Outils Mathématiques 1 - L1 PCGS

Frédéric Touzet (Polycopié rédigé par Max Bauer)

Université Rennes 1, UFR Mathématiques
Bât. 23, bureau 834
frederic.touzet@univ-rennes1.fr

4/9/2017

Deux contrôles continus (1h00) et un examen terminal (2h00).

- CC 1 prévu le vendredi 27/10/2017, 15h30-16h30, salle d'examen, Bât.27.
- CC 2 prévu le vendredi 01/12/2017, 14h00-15h00, salle d'examen, Bât.27.

- Si vous voulez l'imprimer, vous pouvez imprimer 6 diapos sur une même page, ou même 9 diapos, mais alors en orientation « paysage »

Notations de la théorie des ensembles

Nous utiliserons les symboles suivants :

- Symboles ensemblistes
  - si E est un ensemble, $x \in E$ se lit : “x appartient à E”.
  - si E et F sont deux ensembles, $F \subset E$ se lit : "F est inclus dans E".
  - $\emptyset$: ensemble vide.
  - $\cap$: intersection et $\cup$: réunion.
- Connecteurs binaires
  - si P et Q sont deux assertions, l'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit : « P implique Q ».
  - et $P \Longleftrightarrow Q$ se lit : « P équivalente à Q ».
- Quantificateurs
  - $\forall x \in E$ se lit : « Pour tout x appartenant à E ».
  - $\exists x \in E$ se lit : « Il existe x appartenant à E ».

Attention !

Ne pas confondre $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. Par exemple : il est vrai que $x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$ mais il est faux que $x = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 1$

Définition d'une fonction numérique

Définition 1.1

Une fonction numérique d'une variable réelle de domaine de définition $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un ensemble d'arrivée $Y \subset \mathbb{R}$, est un procédé qui à tout nombre réel $x \in X$, associe un nombre $f(x) \in Y$:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'élément $f(x)$ est appelé l'image de x par f, ou encore la valeur de f en x.

Exemple

En pratique, on se donne souvent une fonction par une formule, et l'ensemble de définition est laissé à déterminer, comme étant le plus grand ensemble sur lequel la formule donnée a un sens.

Exemple 1.2

Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Solution

On a les contraintes

$$\sqrt{4-x^2} \neq 0$$
$$4-x^2 \geq 0$$

La première contrainte nous impose d'exclure $4-x^2=0$, ssi $4=x^2$ ssi $x=\pm 2$.
La deuxième contrainte est est équivalente à $x^2 \leq 4$ ssi $|x| \leq 2$ ssi $x \in [-2,2]$.
Le domaine de définition est l'ensemble des x qui vérifie les deux contraintes, donc $]-2,2[$.

Antécédent, image

Définition 1.3 (Image)

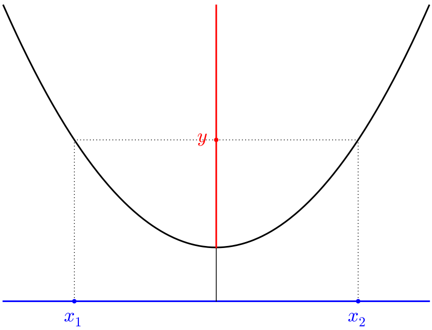
L'image d'une application $f : X \mapsto Y$ est l'ensemble des valeurs prises par f :

$$\{f(x) \mid x \in X\}.$$

On peut aussi dire que l'image est l'ensemble des y dans Y qui ont un antécédent x dans X :

$$\{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}.$$

Visualisation des antécédents d'un y.



- y est l'image de x_1 mais aussi de x_2.
- Les antécédents de y sont x_1 et x_2.
- Domaine de définition : en bleue. Image de f : en rouge.

Exemples

Exemple 1.4

- Image de $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- Image de $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
- Image de $x \mapsto \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Symétrie

- On dit qu'une fonction f est paire si on a $f(-x) = f(x)$, pour tout x du domaine de définition.
- Le graphe (la courbe représentative) d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy.
- On dit qu'une fonction f est impaire si on a $f(-x) = -f(x)$, pour tout x du domaine de définition.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du plan.

Pour vérifier qu'une fonction est paire ou impaire, on part de $f(-x)$ que l'on essaie de simplifier pour retrouver $f(x)$.

Exemple 1.5

- $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3, \ldots$
- $h(x) = e^x + e^{-x}$.

Domaine d'étude

Exemple 1.6

Montrer que la période de la fonction $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est π.

La symétrie, périodicité d'une fonction permet de limiter le domaine d'étude.

Pour l'exemple précédent, on peut prendre $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ comme domaine détude.

Périodicité (complément)

Voici une définition formelle de la periodicité :

Définition 1.7

- On dit que f est périodique de période $T > 0$ si $\forall x \in X, x + T \in X$ et $f(x+T) = f(x)$.
- On dit que T_0 est la période de f, si T_0 est le plus petit nombre $T > 0$ pour lequel f est périodique de période T.

Interprétation graphique

La fonction f est périodique si son graphe est préservé par une translation de vecteur horizontal $(T, 0)$.

Asymptote verticale, horizontale

On ne donne pas la définition de limite (finie ou infinie) d'une fonction lorsque x tend vers une valeur finie ou infinie. De même pour la notion de limite à gauche et à droite.

Pour simplifier l'écriture, ∞ désigne soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Définition 1.8

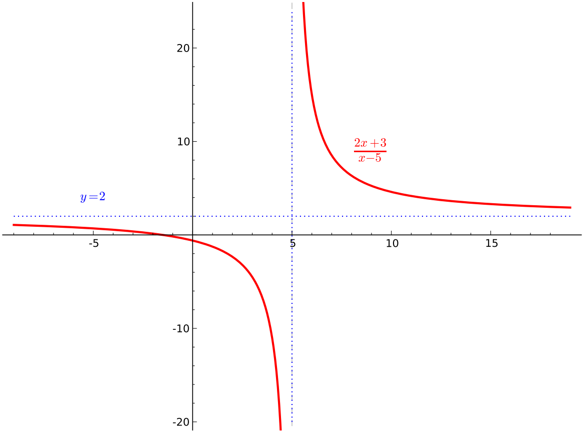
- On dit que le graphe d'une fonction f admet une asymptote verticale en a si $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, ou $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$.
- On dit que le graphe admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en ∞ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Exemple 1.9

$$f : x \mapsto \frac{2x+3}{x-5}.$$

Solution

Le graphe de f admet la droite d'équation $x = 5$ pour asymptote verticale, et la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale.



Asymptote oblique

Définition 1.10

Si $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers ∞, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en ∞.

Pour $a = 0$ on retrouve la définition d'asymptote hoizontale.

Proposition 1.11

$y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$

Exemple 1.12

$$f : x \mapsto \frac{3x^2 + x}{x + 1}.$$

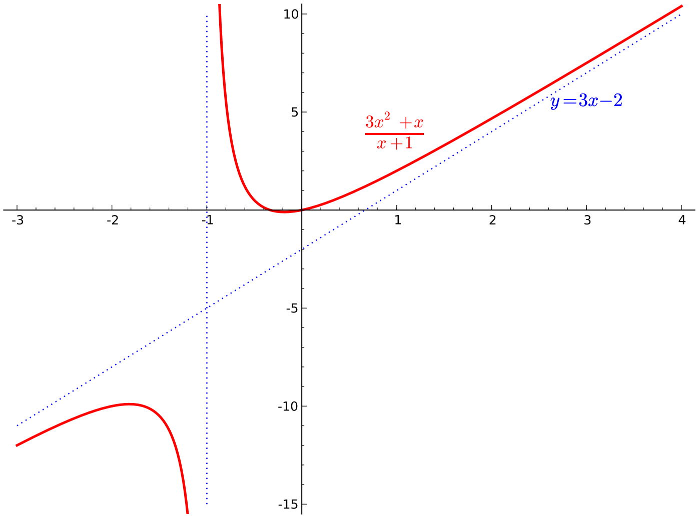
Solution

On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = -2,$$

donc la droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote en $+\infty$.

Solution



Relations importantes du ln

On ne donne pas de définition formelle des fonctions logarithme et exponentielle. On se restreint à quelques propriétés importantes.

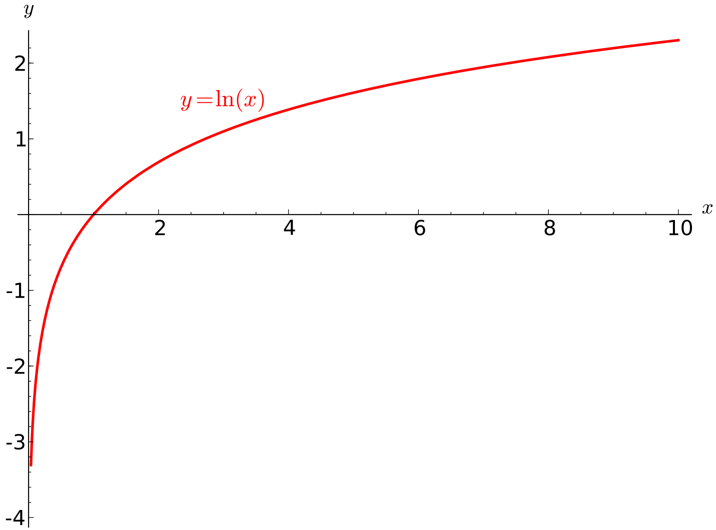
Proposition 1.13

Pour tout $x, y > 0$ on a

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$

$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Représentation graphique du ln



Limites importantes du ln

Exemple 1.14

Montrer que la fonction

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

vérifie $f(x) + f(-x) = 0$. En déduire une symétrie de la courbe de f.

Proposition 1.15

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Solution de l'exemple

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln\Big((\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)\Big) \\ &= \ln\big((1+x^2)-x^2\big) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

On déduit que $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire. La courbe de f possède donc une symétrie centrale par rapport à l'origine.

Démonstration de la proposition (complément)

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 3^n$. Alors $\ln(x) \geq \ln(3^n) = n\ln(3)$ et donc $\ln(x) \geq n$ (car $\ln(3) > 1$) d'où $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

(2) En posant $y = 1/x$ on déduit :

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \ln(\frac{1}{y}) = \lim_{y\to+\infty} -\ln(y) = -\lim_{y\to+\infty} \ln(y) \stackrel{(1)}{=} -\infty$$

(3) De l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Variante : Soit $f(x) = \ln(1+x)$. On a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to f'(0) = 1.$$

Démonstration (suite)

(4) De l'Hospital (exercice).
Variante : Un tableau des variations montre que $f(x) = \ln(x) - \sqrt{x}$. est croissante sur $]0,4]$ et décroissante sur $[4,+\infty[$. D'où $\forall x > 0$, $f(x) \leq f(4) \leq 0$, c.à.d. $\ln(x) \leq \sqrt{x}$. On déduit que $\forall x > 0$, $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a donc : $\forall x > 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
(5) Il suffit de poser $y = 1/x$ et d'utiliser (4).

Propriétés de la fonction exponentielle

Proposition 1.16

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

Proposition 1.17

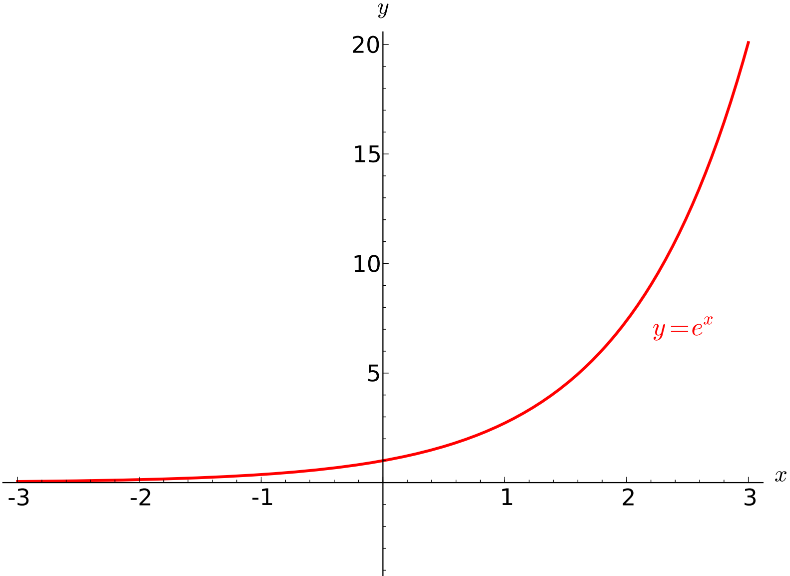
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Proposition 1.18

$$e^{\ln x} = x \qquad \forall x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Représentation graphique de la fonction exponentielle



Définition de la fonction puissance

On sait comment définir x^n, pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple,

$$x^3 = x \cdot x \cdot x.$$

Mais comment définir par exemple x^π ?
Une façon de le faire est de constater qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x)).$$

Notons que l'expression de droite est définie si on remplace n par un nombre réel α. l'idée est alors de définir x^α en utilisant cette relation :

Définition 1.19

Pour tout réel α, on appelle fonction puissance α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Propriétés de la fonction puissance

Proposition 1.20

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} \qquad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance

On va faire plus loin une étude de la fonction puissance.

