Outils Mathématiques 3 (PCSTM L2) Année 2010/2011
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Chapitre 1 : Séries numériques

Exercice 1.1.

1. Après avoir décomposé la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x(x+1)}$, décider, en utilisant la définition de la convergence d'une série numérique, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et si oui, déterminer sa somme.
2. Se ramener à une situation analogue et répondre aux mêmes questions pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ell n\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

   De telles séries sont dites téléscopiques.
3. Retrouver directement la nature de ces deux séries en cherchant un équivalent de leur terme général.

Exercice 1.2.

1. Donner la nature des séries de terme général respectivement $u_n = \cos\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \sqrt[n]{n}$.
2. Même question pour $y_n = \ell n(v_n)$ et $x_n = \ell n(u_n)$ (on pourra chercher un équivalent de x_n).

Exercice 1.3. Déterminer la nature, et si elles sont convergentes, la somme des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\sin\theta)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^n\, e^{in\theta}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n\theta}{2^n}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

Pour (c) vérifier votre calcul en posant $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 1.4. Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants à l'aide d'équivalents ou de majorations :

(a) $\dfrac{2n^3-1}{n^4+n+1}$ (b) $\dfrac{2^n+3^n+n^4}{n5^n+7n^7+2}$ (c) $\dfrac{(n\,\ell n(n))^2+n}{n^2+n^4\ell n(n)}$ (d) $\pi\sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

(e) $e^{1/n}-1-\dfrac{1}{n}$ (f) $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}-1$ (g) $\displaystyle\int_0^{1/n} \sin^2 t\, dt$

Pour (b) et (c) on pourra aussi utiliser le critère $''n^\alpha u_n''$.
La série somme des séries (e) et (f) converge-t-elle ? Même question pour (e) et (g).

Exercice 1.5. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Les séries de terme général u_n et $\sqrt{u_n}$ respectivement sont de même nature.

(b) Les séries de terme général u_n et $\ell n(1+u_n)$ respectivement sont de même nature.

Justifier vos réponses : si l'affirmation est vraie, en donner une démonstration et si elle est fausse, produire un contre-exemple.

Exercice 1.6. A l'aide du critère de d'Alembert ou du critère de Cauchy, décider de la nature des séries de termes généraux :

(a) $\dfrac{2^n}{n!}$ (b) $e^{-n+\sqrt{n}}$ (c) $\dfrac{n^n}{n!}$ (d) $\dfrac{n^2}{3^n}$ (e) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Pour certains cas, on peut utiliser la formule de Stirling, non démontrée ici : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
Trouver aussi d'autres arguments permettant de conclure.

Exercice 1.7.

1. En utilisant l'intégrale de $1/x$ sur un intervalle convenable, montrer que :
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leqslant \ell n\, n \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\ .$$
2. En déduire que la suite $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} - \ell n\, n$ est bornée entre 0 et 1.
3. En utilisant l'intégrale de $1/x$ sur des intervalles convenables, vérifier que
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ell n\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ .$$
4. En déduire que la suite S_n est décroissante et convergente (de limite la constante d'Euler $\gamma \sim 0,577$ ...).

Exercice 1.8. Utiliser les théorèmes des séries alternées et d'Abel pour montrer que les séries de termes généraux ci-dessous sont convergentes. Vérifier si cette convergence est une convergence absolue ou seulement une semi-convergence.

(a) $\dfrac{(-1)^n}{2n+7}$ (b) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+2n+3}$ (c) $(-1)^n\ \dfrac{\ell n(n)}{n}$ (d) $\dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ (e) $\dfrac{\cos n\theta}{n^3+1}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.9. Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$\forall n \geqslant 2$. On cherche à déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

1. Discuter les arguments suivants :
   (a) " $\sum u_n$ est alternée, $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$, donc $\sum u_n$ converge".
   (b) "$u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge par le théorème des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge."
2. Trouver la nature de $\sum u_n$
   (a) en multipliant numérateur et dénominateur de u_n par $(\sqrt{n}+(-1)^{n+1})$ et en écrivant $\sum u_n$ comme somme de deux séries
   (b) en écrivant un développement limité en $+\infty$ d'ordre 1 de $\dfrac{u_n}{v_n}$
   (c) en trouvant un équivalent de $u_{2n}+u_{2n+1}$.

