p = xe^x\big(A\cos x + B\sin x\big).$$

Notons qu'on a

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x\Big(\big[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\big]x + A\cos x + B\sin x\Big) \\ y_p'' &= e^x\Big(2\,(B\cos x - A\sin x)x + 2(A+B)\cos x + 2(B-A)\sin x\Big) \end{aligned}$$

On trouve

$$e^x\cos x = y_p'' - 2y_p' + 2y_p = e^x(2B\cos x - 2A\sin x),$$

donc $B = 1/2$ et $A = 0$. On trouve donc à nouveau

$$y_p = \frac{1}{2}\,xe^x\sin x.$$

5. La solution générale de $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x$ est donc

$$y_p + y_0 = \frac{1}{2}\,xe^x\sin x + e^x(c_1\cos x + c_2\sin x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution vérifiant des conditions initiales

Proposition 6.25. *Soit l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et g est définie et continue sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$. Alors pour tous nombres réels y_0 et y_1 il existe une et une seule solution de l'équation différentielle qui vérifie aux conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \quad \textit{et} \quad y'(x_0) = y_1.$$

On admet qu'il y a existence et unicité des solutions.

Exemple 6.26. On cherche la solution de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x.$$

qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a vu (voir exemple 6.24) que la solution générale est

$$y(x) = \frac{1}{2}\,xe^x\sin x + (c_1\cos x + c_2\sin x)e^x.$$

La condition initiale $y(0) = 1$ donne $c_1 = 1$. On a $y'(0) = c_1 + c_2$, donc la condition $y'(0) = 0$ donne $c_2 = -1$. La solution vérifiant les conditions initiales est donc

$$\frac{1}{2}\,xe^x\sin x + (\cos x - \sin x)e^x.$$

Exemple 6.27. A titre de récapitulation, traitons complètement le problème suivant : trouver la solution de

$$\left\{\begin{array}{c} y'' - 3y' + 2y\sin x = e^x + \cos x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

1. Le polynôme caractéristique est $p(x) = x^2 - 3x + 2$. Les racines sont 1 et 2.
2. La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_0 = c_1e^x + c_2e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. On cherche une solution particulière y_p de
$$y'' - 3y' + 2y \sin x = e^x.$$
Vu que $\lambda = 1$ est racine simple du polynôme caractéristique, on pose $y_p = axe^x$. Par identification, on trouve $a = -1$, donc
$$y_p = -xe^x.$$
4. On cherche une solution particulière y_q de l'équation
$$y'' - 3y' + 2y \sin x = \cos x.$$
On pose $y_q = A \cos x + B \sin x$. Ceci donne
$$(A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \cos x,$$
et l'on trouve $A = 1/10$ et $B = -3/10$, donc
$$y_q = \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
5. La solution générale de $y'' - 3y' + 2y \sin x = e^x + \cos x$ est donc
$$y = y_p + y_q + y_0 = -xe^x + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x) + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$
6. Des conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient le système
$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= \frac{1}{10} + c_1 + c_2 \\ 0 = y'(0) &= -\frac{13}{10} + c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$
qui a pour solution $c_1 = -3/2$, $c_2 = 7/5$.
7. Conclusion : l'unique solution de l'équation différentielle avec condition initiale est
$$y = y_p + y_q + y_0 = -xe^x + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x) - \frac{3}{2}e^x + \frac{7}{5}e^{2x}.$$