Théorème 1.21 (Croissance comparée)

$$\forall \alpha, \beta > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0.$$

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$$

Continuité

Définition 1.22

f est dite continue en $a \in D_f$ si

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

f est dite continue si elle est continue en tout point de D_f.

Une fonction définie sur un intervalle est continue si on peut tracer son graphe sans soulever le stylo. Autrement dit, son graphe n'a pas de « trous ».

Les fonctions « classiques » sont continues sur leur domaine de définition : polynomes, fractions rationnelles, sin, cos, tan, exp, ln, $\sqrt[k]{\cdot}$, e.t.c.

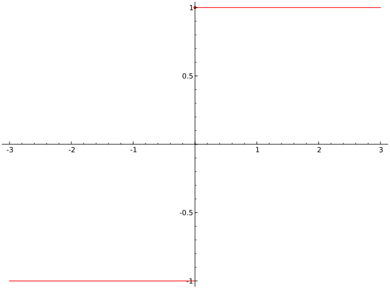
Exemples d'une fonction qui n'est pas continue

Exemple 1.23

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

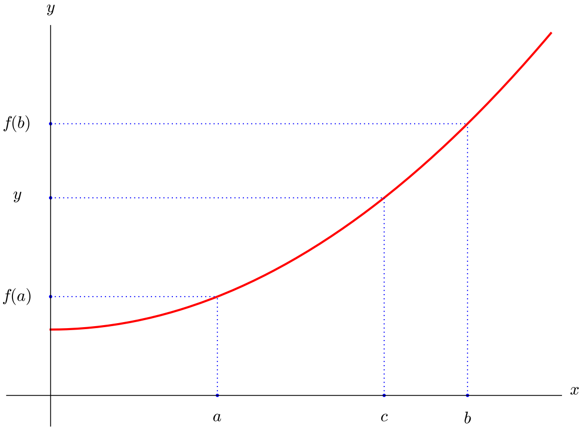
n'est pas continue en 0. Elle a un « saut » en 0.



Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.24 (des valeurs intermédiaires)

Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$.
Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.



L'image d'un intervalle

Remarque 1.25

Le c du théorème des valeurs intermédiares n'est pas unique en général.
Si f est strictement monotone, alors c est unique.

Proposition 1.26

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 1.27

L'équation $3x^3 - 2x^2 - x = -1$ admet une solution dans l'intervalle $]-1, 0[$.

Définition de la dérivabilité et vitesse moyenne

Définition 1.28

f est dite dérivable en un point a du domaine de définition si

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

existe. On appelle alors $f'(a)$ le nombre dérivée de f en a. Une fonction est dérivable si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition.

Si x est le temps et $f(x)$ la distance parcouru à l'instant x par un mobile se déplaçant sur une axe, alors le taux d'accroissement de f en a

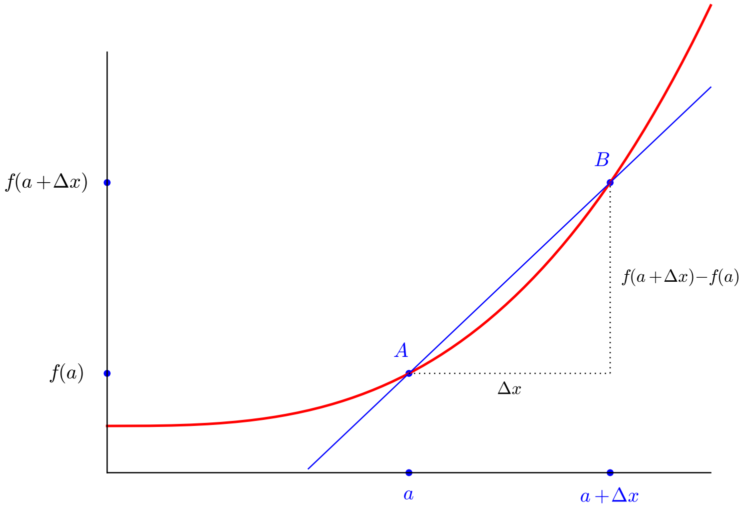
$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

est la vitesse moyenne pendant le laps de temps Δx.

Lorsque Δx tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$. Donc la vitesse moyenne du mobile tend vers la vitesse instantanée $f'(a)$ à l'instant a.

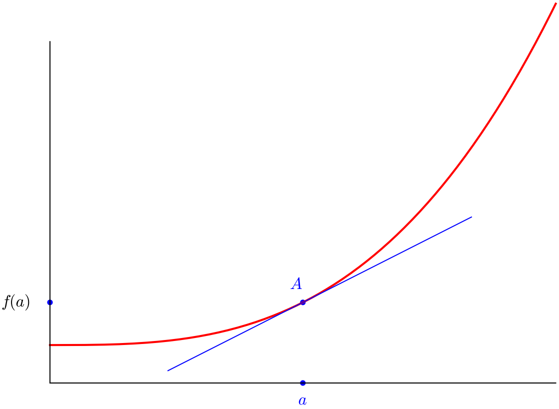
Représentation graphique de la vitesse moyenne

Le taux d'accroissement de *f* en *a* est la pente de la droite (*AB*).



Droite tangente

Lorsque Δx tend vers 0, la droite (AB) tend vers une position limite, ce qu'on appelle la droite tangente.



Droite tangente

La pente de la droite tangente est donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

Elle passe par le point $(a, f(a))$ donc :

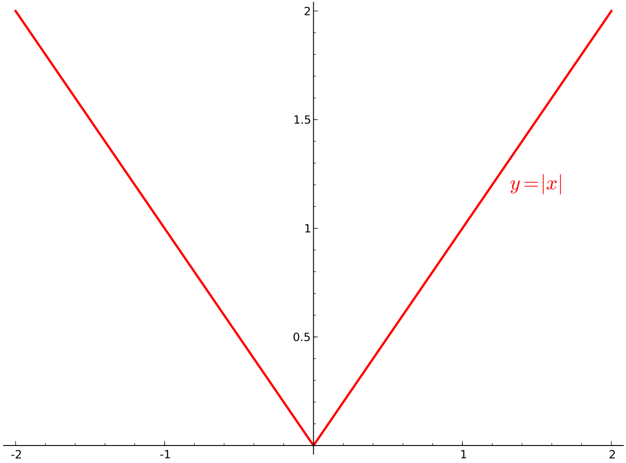
Proposition 1.29

Une équation de la droite tangente au point $A(a, f(a))$ du graphe de f est

$$y = f'(a).(x-a)+f(a).$$

Une fonction qui n'est pas dérivable

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Propriétés de la fonction $x \mapsto |x|$

Notons d'abord que f est continue en 0 car le graphe de f n'a pas de « trous ».

Par contre, f n'est pas dérivable en 0, car la droite tangente n'est pas bien définie : pour $x \geq 0$ on a $y = x$ comme droite tangente et pour $x \leq 0$ on a $y = -x$.

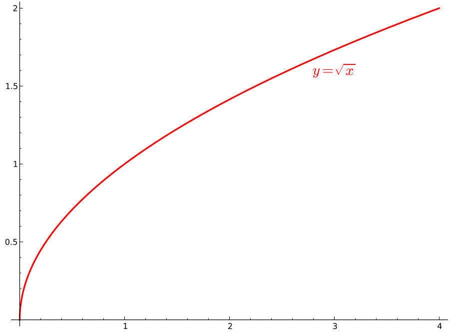
Dans ce cas on parle de point anguleux.

C'est donc l'exemple d'une fonction qui est continue mais pas dérivable.

Demi-tangente verticale

Exemple 1.30

$x \longmapsto \sqrt{x}$ admet une demi-tangente verticale en O.



Dérivées des fonctions usuelles

k et α sont des constantes réels avec $\alpha \neq 0$.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Opérations sur les dérivées

Théorème 1.31

Si u, v sont dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$, uv, et ku ($k \in \mathbb{R}$) le sont aussi. Si en plus v ne s'annule pas, alors u/v sont également dérivables. On a

1. $(u+v)' = u' + v', \qquad et \qquad (ku)' = ku',$
2. $(uv)' = uv' + u'v,$
3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2},$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$

Théorème 1.32

Si u, v sont dérivables, alors $u \circ v$ est dérivable (là ou c'est défini) et

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x)).$$

Exemples

Exercice 1.33

Déterminer la dérivée des fonction suivantes

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad f_5(x) = \sin(x^2) \qquad f_6(x) = e^{\cos x}$$

$$f_7(x) = \ln(x^2+1) \qquad f_8(x) = \ln(\ln x)$$

Exercice 1.34

Vérifier la formule donnée plus haut pour

$$f(x) = \tan x \qquad g(x) = x^{\alpha}$$

Solution

- $\tan x$:
- x^{α} :

$$(x^{\alpha})' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Méthode 1 : $f_1(x) = x^{-2}$, donc

$$f_1'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}.$$

Méthode 2 :

$$f_1'(x) = -\frac{2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}.$$

Définition d'un extremum (local)

Définition 1.35

- On dit qu'une fonction f atteint son minimum en x_0 si on a pour tout x

$$f(x_0) \leq f(x).$$

- f atteint son maximum en x_0 si on a

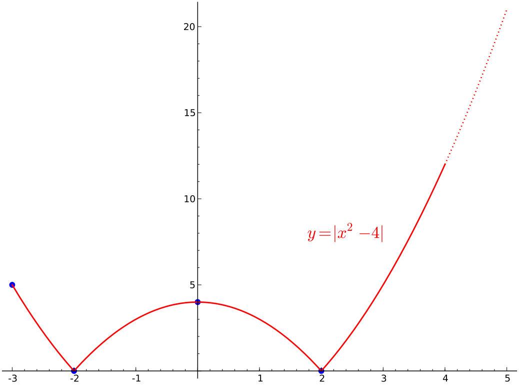
$$f(x) \leq f(x_0).$$

- Un extremum est un maximum ou minimum.
- On parle de maximum (minimum) local si l'inégalité de la définition est seulement vérifié sur un voisinage de x_0 (et pas sur tout le domaine de définition de f).

Exemple 1.36

$f(x) = |x^2 - 4|$, $x \in [-3, +\infty[$.

Réponse. Maximum local : en 0 et en -3 ; minimum local : en 2 et -2 ; maximum global : aucun ; minimum global : en -2 et 2.



Extremum et dérivée seconde

Soit f deux fois dérivable.

Proposition 1.37

Si x_0 est un extremum local de f alors on a $f'(x_0) = 0$.

Théorème 1.38

- *Si on a* $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) > 0$ *alors* x_0 *est un minimum local.*
- *Si on a* $f'(x_0) = 0$ *et* $f''(x_0) < 0$ *alors* x_0 *est un maximum local.*

Exemple 1.39

$$f(x) = x^2 \qquad f_2(x) = -x^2 \qquad f_3(x) = x^3.$$

Remarques

Remarque 1.40

- La fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local.
- Les solutions $f'(x_0) = 0$ sont les seuls candidates pour être extremum.
- Si $f'(x_0) = 0$ alors on dit que x_0 est un point critique de f. On parle aussi de point stationnaire.

Théorème des acroissements finis

Théorème 1.41 (Théorème de Rolle)

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si on a $f(a)=f(b)$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème 1.42 (Accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration du théorème de Rolle : f atteint son minimum m et son maximum M. Si on a $m = M$, alors f est constante et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b]$.
Si $m \neq M$ alors f atteint au moins un de ces extrema en un point c de $]a, b[$. Mais on a alors $f'(c) = 0$.

Démonstration du théorème des accroissements finis : Utiliser le théorème de Rolle pour la fonction $h(x) = f(x)(b-a) - x(f(b) - f(a))$.

Fonctions monotones

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I.

Théorème 1.43

- *Si $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante.*
- *Si $f'(x) < 0$ sur I alors f est strictement décroissante.*
- *Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante.*

Démonstration (complément) Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Exercice 1.44

$f : \ x \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

La règle de l'Hospital

Théorème 1.45

On suppose que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *est une forme indeterminée* $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *en b (fini ou infini).*
Alors

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Si $\lim_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (limite fini ou infini).

Exemple 1.46

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Convexité

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I.

Définition 1.47

On dit que

1. f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
2. f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
3. x_0 est un point d'inflexion si $f''(x_0) = 0$ avec changement de signe de f'' en x_0.

Exemple 1.48

1. $x \mapsto x^2$.
2. $x \mapsto x^3$.