Exercice 1.10. Préciser la nature des séries de termes généraux suivants :

(a) $\dfrac{n^2+2}{\sqrt{n^9+5n^7+7}}\ \sin n$ (b) $\tan\left(\dfrac{(-1)^n}{n!}+n\pi\right)$ (c) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ (d) $\ell n\left(1+\dfrac{\cos n\theta}{n}\right)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Attention, on n'a pas droit aux équivalents pour les séries réelles à termes de signe non constant ! Pour (c) regrouper par tranches de deux. Pour (d) utiliser le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ell n(1+x)$.

Exercice 1.11. Ecrire le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ où $u_n = v_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Cette série converge-t-elle, et si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 1.12. On réordonne les termes de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ comme suit ; cette série converge-t-elle, et si oui, quelle est sa limite ?
$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{6^2} \cdots - \frac{1}{(2k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \frac{1}{(2^k+3)^2} \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} - \frac{1}{(2(k+1))^2} \cdots$$

Exercice 1.13. Déterminer la nature des séries numériques suivantes (préciser si la série est absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente) :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\log(n)}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ (c) $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n-1}$ (d) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)}$

(e) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (f) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} - \ell n \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ (g) $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (h) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n\, \ell n(n)}{n^2+n}$

(i) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n+3^n}{n!}$ (j) $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{e^{in\frac{\pi}{11}}}{n+1}$ (k) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ (l) $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{n^{\ell n(n)}}{(\ell n\, n)^n}$

Chapitre 2 : Séries entières

Exercice 2.1. Calculer le rayon de convergence, donner l'intervalle de convergence et le domaine de convergence des séries entières réelles suivantes (attention, les dernières sont lacunaires) :

(a) $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$ (c) $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) x^n$ (d) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ell n(n)}{n} x^n$

(e) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n} x^n$ (f) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^n}{\ell n\, n} x^n$ (g) $\sum_{n\geqslant 0} 2^n x^{2n}$ (h) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha^n}{n^\alpha} x^{3n+1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 2.2. Calculer le rayon de convergence, donner le disque de convergence et le domaine de convergence des séries entières complexes suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1} z^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\alpha^n}{\ell n\, n} z^n$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ (d) $\sum_{n\geqslant 0} n^2\, 2^n\, z^{2n}$

Exercice 2.3. Trouver le domaine de convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\, 3^n} (x-2)^{2n}$ $(x \in \mathbb{R})$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^n}{n} (z-1)^n$ $(z \in \mathbb{C})$

Exercice 2.4. Soient a_0 , a_1 , ..., a_n , ..., z_0 , $z \in \mathbb{C}$.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ est convergente et $|z| \leqslant |z_0|$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ est convergente.

(b) Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ est semi-convergente et $|z| > |z_0|$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ est divergente.

Justifier vos réponses par la citation d'un théorème, une courte démonstration, un contre-exemple ...

Exercice 2.5.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière complexe $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$.
2. Rappeler ce que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$.

Exercice 2.6.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières réelles suivantes :
   (a) $\sum_{n\geqslant 0} (n^2+n+1)x^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n + 4^n}{n} x^n$ (c) $\sum_{n\geqslant 1} n3^n x^{2n}$
2. A l'aide de dérivations et intégrations de séries géométriques, calculer les sommes des séries ci-dessus dans leurs intervalles de convergence respectifs.

Exercice 2.7. Trouver le développement en série entière en 0 de $f(x) = (1+x)^{-2}$ ainsi que l'intervalle sur lequel il est valable :

(a) en dérivant le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$,

(b) en multipliant le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$ par lui-même ,

(c) en utilisant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -2$.

(d) En déduire les valeurs des dérivées successives de f en 0. Le vérifier par le calcul. Que peut-on dire du reste de la formule à Taylor à l'ordre n entre x et 0 ?

Exercice 2.8. A l'aide des développements en séries entières des fonctions classiques, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{2+3x}$ (b) $\ell n\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) Arcsin x

Préciser l'intervalle sur lequel ce développement est valable pour (a), (b), (c) et le plus grand intervalle ouvert sur lequel il est valable pour (d) (on ne s'intéresse pas en (d) au problème, assez délicat, aux bords de cet intervalle).
Faire aussi le développement en série entière en 1 de e^{2x}.