Solution

1. Convexe sur $\mathbb{R}$. On a $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un point d'inflexion.
2. 0 est un point d'inflexion.

Interprétation gómétrique

Proposition 1.49

1. Si f est convexe (concave) alors tout segment qui relie deux points de la courbe de f est au dessus (en dessous) de la courbe.
2. Si f est convexe (concave) alors la courbe représentative de f est au-dessus (en-dessous) de chacune de ses tangentes.
3. En un point d'inflexion, on a changement de concavité/convexité et la droite tangente traverse la courbe représentative.

Remarque 1.50

On peut utiliser (1) pour définir la convexité/concavité d'une fonction (dérivable ou non).

Exemple 1.51

On sait que si f vérifie $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ pour un x_0, alors f admet un minimum local en x_0. Expliquer ce résultat en utilisant la notion de convexité.

Plan d'étude d'une fonction

1. Rechercher le domaine de définition et de continuité.
2. Rechercher des symétries éventuelles et réduire, le cas échéant, le domaine d'étude.
3. Etudier la dérivabilité, le signe de la dérivée et calculer les limites nécessaires. Etablissez le tableau de variations.
4. Etudier l'existence d'asymptotes.
5. Etudier la concavité, convexité. Etudier l'existence de points d'inflexion.
6. Représentation graphique. Faire apparaître les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales, et les points d'inflexion avec leur droite tangente.

Exemple d'étude d'une fonction

Exercice 1.52

Soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Faire l'étude complète de la fonction puissance

$$f_\alpha(x) = x^\alpha.$$

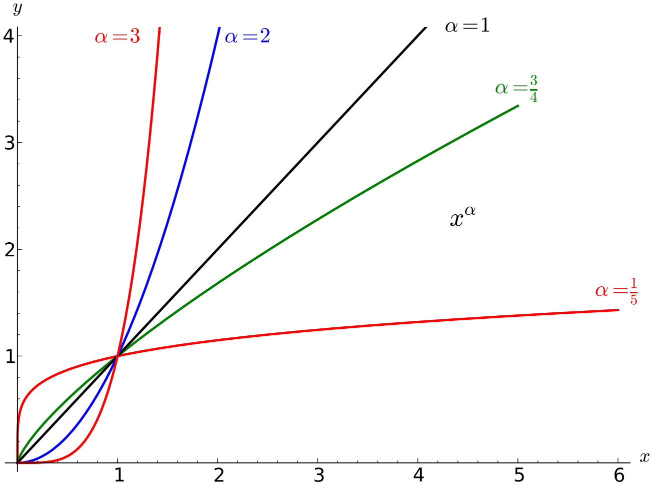
Solution

Prenons d'abord le cas $\alpha > 1$.

1. f_α est définie et continue sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
2. Vu que $\alpha > 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$. Aussi, $\lim_{x\to 0+} \alpha \ln x = -\infty$ et donc $\lim_{x\to 0+} e^{\alpha \ln x} = 0$.
3. On a déjà vu que $f'_\alpha = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Notons que $x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln x} > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc $f'_\alpha > 0$, ce qui implique que f_α est strictement croissant sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
4. On a $f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. On a comme avant $x^{\alpha-2} > 0$, et comme $\alpha > 1$, on a $f''_\alpha(x) > 0$. Donc f_α est convexe.
5. Ce point ne fait pas partie de l'étude d'une fonction, mais pour tracer la courbe il est utile de savoir que $\lim_{x\to 0+} f'_\alpha(x) = 0$.

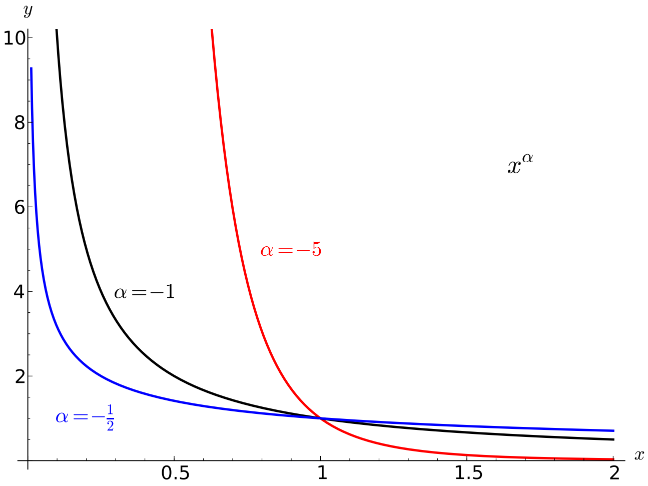
Cas $0 < \alpha < 1$. Les points 1 à 3 ne changent pas. Par contre on a (4) : $f''_\alpha < 0$, donc f_α est concave. On a (5) : $\lim_{x\to 0+} f'_\alpha(x) = +\infty$.

$x \mapsto x^{\alpha}$, pour $\alpha > 0$

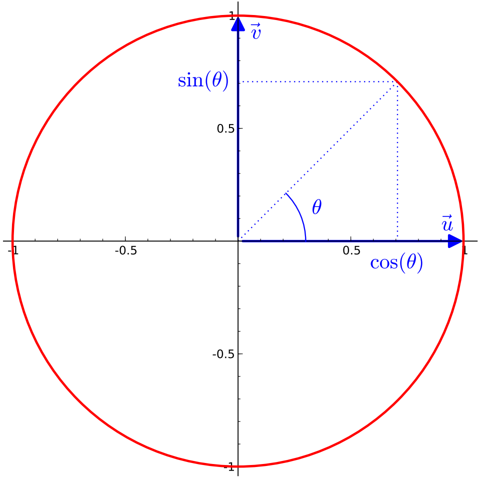


$x \mapsto x^{\alpha}$, pour $\alpha < 0$

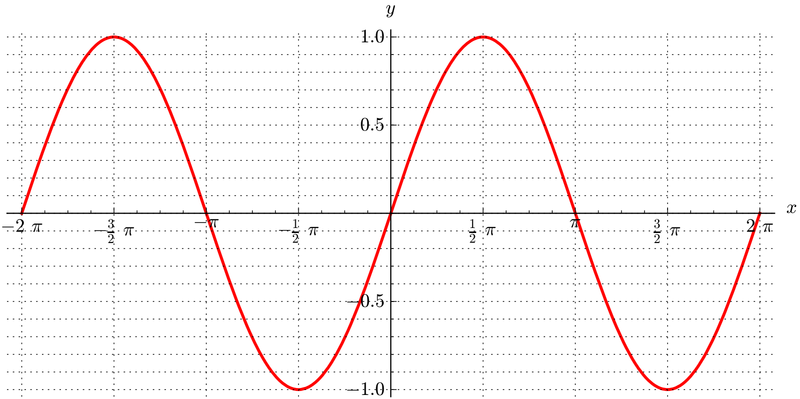
Pour $\alpha < 0$ on peut faire une étude similaire, ou alors utiliser $x^{-\alpha} = 1/x^{\alpha}$.



Définition du sinus et cosinus

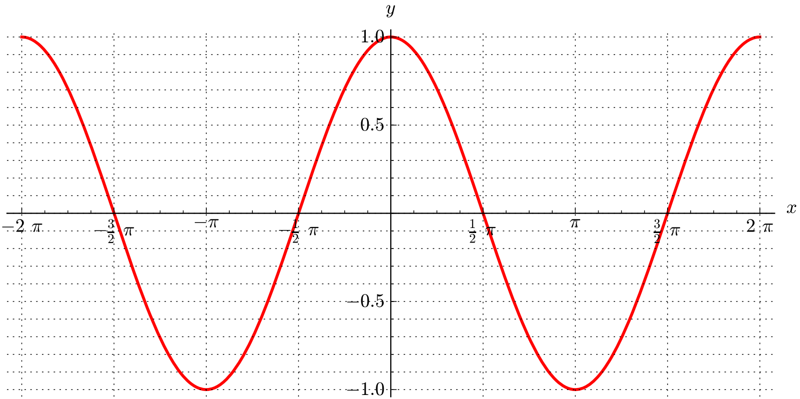


Sinus



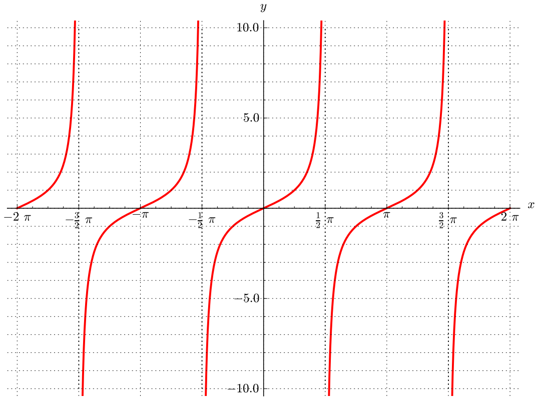
La fonction Sinus est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, de dérivée $x \mapsto \cos(x)$.

Cosinus



La fonction Cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, de dérivée $x \mapsto -\sin(x)$.

Tangente



La fonction Tangente est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. Elle est impaire, π-périodique, de dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Tableau de valeurs

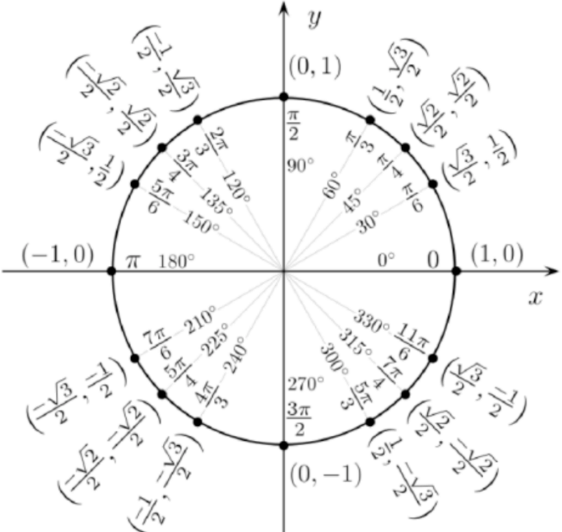
Formule de base

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Valeurs remarquables (Source : wikiversity)



Symétries du sinus et cosinus

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

Mnémotechnique : Rajouter $\pi/2$, c'est dériver. La troisième ligne se déduit des deux premières.
On en déduit

Symétries de la fonction tangente

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \tan(x+\pi) = \tan(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Formules d'addition

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

On en déduit

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

En prenant $a = b$ dans les formules d'addition on obtient

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

La première formule et $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne

Formules de duplication

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Transformation de produit en somme

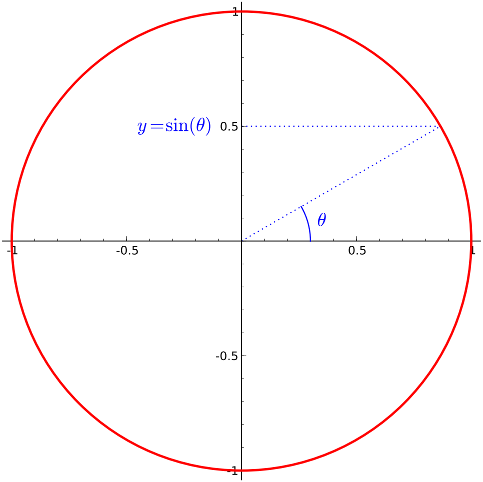
Les formules d'addition donnent :

Transformation de produit en somme

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

La fonction réciproque de la fonction sinus

Soit $f(\theta) = \sin(\theta)$. Si on se donne l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$, alors on obtient la valeur $y = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.



Peut-on retrouver l'angle ?

Jouons le jeux réciproque : On se donne la valeur $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on cherche θ tel que

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La réponse n'est pas unique. On a par exemple

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta_2 = \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

(θ_1 et θ_2 sont des antécédents de la valeur $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ par la fonction sinus.)

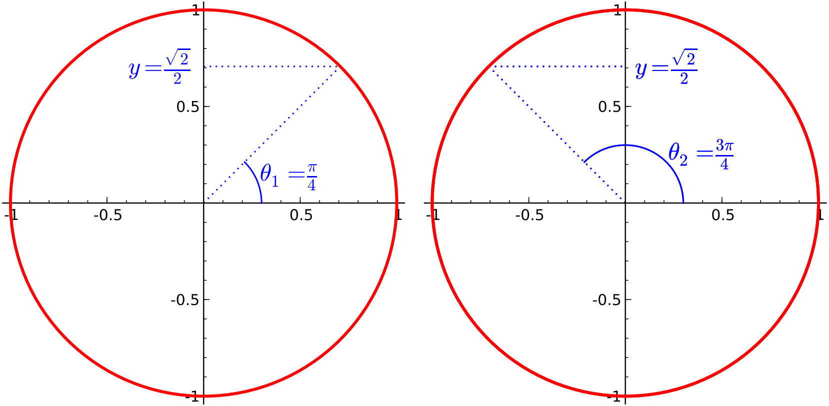
On voudrait définir une fonction qui exprime l'angle θ en fonction de y, donc il faut faire un choix.

Le premier choix qu'on fait est de se restreindre à un intervalle de longueur 2π, disons $[-\pi, \pi[$.

La figure suivante montre que cela n'est pas suffisant :

Choix d'un antécédent

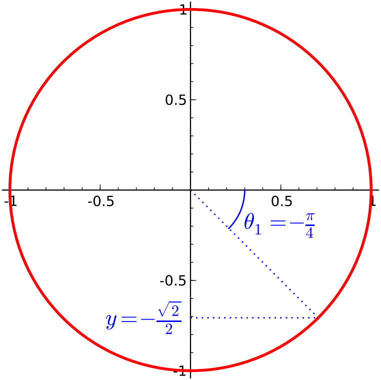
$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet deux antécédents dans $[-\pi, \pi[$:

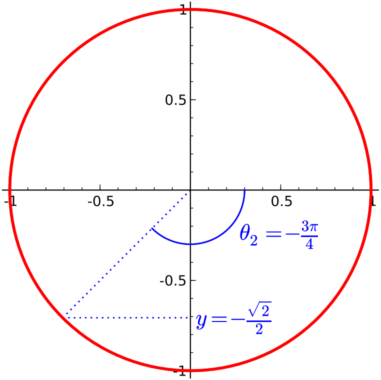


On fait le choix suivant : pour y entre 0 et 1 on prend l'unique angle qui est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (l'autre est entre $\frac{\pi}{2}$ et π).

Choix d'un antécédent (suite)

De même, si y est entre -1 et 0 : on prend l'unique angle qui est entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 (l'autre est entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$).

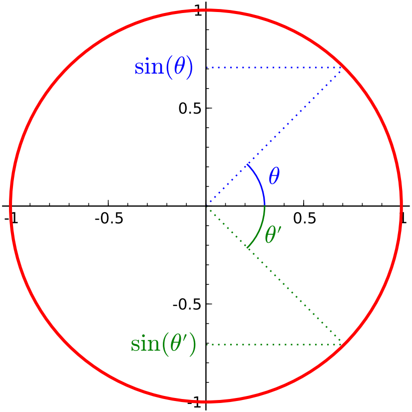


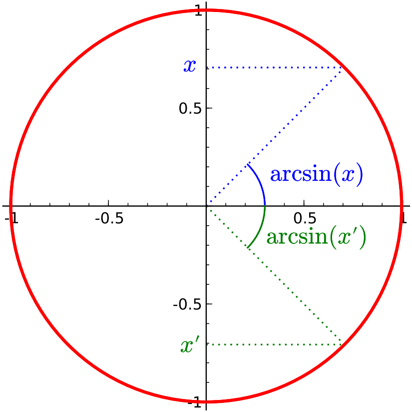


Conclusion

Définition du arcsin

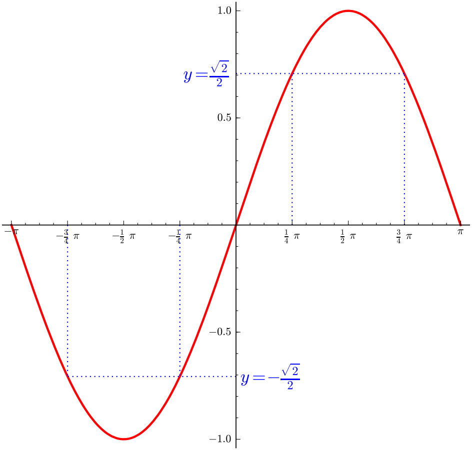
Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'unique angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ qui vérifie $\sin\theta = x$.





Arcsin : 2ème point de vu

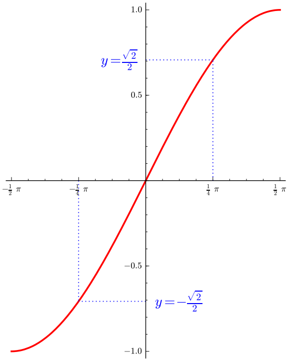
On peut aussi utiliser la courbe du sinus pour voir qu'il n'est pas suffisant de se restreindre à l'intervalle $[-\pi,\pi[$.
Chaque y dans $[-1,1]$ (sauf 0) admet deux antécédents :



Monotonicité et bijection

Par contre, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est strictement monotone et donc chaque $y \in [-1, 1]$ possède un unique antécédent θ dans cet intervalle.

On dit que la fonction sinus induit une bijection entre les intervalles $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et $[-1, 1]$.



Propriétés de l'arcsinus

Arcsinus : définition

$$\left.\begin{array}{c} \theta = \arcsin(y) \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \sin(\theta) = y \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Notons qu'on a

Arcsinus : propriétés

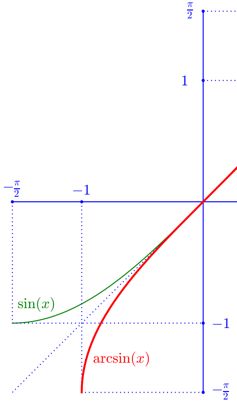
$$\sin(\arcsin(y)) = y, \qquad \text{pour tout } y \in [-1, 1]$$

et

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta, \qquad \text{pour tout } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

Arcsinus : courbe représentative

(x, y) est un point de la courbe du sinus si $y = \sin(x)$. Mais alors $x = \arcsin y$, et donc (y, x) est un point de la courbe de l'arcsinus. Les deux courbes sont dont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Dérivée de la fonction Arcsinus

On cherche la dérivée de la fonction $y = \arcsin x$.

Ecrivons cette relation comme

$$x = \sin y.$$

La dérivée du côté gauche est 1 et la dérivée du côté droit est $\cos y \cdot y'$ (car y est une fonction de x). On a montré :

$$1 = \cos y \cdot y' \quad \text{donc} \quad y' = \frac{1}{\cos y} \quad \text{donc} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

On peut voir (feuille de TD) que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, donc

A connaître

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad x \in]-1, 1[$$

Resumé sur la fonction réciproque

Ce qu'on a vu pour la fonction arcsin marche en général :

Fonction réciproque

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Ecrivons J pour l'image de I par f. Alors

1. La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ existe et est définie par

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &\in I \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \\ y &\in J \end{aligned}\right.$$

2. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Pour plus de détails voir la section suivante.

Arccos : définition

La restriction du cosinus au domaine $[0, \pi]$ est strictement croissante, donc admet une fonction réciproque, notée arccos :

Définition de arccos

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ qui vérifie $\cos\theta = x$.

On a

$$\begin{aligned} [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Sa dérivée est

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Arccos : caractérisation

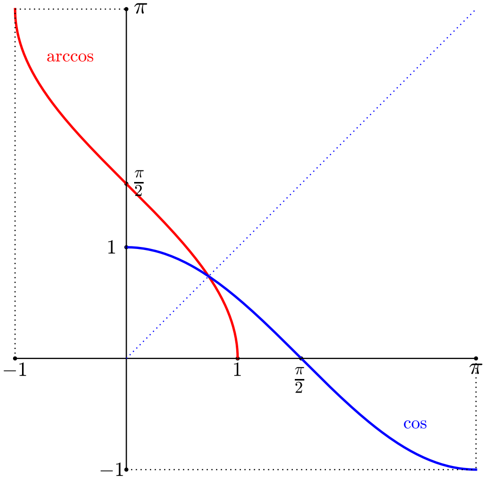
Proposition 2.1

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \arccos(x) \\ -1 \leq x \leq 1\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\cos(\theta) = x \\ 0 \leq \theta \leq \pi\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}\cos(\arccos(x)) = x, & \text{pour tout } x \in [-1,1] \\ \arccos(\cos(\theta)) = \theta, & \text{ssi } \theta \in [0,\pi]\end{array}$$

Donc $\cos(\arccos(x)) = x$ toujours, c.à.d. sur tout le domaine de définition de arccos.

Arccosinus : courbe représentative



Arctan : définition

La restriction de la fonction tangente au domaine $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante, donc admet une fonction réciproque, notée arctan :

Définition de arctan

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $\tan\theta = y$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\\ y &\mapsto \arctan(y) \end{aligned}$$

Sa dérivée est

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Arctan : caractérisation

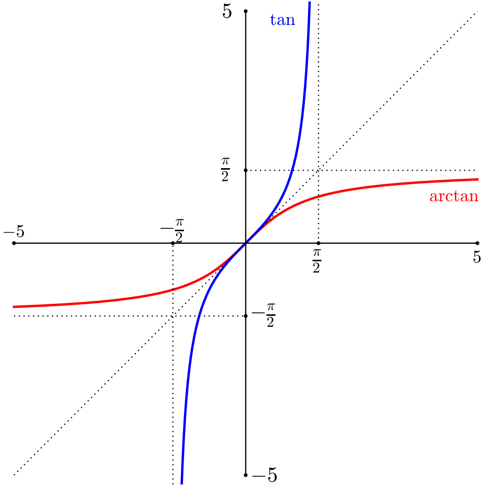
Proposition 2.2

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \arctan(x)\\ x \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\tan(\theta) = x\\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}\tan(\arctan(x)) = x, & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\\ \arctan(\tan(\theta)) = \theta, & \text{ssi } \theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\end{array}$$

Donc $\tan(\arctan(x)) = x$ toujours, c.à.d. sur tout le domaine de définition de arctan.

Arctan : courbe représentative



Bijectivité et existence d'une fonction réciproque

Voici quelques précisions sur la fonction réciproque

Définition 2.3

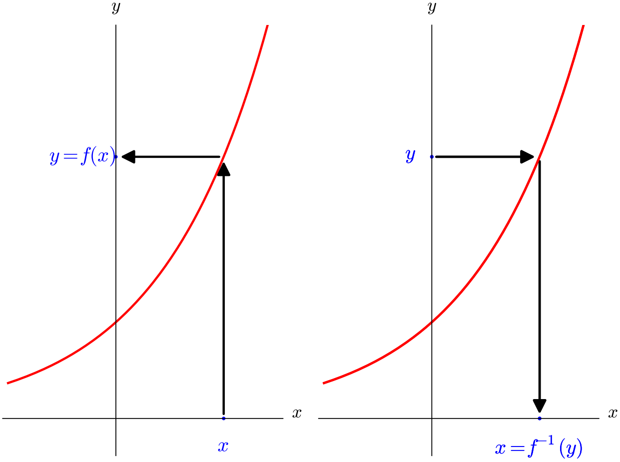
- Une fonction $f : I \to J$ est bijective si tout y de J admet un unique antécédent $x \in I$. Autrement dit, pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in I$.
- Dans ce cas, la fonction réciproque, noté f^{-1}, est le procédé $f^{-1} : J \to I$, qui à $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$.

On a donc $x \in I$ et $y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$.

Proposition 2.4

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in I$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in J$$

Représentation graphique



La fonction réciproque d'une fonction monotone

Proposition 2.5

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors

1. La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe.
2. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. f et f^{-1} ont le même sens de variation.
4. Si f est dérivable et si sa dérivée ne s'annulle pas, alors f^{-1} est dérivable et
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

La symétrie du (2) implique qu'une tangente horizontale (autrement dit $f' = 0$) de la courbe représentative de f donne lieu à une tangente verticale (autrement dit $(f^{-1})' = \infty$) de la courbe représentative de f^{-1}. Cela explique l'hypothèse $f'(0) \neq 0$ du (3).

Dérivée de la fonction Arcsinus

Utilisons la formule de la proposition pour retrouver la dérivée de la fonction $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

On a $f(x) = \sin x$, donc $f'(x) = \cos x$, donc (4) de la proposition donne :

$$\arcsin'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

On utilise comme avant (voir feuille de TD) que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, donc

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$

Soit $n \geq 2$ un entier. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \rightarrow & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $X = [0,+\infty[$.
L'image de f est $Y = [0,+\infty[$ (faire un dessin !).
f admet donc une fonction réciproque, définie sur $Y = [0,+\infty[$ qu'on appelle fonction racine n-ième et qu'on note par $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$.

Racine n-ième

$$\left.\begin{array}{l} y = x^n \\ x \in [0,+\infty[\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in [0,+\infty[\end{array}\right.$$

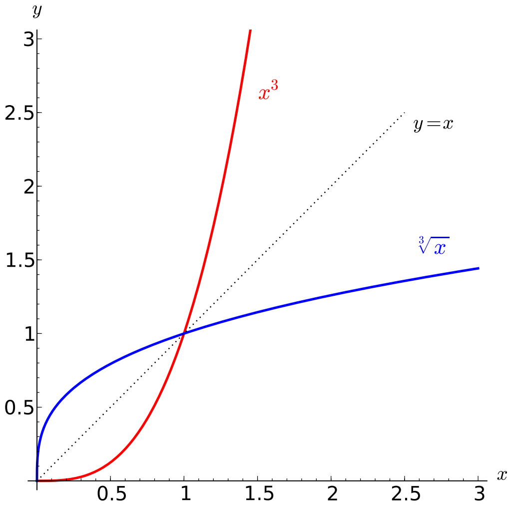
Vu qu'il s'agit de fonctions réciproques, on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.
Notons qu'on a aussi $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$.