Exercice 2.9.

1. Trouver, sous forme de séries entières, des solutions de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=0$ $(\star)$. Donner le rayon de convergence de ces solutions. A-t-on obtenu toutes les solutions de $(\star)$?
2. Résoudre $(\star)$ de manière classique et vérifier le calcul fait en 1) en développant en série entière en 0 les solutions obtenues en 2).

Exercice 2.10. A l'aide du développement en série entière de $\cos x$, trouver une valeur approchée de $\cos\dfrac{1}{10}$ à 10^{-12} près.

Chapitre 3 : Séries de Fourier

Exercice 3.1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$, f est impaire et de période 2π.

1. Faire le graphe de f. Calculer les coefficients et la série de Fourier de f.
   Que vaut la somme de cette dernière ? La convergence est-elle uniforme ?
2. Utiliser les théorèmes de Dirichlet et de Bessel-Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
   En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3.2. Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 2 données par :

$$f_1(x) = x\ ,\ \forall x \in [-1,1[\quad ,\quad f_2(x) = |x|\ ,\ \forall x \in [-1,1[\quad ,\quad f_3(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \forall x \in [-1,0] \\ 2x\ ,\ \forall x \in]0,1[\end{cases} .$$

1. Tracer les graphes de f_1, f_2 et f_3. Quelle est la parité de f_1 ? de f_2 ?
   Calculer les coefficients de Fourier, donner la série de Fourier ainsi que la somme de cette dernière pour chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3. La convergence est-elle uniforme ?
2. A l'aide des théorèmes de Dirichlet et de Bessel-Parseval, trouver les sommes de séries numériques :
   $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3.3. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 1 définie par : $f(x) = x(1-x)$, $\forall x \in [0,1]$.

1. Tracer le graphe de f. Quelle est la parité de f ?
   Calculer les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f.
   Que vaut la somme de cette série ?
2. Déduire de ce qui précède $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Remarquer que la convergence de la série de Fourier de f est uniforme.
   En déduire la convergence uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi^3 n^3}$ ainsi que sa somme.
   Que vaut $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$?

Exercice 3.4. On considère les fonctions g_1 et g_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = |\cos x|\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } x = k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x & ,\ \text{si } x \in]2k\pi\ ,\ (2k+1)\pi[\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ -\cos x & ,\ \text{si } x \in](2k+1)\pi\ ,\ (2k+2)\pi[\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} .$$

1. Tracer les graphes de g_1 et g_2. Donner la période et l'éventuelle parité de ces fonctions.
2. Calculer leur série de Fourier complexe. En déduire leur série de Fourier réelle.
3. Que valent $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$?

Chapitre 4 : Intégrales curvilignes

Exercice 4.1. Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant :

1) $x = y^2$ avec $0 \leq y \leq 1$;
2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ avec $0 \leq t \leq t_0$;
3) $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$ et $0 \leq \rho \leq a$ (cardioïde) :

Exercice 4.2. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 4.3. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy\,dx + (x+y)\,dy$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 4.4. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz}{x^2+y^2}$$

lorsque :

1) C est le segment de droite allant de $A = (1,1,1)$ à $B = (2,2,2)$.
2) C est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 4.5. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy$$

lorsque :

1) Γ est le segment de droite allant de $A = (1,0)$ à $B = (0,1)$.
2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1 et d'extrémités $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.

Exercice 4.6. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est nulle lorsque Γ est un arc de simple fermé.

Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4-3x$ limité en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geq 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A.

Calculer une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\,dx + x^2y\,dy$ pour $i = 1,2,3$.

Exercice 4.7. Déterminer une fonction $u(x,y)$ telle que : $du = \dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$

Exercice 4.8. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ avec :

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x>0,\ y>0\}$, ω est une forme différentielle totale.
2) Déterminer u dans D, telle que $du = \omega$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par : $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 4.9.

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2+4y^2-4 = 0; y \geq 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 4.10. Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y + z)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + (x + y)\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1, 1, 1)$,

1. le long de la droite (OC).
2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x + yz)\overrightarrow{i} + (y + xz)\overrightarrow{j} + (z + xy)\overrightarrow{k}$.