Proposition 2.6

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad \forall x > 0.$$

Le graphe de $x \to \sqrt[n]{x}$ se déduit de celui de $x \to x^n$ par symétrie par rapport à la première bissectrice.
La droite tangente horizontale de $x \to x^n$ en 0 donne lieu à une droite verticale de $x \to \sqrt[n]{x}$ en 0.

Représentation graphique pour $n = 3$



Prérequis

On suppose connu :

- Écriture algébrique, conjugué
- Représentation géométrique
- Module, argument
- Écriture trigonométrique

Convention

z et w désignent toujours des nombres complexes.

Ecriture exponentielle

Définition 3.1

On pose

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Si on représente

$$U = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

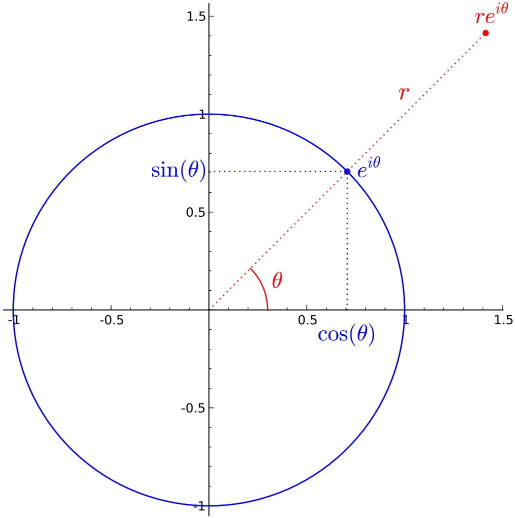
dans le plan complexe, alors U correspond au cercle d'unité.

Proposition 3.2

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ peut être écrit comme

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0 \qquad \text{(forme exponentielle)}$$

Représentation graphique de $re^{i\theta}$.



Les formules d'addition

Notons que

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

et

$$e^{i(\alpha+\beta)} = (\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

En utilisant les formules d'addition du sin et cos :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

on voit que

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Astuce

On peut retrouver les formules d'addition en développant

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Propriétés

Proposition 3.3

Soient $r, s > 0$. Alors

1. $(r \cdot e^{i\alpha}) \cdot (s\, e^{i\beta}) = (r \cdot s) \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$
2. $\overline{r \cdot e^{i\alpha}} = r \cdot e^{-i\alpha}$
3. $\dfrac{1}{r \cdot e^{i\alpha}} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{-i\alpha}$
4. $\dfrac{r \cdot e^{i\alpha}}{s \cdot e^{i\beta}} = \dfrac{r}{s} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}$

Formule du binôme

Rappelons la convention $0! = 1$ et la définition des coefficients binômiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, \dots, n\}, \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On a alors

Proposition 3.4 (Formule du binôme)

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 3.5

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Formules de base

Notons qu'on a

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad\qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

En prenant la somme et la différence de ces deux égalités on obtient

Proposition 3.6 (Formules d'Euler)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple 3.7

Linéariser $\sin^3 x$.

Solution

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} + 3e^{-ix} - 3e^{-i3x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right] = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

Racines carrées : définition et exemples

Définition 3.8

On dit que w est une racine carrée de z si w vérifie $w^2 = z$.

Exemple 3.9

Vérifier que :

- 2 et -2 sont des racines carrées de 4.
- i et $-i$ sont des racines carrées de -1.
- $1 - i$ et $-1 + i$ sont des racines carrées de $-2i$.

Par définition, $\sqrt{4}$ est l'unique racine carrée de 4 qui est positive.
On peut donc dire que les racines carrées de 4 sont $\sqrt{4}$ et $-\sqrt{4}$.

Si on voudrait définir $\sqrt{-2i}$, il faudrait faire un choix entre $1 - i$ et $-1 + i$. Il n'y a pas de choix naturel, donc on n'utilise pas la notation $\sqrt{z}$ si z est complexe (pas réel).

Méthode pour déterminer les racines carrées

L'exemple suivant donne la méthode générale pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.

Exemple 3.10

Déterminer les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Solution

On cherche w qui vérifie

$$w^2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Si on pose $w = \alpha + i\beta$, alors

$$w^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta.$$

Donc on obtient les relations

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1$$
$$2\alpha\beta = -\sqrt{3}$$

Pour simplifier les calculs on rajoute la relation $|w|^2 = |1 - i\sqrt{3}|$, qui s'écrit comme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{1+3} = 2.$$

Il faut donc résoudre le système suivant :

Solution (suite)

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1 \tag{1}$$
$$2\alpha\beta = -\sqrt{3} \tag{2}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 \tag{3}$$

• La somme de (1) et (3) donne $2\alpha^2 = 3$, donc

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

• Si on soustrait (1) de (3), alors on obtient $2\beta^2 = 1$, donc

$$\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• L'équation (2) implique que α et β ont des signes opposés.
Donc on trouve les racines carrées

$$w_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad w_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -w_1.$$

Méthode générale

Cette méthode marche toujours :

Recette pour déterminer les racines carrées

$w = \alpha + i\beta$ est racine carrée de z si et seulement si α et β vérifient

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \mathrm{Re}(z) \\ 2\alpha\beta &= \mathrm{Im}(z) \\ \alpha^2 + \beta^2 &= |z| \end{aligned}$$

Proposition 3.11

Chaque nombre complexe $z \neq 0$ admet deux racines carrées w et $-w$.

Racines carrées sous forme exponentielle

Exemple 3.12

1. Exprimer $z = 1 - i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer les racines carrées de z sous forme exponentielle.

Réponse. On a $|z| = 2$ et $\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On cherche $w = \rho e^{i\alpha}$ tel que $w^2 = z$, ce qui donne

$$\rho^2 e^{i2\alpha} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On obtient $\rho = \sqrt{2}$ et $2\alpha \equiv -\frac{\pi}{3}\,(2\pi)$, donc $\alpha \equiv -\frac{\pi}{6}\,(\pi)$.
Les racines carrées de $z = 1 - i\sqrt{3}$ sont donc

$$w_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{et} \qquad w_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -w_1.$$

On a $w_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc on trouve le même résultat qu'avec la méthode précédent.

Formule pour les racines carrées sous forme exponentielle (complément)

Proposition 3.13

Les racines carrées de $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, sont

$$\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$

Démonstration On cherche w t.q. $w^2 = z$.

- Posons $\omega = \rho e^{i\alpha}$, où $\rho \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (sont des inconnues).
  On cherche donc ρ et α tel que
  $$\rho^2 e^{i2\alpha} = re^{i\theta}.$$
- Comme $r > 0$ et $\rho \geq 0$ on obtient $\rho = \sqrt{r}$.
  On obtient aussi $2\alpha \equiv \theta\,(2\pi)$.
  Les solutions de cette équation sont $2\alpha_k = \theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha_k = \frac{\theta}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit de prendre $k = 0, 1$.
- Conclusion : les racines carrées de $z = re^{i\theta}$ sont
  $$\omega_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_0.$$

Racines d'un trinôme

On cherche les racines du trinôme

$$p(z) = az^2 + bz + c,$$

où a, b, c sont des coefficients réels ou complexes, $a \neq 0$. Comme dans le cas réel :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de p (qui est réel ou complex).

Racines d'un trinôme (suite)

Si on note par w une des deux racines carrées de Δ, alors on a :

$$\begin{aligned} p(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{w^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{w}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{w}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{w}{2a}\right) \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$p(z) = a\left(z - \frac{-b-w}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+w}{2a}\right).$$

Racines d'un trinôme (resumé)

Conclusion :

Racines d'un trinôme

- Les racines du trinôme $p(z) = az^2 + bz + c$ sont

$$z_1 = \frac{-b+w}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-w}{2a},$$

ou w est une racine carrée du discriminant Δ.

- On peut écrire

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Remarque 3.14

On a

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Cas particulier et exemple

Notons que si $\Delta = 0$, alors on a $z_2 = z_1$ et donc

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_1) = a(z - z_1)^2.$$

Notation 3.15

Dans ce cas, on dit que z_1 est une racine double

On peut donc dire :

A retenir

Un trinôme (réel ou complexe) admet toujours deux racines, comptées avec multiplicité.

Exemple 3.16

$z^2 - (5 + 3i)z + 7i + 4 = 0.$

Solution

1. On trouve $\Delta = 2i$.
2. Une racine de Δ est $\omega = 1+i$. (Calcul sous forme algébrique ou écrire $\Delta = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Une racine carrée est alors $\omega = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$.)
3. Les solutions de $z^2-(5+3i)z+7i+4=0$ sont $z_1 = 3+2i$ et $z_2 = 2+i$.

Racines d'un trinôme réel

Et si le trinôme $p(z) = az^2 + bz + c$ est réel (c.à.d. a, b, c réels) ?

Si $\Delta > 0$ alors on a deux racines réelles et si $\Delta = 0$ on a une racine réelle double.

Si $\Delta < 0$, disons $\Delta = -3$, alors les racines carrées de Δ sont $\pm i\sqrt{3}$.

Les racines de p sont alors

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{3}}{2a} \qquad \text{et} \qquad w_2 = \frac{-b - i\sqrt{3}}{2a}.$$

Notons que w_1 et w_2 sont complexe conjugués.

À retenir !

Un trinôme réel dont le discriminant est négatif à deux racines complexes (non réelles) conjuguées.

Exemple 3.17

$P(z) = z^2 + z + 1.$

solution

Réponse. $\Delta = -3$. Les racines carrées de Δ sont $\pm i\sqrt{3}$. Les racines de P sont

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Racines n-ièmes de l'unité

Définition 3.18

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. On dit que $w \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de z si $w^n = z$.
2. Si $z = 1$ alors on dit que w est une racine n-ième de l'unité.

On va traiter dans cette section le cas des racines n-ième de l'unité, et parler du cas général dans la section suivante.

Exemple 3.19

i est une racine 4-ièmes de l'unité, car $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

On va expliquer comment déterminer toutes les racines n-ièmes de l'unité en travaillant le cas $n = 4$.

Méthode pour déterminer les racines 4-ièmes de l'unité

On cherche w tel que

$$w^4 = 1.$$

Posons

$$w = \rho e^{i\alpha},$$

où $\rho \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons que

$$1 = e^{i0}.$$

On cherche donc ρ et α tel que

$$\rho^4 e^{i4\alpha} = e^{i0}$$

Comme $\rho \geq 0$ on obtient

$$\rho = 1.$$

Racines quatrièmes (suite)

α vérifie

$$4\alpha \equiv 0\,(2\pi), \qquad \text{donc} \qquad 4\alpha = k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Donc α est de la forme

$$\alpha = k\frac{2\pi}{4} = k\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Vu que α est un angle (l'argument de w), on se restreint à $[0, 2\pi[$:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Conclusion : Les racines 4-ièmes de l'unité sont

$$w_0 = e^{i0} = 1, \quad w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad w_2 = e^{i\pi} = -1, \quad w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Représentation des racines 4-ièmes de l'unité

Notons que les racines 4-ièmes sont de module 1 et il faut augmenter l'argument par $\frac{\pi}{2}$ pour passer de l'une à la suivante.

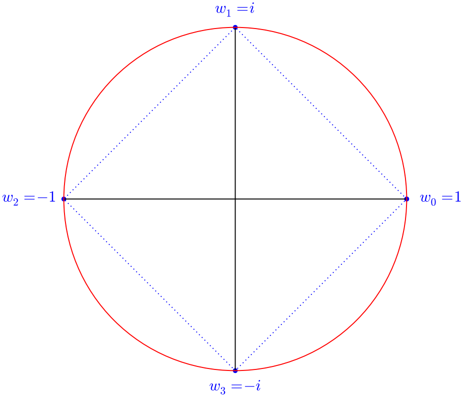


FIGURE – Les racines 4-ièmes de l'unité sont les sommets d'un carré.

Cas général

La même méthode montre que

Théorème 3.20 (Racines n-ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $w^n = 1$ admet n solution distinctes dans $\mathbb{C}$:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Proposition 3.21

Les images des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés, tracées sur le cercle unité. Un des sommets est le point d'affixe 1.

À retenir

Il y a n racines n-ièmes de l'unité.

Exemples

Exemple 3.22 (à connaıitre)

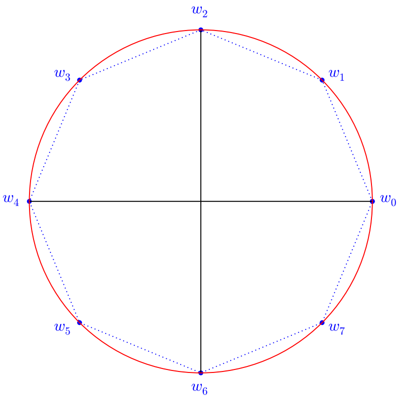
1. Si $n = 2$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$.
2. Si $n = 3$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
   On écrit j au lieu de ω_1. On a alors
   $$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$
   et $\omega_2 = \bar{j}$: Les racines cubiques de l'unité sont donc 1, j et $\bar{j}$.
3. Si $n = 4$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\omega_2 = e^{i\pi} = -1$, $\omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

Exemple 3.23

Déterminer géométriquement les racines 8-ièmes de l'unité.

Représentation des racines 8-ièmes de l'unité

Les racines 8-ièmes sont les sommets d'un octagone régulier :



On a $w_0 = 1$, $w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, e.t.c.

Propriétés des racines n-ièmes de l'unité (complément)

Théorème 3.24

1. *Si $w \neq 1$ est une racine n-ième de l'unité, alors*

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

2. *La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.*

Démonstration (complément)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})(1-z) = 1-z^n$. Donc si $z \neq 1$, alors on a

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Donc si $w \neq 1$ est racine n-ième de 1, on a $1-w \neq 0$ et $1-w^n = 0$, d'ou la conclusion.

2) Les racines n-ièmes de l'unité sont $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = w_1^k$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.
Si on utilise 1 avec $w = w_1$, on obtient

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} w_1^k = \sum_{k=0}^{n-1} w_k.$$

Méthode pour déterminer les racines n-ièmes

Soit z un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, où $r > 0$. On cherche $u = \rho e^{i\alpha}$, $\rho > 0$, tel que $u^n = z$.
Il faut donc trouver ρ et α tel que

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

• On obtient $\rho = \sqrt[n]{r}$.
• On obtient aussi $n\alpha \equiv \theta\,(2\pi)$. Les solutions de cette équation sont $\alpha_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de $u^n = z$ sont donc

$$u_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

(On s'arrête avec $k = n-1$, car on a $u_n = u_0$, $u_{n+1} = u_1, \dots$)

Racines n-ièmes d'un complexe non nul

Une adaptation de la méthode pour déterminer les racines n-ièmes de l'unité donne :

Théorème 3.25 (Racines n-ièmes d'un nombre complexe)

Tout complexe non nul $z = re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes :

$$u_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Proposition 3.26

Si on note par $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ les racines n-ièmes de l'unité, alors

$$u_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot w_k, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Exemple

Il est facile de deviner une racine n-ième de $z = re^{i\theta}$:

$$u_0 = r^{\frac{1}{n}}\ e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta}{n}}.$$

On obtient les autres en multipliant u_0 par les racines n-ièmes de l'unité :

$$u_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Exemple 3.27

Calculer les racines quatrièmes de

$$z = \frac{16 + 16i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

Solution

On a

$$16+16i\sqrt{3}=32(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=32e^{i\frac{\pi}{3}},$$
$$\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc

$$z=\frac{16+16i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{32e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=16e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=16e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Les racines quatrièmes de z sont ($n=4$, $r=16$, $\theta=\frac{\pi}{6}$) :

$$u_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=2\cdot e^{i(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2})},\qquad k\in\{0,1,2,3\}.$$

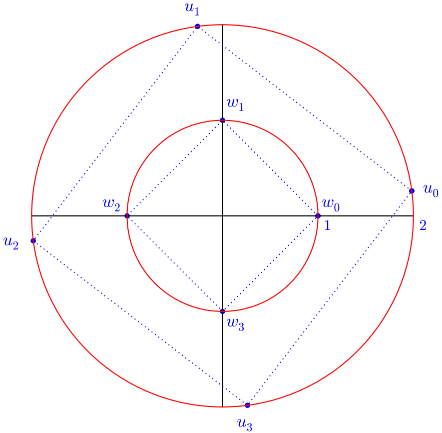
On peut écrire

$$u_k=2\cdot e^{i\frac{\pi}{24}}\cdot e^{ki\frac{\pi}{2}}$$

où $w_k=e^{ki\frac{\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3$ sont les racines quatrièmes de l'unité.

Représentation graphique de l'exemple

On obtient les racines 4-ièmes de l'exemple des racines 4-ièmes de l'unité par une homothétie de rapport 2 et une rotation par l'angle $\frac{\pi}{24}$.



Représentation géométrique des racines *n*-ièmes (complément)

Pour obtenir une représentation dans le plan des racines n-ièmes de $z = re^{i\theta}$:

1. on représente les racines n-ièmes de l'unité.
2. on applique une rotation par l'angle $\frac{\theta}{n}$.
3. on applique une homothétie de rapport $\sqrt[n]{r}$.

Vocabulaire sur les polynômes

Définition 4.1

1. On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ une fonction qui s'écrit
$$P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$
pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. On dit que a_i est le coefficient de P de degré i, pour $i = 1, \ldots, n$.
2. Le degré du polynôme P est le plus grand entier pour lequel le coefficient de P est non nul. Par convention : $deg(0) = -\infty$.
3. On note $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Convention

Pour ce chapitre : P, Q sont toujours des polynômes.

Exemples

Exemple 4.2

Quel est le degré des polynômes

1. $P(X) = 3X^2 - 5X$.
2. $P(X) = 5$.
3. $P(X) = 3X^2 - 5X + 1 - 3X^2 + 5$.
4. $P(X) = 0$.
5. $P(X) = (X-1)(X+1)(X-5)$.
6. $P(X) = iX^3 + (3+i)X$.

Exercice 4.3

Quel est $\deg(PQ)$?

Somme et produit de polynômes (complément)

La somme et le produit de deux polynômes est encore un polynôme et on a

Proposition 4.4

1. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

Division euclidienne : exemple

Exercice 4.5

Pouvez-vous deviner comment diviser X^3+3X^2+2X+1 par X^2+1 ?

Solution type : division euclidienne

Réponse.

$$
\begin{array}{rcccc|l}
 & X^3 & +3X^2 & +2X & +1 & X^2+1 \\ \cline{6-6}
X(X^2+1) \rightarrow & X^3 & & +X & & X+3 \\ \cline{2-5}
\text{différence} \rightarrow & & 3X^2 & +X & +1 & \\
3(X^2+1) \rightarrow & & 3X^2 & & +3 & \\ \cline{2-5}
\text{différence} \rightarrow & & & X & -2 &
\end{array}
$$

Donc

$$X^3+3X^2+2X+1=(X^2+1)(X+3)+X-2.$$

On écrit aussi

$$\frac{X^3+3X^2+2X+1}{X^2+1}=X+3+\frac{X-2}{X^2+1}$$

Division euclidienne : résultat général

On dit que $Q = X + 3$ est le quotient, et $R = X - 2$ est le reste.

Théorème 4.6

Pour tout A et B (des polynômes), $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$A = BQ + R, \qquad \textit{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q et R s'appellent respectivement quotient et reste dans la division euclidienne de A par B.

Plus loin on va écrire

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}, \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Divisibilité d'un polynôme par un autre

Définition 4.7

On dit que B divise A si il existe Q tel que $A = BQ$ (donc le reste de la division euclidienne de A par B est zero).

Exemple 4.8

Montrer que :

1. $X^2 + X + 1$ divise $X^3 - 1$.
2. $X^2 + 1$ divise $X^4 - 1$.

Solution type : Divisibilité d'un polynôme par un autre

(1) On montre que X^2+X+1 divise X^3-1

$$
\begin{array}{cccc|l}
X^3 & & & -1 & X^2+X+1 \\
\cline{5-5}
X^3 & +X^2 & +X & & X-1 \\
\cline{1-4}
 & -X^2 & -X & -1 & \\
 & -X^2 & -X & -1 & \\
\cline{1-4}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Le reste de la division euclidienne de X^3-1 par X^2+X+1 est nul, ce qu'il fallait montrer.
On a $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$. *Vérifier cette égalitée !*
(2) Pour montrer que X^2+1 divise X^4-1, on peut éviter de faire une division euclidienne et utiliser une égalité remarquable : $X^4-1=(X^2-1)(X^2+1)$.

Rappel : Racines d'un trinome

On a vu qu'un trinôme s'écrit toujours sous la forme

$$P(X) = \lambda(X-r)(X-s),$$

ou r et s sont des racines réelles ou complexes. (Il est possible que $r = s$.)

On a donc équivalence entre :

- $P(r) = 0$;
- P « contient » le facteur $X - r$. Autrement dit, $X - r$ divise P.

Racines

Soit maintenant P un polynôme de degré n arbitraire.

Définition 4.9

On dit que $r \in \mathbb{R}$ (ou $r \in \mathbb{C}$) est racine (ou zéro) du polynôme P si r vérifie $P(r) = 0$.

Théorème 4.10

r est racine de P si et seulement si on peut mettre $X - a$ en facteur, autrement dit, il existe Q tel que

$$P(X) = (X - r)Q.$$

Définition 4.11

On dit que r est une racine de multiplicité (ou l'ordre) k si on peut écrire

$$P(X) = (X - r)^k Q(X), \qquad \text{avec} \qquad Q(r) \neq 0.$$

Exemples

Exemple 4.12

1. Vérifier que 1 est racine de $P(X) = X^3 - X^2 - X + 1$.
2. Effectuer une division euclidienne de P par $X - 1$.
3. Déterminer toutes les racines de P.

Solution type : Racines d'un polynôme

Une division euclidienne donne :

$$(X^3 - X^2 - X + 1) = (X-1)(X^2-1).$$

Notons que

$$X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

Conclusion :

$$(X^3 - X^2 - X + 1) = (X-1)(X-1)(X+1) = (X-1)^2(X+1).$$

- 1 est une racine double.
- -1 est une racine simple.
- *P*, qui est de degré trois, admet trois racines, comptées avec multiplicité.

Démonstration du théorème 4.10 (pour aller plus loin)

Démonstration du théorème 4.10 :
En divisant P par le polynôme de degré 1 $X-a$, on trouve un polynôme Q et un reste R qui vérifient :

$$P(X)=(X-a)\cdot Q(X)+R(X), \qquad \deg(R)<1.$$

La condition $\deg(R)<1$ implique que R est constant, disons $R=c$, donc

$$P(X)=(X-a)\cdot Q(X)+c.$$

En évaluant cette égalité en $X=0$ on déduit que $c=0$, ce qu'il fallait montrer.

Un autre exemple

Exemple 4.13

Déterminer les zéros (avec multiplicité) de $P(X) = 2X^4 + 4X^2 + 2$.

Réponse.

$$\begin{aligned} P(X) &= 2(X^4 + 2X^2 + 1) \\ &= 2(X^2 + 1)^2 \\ &= 2\left((X - i)(X + i)\right)^2 \\ &= 2(X - i)^2(X + i)^2 \end{aligned}$$

- i est une racine double.
- $-i$ est une racine double.
- P, qui est de degré quatre, admet quatre racines, comptées avec multiplicité.

Un critère pour la multiplicité d'un zero (complément)

Exemple 4.14

Supposons que 0 est zero de P d'ordre 2.
Montrer que $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $P''(0) \neq 0$.

Réponse.

- La définition de la multiplicité d'un zero nous dit qu'on peut écrire $P(X) = X^2 Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
- On a $P(0) = 0$.
- On a $P'(X) = 2X\,Q(X) + X^2\,Q'(X)$, donc $P'(0) = 0$.
- On a $P''(X) = 2\,Q(X) + 4X\,Q'(X) + X^2\,Q''(X)$, donc $P''(0) = 2Q(0) \neq 0$.

Un critère pour la multiplicité d'un zero (complément)

L'exemple précédent donne une motivation pour le résultat suivant :

Théorème 4.15

a est racine de multiplicité k d'un polynôme P ssi

$$P(a) = 0,\ P'(a) = 0,\ \ldots, P^{(k-1)}(a) = 0,\ P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Exemple 4.16

Vérifier que 1 est racine d'ordre 3 de $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

Réponse. Un calcul montre que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) = 12 \neq 0$, donc 1 est zero d'ordre 3.

Le theorem de D'Alembert

Ce qu'on a vu pour les exemples est valable en général :

Théorème 4.17 (de D'Alembert)

Tout polynôme P de degré $n \geq 1$ admet n racines (complexes ou réelles), comptées avec multiplicités.

Un exemple d'une factorisation complexe

Exemple 4.18

Supposons que P est un polynôme qui a les racines suivantes :

- racine simples : -3, $1+i$,
- racine double : 2
- racines de multiplicitée trois : 1, $2i$.

Déterminer la forme générale de P.

Réponse. On sait que

$$P(X) = c(X+3)(X-1-i)(X-2)^2(X-1)^3(X-2i)^3, \qquad (*)$$

où c est une constante (qu'on ne connait pas).