Chapitre 5 : Intégrales doubles

Exercice 5.1. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :

$$\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy)\,dx$$

Exercice 5.2. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :

$$\int_0^1 (\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy)\,dx$$

Exercice 5.3. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} (\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy)\,dx$$

Exercice 5.4. Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 5.5. a) Calculer $\displaystyle\iint_D (x-y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

Exercice 5.6. Calculer $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 5.7. Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. Montrer qu'en général,

$$\iint_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \iint_{T_2} f(x,y)\ dxdy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que $\displaystyle\iint_{T_1} xy\ dxdy = \iint_{T_2} xy\ dxdy.$

Exercice 5.8. Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y) | \quad 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\ dxdy.$$

Exercice 5.9. Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 5.10. Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 5.11. Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\, dxdy$. avec $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq a\}$ et $a > 0$.
Calculer I à l'aide du changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} x = tu \\ y = (1-t)u \end{array} \right.$

Exercice 5.12. *Aire en coordonnées polaires.* Soit D le domaine limité par $r = p(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$; et le segment $\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{array} \right.$

Montrer que l'aire de D est égale à $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\, d\theta$.
Trouver l'aire **a**) de la cardioïde : $r = a(1 + cos(\theta))$., **b**) de l'escargot : $r = a\theta$, $(a > 0)$.
Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y.
Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.

Exercice 5.13. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct.
Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\int\int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dxdy$

Exercice 5.14. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct avec

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 5.15. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, définie comme la limite $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2} dx$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons le quart de disque : $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et le carré : $C_n = \{0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$.

1. Calculer les intégrales $J_n = \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ et $J_{2n} = \int\int_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.
2. Considérons l'intégrale $K_n = \int\int_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.
3. D'après un dessin de D_n, C_n et D_{2n} expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.
4. Quelle est la limite $n \to +\infty$ de J_n et de J_{2n} ? et de K_n ? Trouver I.

Chapitre 6 : Calcul vectoriel

Exercice 6.1. L'espace à trois dimensions est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\vec{B}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\vec{C}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Calculer $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{B}\wedge\vec{A}$, $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{A}.(\vec{A}\wedge\vec{B})$, $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{A}+\vec{B}\|$, $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$, $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$.

Exercice 6.2. L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Calculer les normes de $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

Exercice 6.3. L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Soient

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}.$$

Etablir l'identité :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : calculer les coordonnées des deux membres.

Exercice 6.4. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathcal{E}$ tels que $\vec{AM}.\vec{AB}=0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathcal{E}$ tels que $\vec{AM}.\vec{BM}=0$. (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Représenter ces deux ensembles sur un dessin.
4. Que se passe-t-il lorsque $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$?

Exercice 6.5. Trouver l'angle θ entre les vecteurs joignant l'origine aux points $P_1(1,2,3)$ et $P_2(2,-3,-1)$.

Exercice 6.6. Soit $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}$ deux vecteurs issus d'un même point P et soit

$$\vec{c}=\det\begin{pmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{pmatrix}\vec{i}+\det\begin{pmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{pmatrix}\vec{j}+\det\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}\vec{k}$$

Montrer que $\|c\|=\|a\|\|b\|\sin\theta$, où θ est le plus petit angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 6.7. Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.

1. Etablir l'identité

$$\|\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}\|^2+\|\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V}\|^2=2(\|\overrightarrow{U}\|^2+\|\overrightarrow{V}\|^2).$$

2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que

$$\|\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}\|^2=\|\overrightarrow{U}\|^2+\|\overrightarrow{V}\|^2.$$

(le théorème de Pythagore)

Exercice 6.8. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les côtés AM, AN et AP où $A=(2,1,-1)$, $M=(3,0,2)$, $N=(4,-2,1)$ et $P=(5,-3,0)$.

Exercice 6.9. L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$.

Exercice 6.10. Démontrer que pour U et V vecteurs de $\mathbb{R}^3$ on a toujours :
(1) $||U-V||\geq||U||-||V||$.
(2) $U.V=\frac{1}{4}\big(||U+V||^2-||U-V||^2\big)$