On dit que $(*)$ est la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Le theorem de D'Alembert dit que tout polynôme P de degré n admet n racines réelles ou complexes (comptées avec multiplicitées), donc peut être écrit sous la forme :

$$P(X) = c\,(X - r_1)^{m_1}\,(X - r_2)^{m_2}\ldots,$$

où

- c est une constante
- r_1 est une racine de multiplicité m_1
- r_2 est une racine de multiplicité $m_2, \ldots$

Notation 4.19

Cette écriture s'appelle la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynôme irréductible (complément)

Le nom « facteur irréductible » vient du fait qu'on ne peut pas décomposer davantage un terme comme $(X-a)^k = (X-a)\cdots(X-a)$ en polynômes plus simples : $X-a$ est de degré 1 donc n'est pas le produit de deux polynômes (non constants).

Définition 4.20

On dit qu'un polynôme P est irréductible si on ne peut pas l'écrire comme produit de deux polynômes (non constants).

Un autre exemple d'une décomposition complexe

Exemple 4.21

Décomposer le polynôme

$$P(X) = X^3 - 8.$$

Réponse. Les racines de P sont les solutions de $X^3 = 8$, donc les racines troisièmes de l'unité, multiplié par 2 :

$$u_0 = 2 \qquad u_1 = -1 + i\sqrt{3} \qquad u_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

Conclusion

$$X^3 - 8 = (X-2)\left(X - (-1 + i\sqrt{3})\right)\left(X - (-1 - i\sqrt{3})\right).$$

La décomposition réelle de l'exemple précédent

Peut on trouver une décomposition réelle du polynôme réel $X^3 - 8$?

Les racines u_1 et u_2 sont complexes, mais

$$(X-u_1)(X-u_2) = \Big(X - (-1+i\sqrt{3})\Big)\Big(X-(-1-i\sqrt{3})\Big) = X^2+2X+4$$

est un trinôme réel !
Conclusion

$$X^3 - 8 = (X-2)(X^2+2X+4).$$

Les racines du trinôme X^2+2X+4 sont complexes (le discriminant est négatif).

On peut voir qu'on ne peut pas décomposer un tel polynôme en produit de deux polynômes réels (non constants).

On dit, qu'il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Méthode générale

Ce qu'on a vu pour l'exemple précédent marche en général :

Proposition 4.22

Soit P un polynôme réel.

- Si w est une racine complexe, alors son complexe conjugué $\bar{w}$ est aussi une racine.
- On sait donc qu'on peut factoriser P par $(X - w)(X - \bar{w})$.
- Si on développe $(X - w)(X - \bar{w})$, on obtient un trinôme réel.
- Le discriminant de ce trinôme est négatif (ses racines sont complexes conjuguées).
- Ce trinôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstrations (complément)

(1) Supposons que w est racine de P et démontrons que $\bar{w}$ l'est aussi : Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{0} = \overline{P(w)} = \overline{a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0} &= \overline{a_n}\,\overline{w}^n + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{w} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{w}^n + \cdots + a_1 \overline{w} + a_0 = P(\bar{w}).\end{aligned}$$

(2) Démontrons que $(X - w)(X - \bar{w})$ est un trinôme réel : Soit $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. $(X - w)(X - \bar{w}) = X^2 - (w + \bar{w})X + w\bar{w}$. Or $w + \bar{w} = 2x \in \mathbb{R}$ et $w\bar{w} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.
(3) Le discriminant est $4x^2 - 4(x^2 + y^2) = -4y^2 < 0$.

Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 4.23

Tout polynôme réel P peut être écrit comme produit :

- *d'une constante*
- *de termes de la forme $(X-a)^k$, où a est une racine rélle et k est la multiplicité de cette racine.*
- *de trinômes réels dont le discriminant est négatif (ces racines sont complexes conjuguées).*

Notation 4.24

La décomposition du corollaire s'appelle décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple

A retenir

- Un trinôme réel dont le discriminant est négatif (ces racines sont complexes conjuguées) est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- Tous les autres trinômes sont réductibles : On peut les écrire comme $\lambda \cdot (X - r) \cdot (X - s)$, r, s les racines réelles.
- Aucun polynôme de degré plus grand que 2 n'est irréductible.

Exemple 4.25 (Décomposition réelle sans passer par le complexe)

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1.$$

Solution type : Factorisation d'un polynôme qui a des racines complexes

- 1 est une racine évidente.
- Une division euclidienne de P par $X-1$ donne

$$P(X) = (X-1)(X^2+1).$$

- Le trinôme X^2+1 n'a aucune racine réel. (Les racines sont les solutions de $X^2 = -1$. Aussi : le discriminant est négatif.) Il est irréductible (non décomposable) dans $\mathbb{R}[X]$.
- Conclusion : La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P(X) = (X-1)(X^2+1).$$

Définition d'une fraction rationnelle

Définition 4.26

Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le rapport de deux polynômes :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)},$$

où P, Q sont deux polynômes, $Q \neq 0$.

$Q \neq 0$ veut dire que Q n'est pas le polynôme nul.

Exemple 4.27

$$\frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x+5}{(x-1)^2}$$

Fraction de nombres irréductible (complément)

Notons que la fraction de nombres entiers

$$\frac{525}{84}$$

n'est pas irréductible, car on peut diviser numérateur et dénominateur par 3. Pour transformer cette fraction en fraction irréductible il suffit de décomposer numérateur et dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$\frac{525}{84} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{25}{4}$$

Fraction rationnelle irréductible (complément)

On a la même chose pour les fractions rationnelles :

$$\frac{X^2-3X+2}{X^3-4X}=\frac{(X-1)(X-2)}{X(X-2)(X+2)}=\frac{X-1}{X(X+2)}=\frac{X-1}{X^2+2X}.$$

On a pu diviser numérateur et dénominateur par le même facteur $X-2$.
Ceci veut dire que 2 est une racine du numérateur et du dénominateur.

Définition 4.28

On dit qu'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est une fraction irréductible si P et Q n'ont aucun diviseur commun.

Une fraction a toujours une représentation en fraction irréductible et on va supposer pour la suite que les fractions rationnelles qu'on considère sont irréductibles.

Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle (réelle).

Restriction

On ne traite que le cas ou toutes les racines de Q sont réelles.

Théorème 4.29

Si le degré du numérateur de F est strictement plus petit que le degré du dénominateur, alors on peut écrire F comme somme de termes de la forme

$$\frac{c}{(X-a)^n},$$

où c est une constante, a est une racine de Q et n est un entier positif.

Notation 4.30

La décomposition du théorème s'appelle décomposition en éléments simples.

Unicité de la décomposition

Exemple 4.31

$$\frac{X+1}{(X-1)^2}$$

On va apprendre plus tard une méthode générale. Pour cet l'exemple on peut « se débrouiller » avec le calcul suivant :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{(X-1)+2}{(X-1)^2} = \frac{(X-1)}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$

On vérifie facilement qu'on a trouvé une décomposition en éléments simples. On a trouvé la seule façon de décomposer la fraction car :

Théorème 4.32

La décomposition en éléments simples est unique.

Exemple de décomposition théorique (cas : racine simple)

On va d'abord apprendre quelle est la forme générale de la décomposition en éléments simples, ce qu'on appelle forme théorique :

Exemple 4.33

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+3} + \frac{d}{x+5},$$

où a, b, c, d sont des constantes à déterminer.

On va voir plus loin comment déterminer les constantes a, b, c, d.

À Noter

- On rappelle qu'on a supposé que le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
- Le numérateur de la fraction rationnelle n'intervient pas dans la décomposition théorique.

Exemple de décomposition théorique (cas : racine multiple)

Exemple 4.34

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^3(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b_1}{x-2} + \frac{b_2}{(x-2)^2} + \frac{b_3}{(x-2)^3} + \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2}$$

Comme pour l'exemple précédent, le numérateur de la fraction rationnelle n'intervient pas dans la décomposition théorique.

Méthode de base pour déterminer les coefficients

On va maintenant expliquer commer déterminer les coefficients de la décomposition théorique.

Exemple 4.35

$$\frac{3X^2}{(X-2)(X+2)(X-1)}.$$

Solution

1. On commence par vérifier que le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
2. Décomposition théorique en éléments simples :
$$\frac{3X^2}{(X-2)(X+2)(X-1)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X-1}.$$
3. On détermine a : En multipliant par $X-2$ on obtient
$\dfrac{3X^2}{(X+2)(X-1)} = a + \dfrac{b(X-2)}{X+2} + \dfrac{c(X-2)}{X-1}$. $X=2$ donne $a=3$.
4. On détermine b : En multipliant par $X+2$ on obtient
$\dfrac{3X^2}{(X-2)(X-1)} = \dfrac{a(X+2)}{X-2} + b + \dfrac{c(X+2)}{X-1}$. $X=-2$ donne $b=1$.
5. De même $c=-1$.
6. Conclusion :
$$\frac{3X^2}{(X-2)(X+2)(X-1)} = \frac{3}{X-2} + \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X-1}.$$

Partie entière d'une fraction rationnelle

Et si $R = \dfrac{P}{Q}$ est tel que $\deg P \geq \deg Q$?

On effectue alors une division euclidienne :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}, \qquad \text{et} \quad \deg(P_1) < \deg(Q)$$

et on décompose $\dfrac{P_1}{Q}$.

Notation 4.36

E est appelé la partie entière de la fraction R

Solution

Exemple 4.37

$$F(X) = \frac{3X^3 - 12X + 12}{X^3 - X^2 - 4X + 4}$$

• Une division euclidienne donne

$$3X^3 - 12X + 12 = (X^3 - X^2 - 4X + 4)3 + 3X^2,$$

on a donc :

$$F(X) = \frac{3X^3 - 12X + 12}{X^3 - X^2 - 4X + 4} = 3 + \frac{3X^2}{X^3 - X^2 - 4X + 4}.$$

• On oublie pour le moment la partie entière 3 et on décompose

$$\frac{3X^2}{X^3 - X^2 - 4X + 4}.$$

Solution (suite)

- On peut voir que

$$X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2).$$

- On a vu (exemple 4.35) :

$$\frac{3X^2}{(X-2)(X+2)(X-1)} = \frac{3}{X-2} + \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X-1}.$$

- Conclusion :

$$\frac{3X^3 - 12X + 12}{X^3 - X^2 - 4X + 4} = 3 + \frac{3}{X-2} + \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X-1}.$$

Recette pour la décomposition en éléments simples

Recette pour la décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle.

1. Si $\deg P$ n'est pas strictement plus petit que $\deg Q$, faire une division euclidienne : $\dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{P_1}{Q}$, et continuer les étapes suivantes avec $\dfrac{P_1}{Q}$.
2. Factoriser le dénominateur (déterminer ses racines).
3. Trouver la « décomposition théorique » en éléments simples.
4. Trouver les coefficients des éléments simples.

Exemple d'une décomposition complexe

On traite dans cette section un exemple de la décomposition en éléments simples ou le dénominateur a une racine complexe :

Exemple 4.38

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle

$$\frac{-4}{X^3 - X^2 + X - 1}.$$

Solution

- Aucune division euclidienne n'est nécessaire.
- On a déjà vu que $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$.
  Donc la décomposition du numérateur dans $\mathbb{C}[X]$ est
  $$Q(X) = (X-1)(X+i)(X-i).$$
- On pose (par analogie avec le cas réel) :
  $$\frac{-4}{(X-1)(X+i)(X-i)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-i}.$$
- Pour déterminer a on multiplie par $X-1$ et on pose $X=1$.
  On trouve $a=-2$.
- Pour déterminer b on multiplie par $X+i$ et on pose $X=-i$.
  On trouve
  $$b = \frac{-4}{(-i-1)(-2i)} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i.$$

Solution (suite)

- Pour déterminer c on multiplie par $X - i$ et on pose $X = i$.
  On trouve $c = 1 - i$.
- Conclusion :

$$\frac{-4}{(X-1)(X+i)(X-i)} = \frac{-2}{X-1} + \frac{1+i}{X+i} + \frac{1-i}{X-i}.$$

Décomposition réelle pour le même exemple

On cherche une décomposition réelle de la fraction de l'exemple précédent.

• On commence avec la décomposition complexe qu'on vient de trouver :

$$\frac{-4}{(X-1)(X+i)(X-i)} = \frac{-2}{X-1} + \frac{1+i}{X+i} + \frac{1-i}{X-i}.$$

• On regroupe les « termes conjugués ». Le côté gauche devient

$$\frac{-4}{(X-1)(X+i)(X-i)} = \frac{-4}{(X-1)(X^2+1)}.$$

• La partie complexe du côté droit devient

$$\frac{1+i}{X+i} + \frac{1-i}{X-i} = \frac{(1+i)(X-i)+(1-i)(X+i)}{(X+i)(X-i)} = \frac{2X+2}{X^2+1}$$

• Conclusion :

$$\frac{-4}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{-2}{X-1} + \frac{2X+2}{X^2+1}$$

Exemple de décomposition théorique réelle

L'exemple précédent a fait apparaître un nouveau « élément simple » :

$$\frac{2X+2}{X^2+1}.$$

Le dénominateur est un trinôme irréductible et le numérateur est de la forme $aX+b$.

Cela se généralise comme on va voir maintenant.

On peut trouver la décomposition réelle en éléments simples sans passer par la décomposition complexe.

Pour cela, il faut connaitre la « forme théorique ».

On ne va pas donner la formule générale, mais l'expliquer avec des exemples.

Exemple de décomposition en éléments simples

Le dénominateur du premier exemple contient le trinôme irréductible $X^2 + 1$:

Exemple 4.39

$$\frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Exemple de décomposition théorique réelle (suite)

Le dénominateur du deuxième exemple contient le trinôme irréductible $x^2 + x + 1$ (avec puissance 2) et $X^2 + 1$ (avec puissance 3) :

Exemple 4.40

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2(x^2+1)^3} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_3}{(x+1)^3} +$$
$$+ \frac{b_1 x + c_1}{x^2+x+1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+x+1)^2} +$$
$$+ \frac{d_1 x + e_1}{x^2+1} + \frac{d_2 x + e_2}{(x^2+1)^2} + \frac{d_3 x + e_3}{(x^2+1)^3}$$

Pour les exercices et les épreuves, on se limite ou cas de l'exemple 4.39 (trinôme irréductible avec puissance 1.)

Retour à l'exemple précédent

On cherche sans passer par le complexe la décomposition de

$$\frac{-4}{X^3-X^2+X-1}.$$

- On a déjà vu que $Q(X)=X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)$.
- La forme théorique de la décomposition réelle est

$$\frac{-4}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+1}.$$

- Pour déterminer a on multiplie par $X-1$ et on pose $X=1$. On trouve $a=-2$.
- Pour trouver b et c on multiplie par X^2+1 et on pose $X=i$. On trouve

$$bi+c=\frac{-4}{i-1}=\frac{-4(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=2+2i$$

Donc $b=2$ et $c=2$.

Définition de primitive

Définition 5.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Exemple 5.2

Une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est

$$F(x) = \ln(x),$$

mais aussi

$$G(x) = \ln(2x).$$

Existence d'une primitive

Théorème 5.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors

1. *f admet une primitive sur I.*
2. *Si F est une primitive de f alors l'ensemble des primitives de f est*

$$\{F + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

Notation 5.4

On dénote l'ensemble des primitives par $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et aussi par $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Pour l'exemple

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

on avait trouvé les primitives $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(2x)$.
Notons que $g(x) = \ln(2) + \ln(x)$.

Primitives des fonctions usuelles à connaître

$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\sin(\lambda x)$	$-\dfrac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)$
$\cos(\lambda x)$	$\dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)$

Primitives des fonctions usuelles à connaître

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$a^x \ (a>0, a\neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}\,a^x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x=-\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Définition de l'intégrale

Définition 5.5

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, alors l'integrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est définie par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 5.6

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas du choix d'une primitive F de f.

Linéarité

Proposition 5.7

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et α, β des nombres réels. Alors

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples de linárisation

Exemple 5.8

$$\int \frac{1}{2}(x^2+2)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Exemple 5.9

$$\int \sin(3x)\cdot\cos(2x) \,\mathrm{d}x.$$

Solution

$$\begin{aligned}\sin(3x)\cdot\cos(2x) =& \frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\cdot\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} = \\ =& \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right] = \frac{1}{2}[\sin(5x)+\sin(x)]\end{aligned}$$

Aussi : $\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos\cdot a\sin b$, donc
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$, donc
$\sin a\cdot\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$.)

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \sin(5x)+\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{10}\cos(5x)-\frac{1}{2}\cos(x)+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Intégration par parties

On rappelle que

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

En intégrant cette relation on obtient

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x)\, \mathrm{d}x + \int u'(x) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x$$

Donc on a

Proposition 5.10

Soient u et v des fonctions dérivables avec dérivée continue sur un intervalle I. Alors

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Remarques

- On dit qu'une fonction u qui est dérivable avec dérivée continue est de classe $\mathscr{C}^1$.
- u est alors dérivable, donc continue, donc sa primitive existe.
- u' est aussi continue, donc la primitive de u' existe.

Exemples d'intégration par parties

Exemple 5.11

$$\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$$

Exemple 5.12

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Exemple 5.13

$$\int e^x \cdot \sin(2x) \, \mathrm{d}x$$

Solution

$\int x \ln x \, \mathrm{d}x$: On va utiliser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$\int \ln x \, \mathrm{d}x$: On va utiliser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$.

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solution

$\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x$: On va utiliser $u(x) = \sin 2x$ et $v'(x) = e^x$.

$$\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x$$

On pose $u(x) = \cos 2x$ et $v'(x) = e^x$:

$$\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\int e^x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'on aura pu aussi commencer par $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin 2x$, mais dans ce cas on devrait continuer avec $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos 2x$.

Changement de variables

Soit F une primitive de f : $F' = f$. Alors

$$(F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'.$$

Donc

Proposition 5.14

Soient I et J des intervalles, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $u : I \to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si F est une primitive de f, alors

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemples

Exemple 5.15

$$\int x \cdot e^{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Exemple 5.16

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, \mathrm{d}x.$$

Solution de l'exemple 5.15 qui utilise la notation de la proposition

On pose $f(x) = e^x$ et $u(x) = x^2$.
Donc $f(u(x)) = e^{x^2}$ et $u'(x) = 2x$. Donc

$$\int x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Notons qu'une primitive de $f(x) = e^x$ est $F(x) = e^x$.
La proposition nous donne

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + c = e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conclusion :

$$\int x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exemple 5.15

La rédaction suivante est pratique pour utiliser un changement de variables :

On pose $u = x^2$, et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$.
On écrit

$$\mathrm{d}u = 2x \cdot \,\mathrm{d}x$$

(écriture purement formelle), donc

$$x \cdot \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}.$$

Donc

$$\int x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exemple 5.16

Méthode 1. On détermine une primitive (en x) :

On pose $u = x^2 + x + 1$, donc

$$\frac{du}{\mathrm{d}x} = 2x + 1 \qquad \text{et} \qquad du = (2x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^2+x+1}.$$

On utilise la primitive pour évaluer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{3}-1).$$

Solution (suite)

Méthode 2. On détermine une primitive (en u) :

On écrit comme avant $u = x^2 + x + 1$ et $du = (2x+1)\,\mathrm{d}x$, mais on observe que $x = 0$ donne $u = 1$ et $x = 1$ donne $u = 3$:

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u=1}^{u=3} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\left[\sqrt{u}\right]_{u=1}^{u=3} = 2(\sqrt{3}-1).$$

Exemples

Exemple 5.17

$$\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

En multipliant par $x-1$ et en posant $x=1$ on obtient $a=1$.
En multipliant par $(x+1)^2$ et en posant $x=-1$ on obtient $c=-2$.
En faisant $x=0$ on trouve $b=-1$. Ainsi

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}\int \frac{4dx}{(x-1)(x+1)^2} &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Fonctions polynômiales en $\cos x$ et $\sin x$.

Exemple 5.18

- $\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x \, \mathrm{d}x$
- $\int \cos^8 x \cdot \sin^5 x \, \mathrm{d}x$
- $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

Pouvez-vous devinez une règle générale ?

Solution

• On utilise $u = \sin x$, $du = \cos x\ dx$.
Notons que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$.

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x\ dx &= \int \cos^2 x \cdot \sin^6 x \cdot \cos x\ dx = \int (1-u^2)\cdot u^6\ du \\ &= \int (u^6 - u^8) du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9 + c \\ &= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + c\end{aligned}$$

• On utilise $u = \cos x$, $du = -\sin x$.
Notons que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$.

$$\begin{aligned}\int \cos^8 x \cdot \sin^5 x\ dx &= \int \cos^8 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x\ dx = -\int u^8 \cdot (1-u^2)^2\ du \\ &= -\int (u^8 - 2u^{10} + u^{12})\ du \\ &= -\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{2}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{13}\cos^{13} x + c\end{aligned}$$

Solution (suite)

• Linéarisation :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^2 x = [\sin x \ \cos x]^2 &= \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^2 \\
&= \left[\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{4i}\right]^2 = -\frac{1}{16}\left[e^{i4x} - 2 + e^{-i4x}\right] \\
&= -\frac{1}{8}\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

Règle générale pour $\int \cos^n(x)\cdot\sin^m(x)\,\mathrm{d}x$

Règle générale pour $\int \cos^n(x)\cdot\sin^m(x)\,\mathrm{d}x$

1. Si $n = 2p+1$ est impair, on fait le changement de variable
$$u = \sin x, \qquad du = \cos x\,\mathrm{d}x.$$
2. Si $m = 2p+1$ est impair, on fait le changement de variable
$$u = \cos x, \qquad du = -\sin x\,dx.$$
3. Si m et n sont pairs, on linéarise l'expression.

Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$: Exemple.

Exemple 5.19

Déterminer une primitive de

$$f(x) = (1+\sin x)\cdot\tan x, \qquad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Indication : $u = \sin x$.

On a

$$f(x) = \frac{(1+\sin x)\cdot\sin x}{\cos x}.$$

On dit que f est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$:

Une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ est une fonction construite à partir de $\cos x$ et $\sin x$ et des constantes en utilisant les “quatre opérations” $+$, $-$, $\times$, $/$.

Solution

On pose $u = \sin x$, $du = \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \frac{(1+\sin x)\cdot \sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\sin x)\cdot \sin x}{\cos^2 x}\cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1+u)\cdot u}{1-u^2}\,du$$

Notons que

$$\frac{(1+u)\cdot u}{1-u^2} = \frac{(1+u)\cdot u}{(1-u)(1+u)} = \frac{u}{1-u}$$

Une division euclidienne donnc

$$\frac{u}{1-u} = -1 + \frac{1}{1-u} = -1 - \frac{1}{u-1}$$

(On a déjà la décomposition en éléments simples.) On obtient

$$\int \left(-1 - \frac{1}{u-1}\right) du = -u - \ln|u-1| + c$$
$$= -\sin x - \ln|\sin x - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Règle générale pour les fraction rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

Pour traiter les fractions rationnelles en cos et sin :

- On peut toujours essayer $u = \cos(x)$ ou $u = \sin(x)$ ou $u = \tan(x)$, et espérer ...
- Il y a une *règle de Bioche* qui précise ce qu'il faut faire mais qui est hors programme
- Ce qui marche toujours (mais peut être pénible et est hors programme) :

$$t = \tan(\frac{x}{2}).$$

On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Fractions rationnelles en e^x.

Pour traiter les fractions rationnelles en e^x on pose $u = e^x$.
On a alors $du = e^x\, dx$, donc

$$dx = \frac{du}{u}$$

Exemple 5.20

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + e^{-x}}\, \mathrm{d}x$$

Solution

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2-1}{u+u^{-1}}\frac{du}{u} = \int \frac{u^2-1}{u^2+1}\,du$$

Une division euclidienne donne

$$\frac{u^2-1}{u^2+1} = 1 - \frac{2}{u^2+1}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \left(1-\frac{2}{u^2+1}\right)\,\mathrm{d}u &= u - 2\arctan(u) + c \\ &= e^x - 2\arctan(e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La loi de refroidissement de Newton

Un corps de température T_0 est placé dans un milieu à la température plus basse M.

Modèle de Newton : le taux de refroidissement du corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu.

Notation : $T(t)$ est la température du corps à l'instant t.

Hypothèse : M est constante

Modèle de Newton : il existe une constante $k > 0$ tel que

$$\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \sim k(M - T(t))$$

Donc

$$T'(t) = k(M - T(t)).$$

On dit que T est une solution de

$$y' = k(M - y).$$

On a aussi une condition initiale : $T(t_0) = T_0$. (t_0 est le moment ou on a placé le corps dans le milieu.)

Définition d'une equation différentielle linéaire du premier ordre

Soient a, b des fonctions continues sur un intervalle I.

Définition 6.1

1. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme
$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (*)$$
2. On dit que b est le second membre.
3. Si $b = 0$ alors on dit que l'équation $y' + a(x)y = 0$ est homogène ou sans second membre.
4. Une condition initiale de équation différentielle $(*)$ est la donnée de $y(x_0) = y_0$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
5. On dit qu'une fonction f qui est continûment dérivable sur I est une solution de $(*)$ avec cette condition initiale si f vérifie
$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x), \quad \text{pour tout } x \in I \text{ et } f(x_0) = y_0$$

Remarques sur la notation

Remarque 6.2

1. On parle d'équation différentielle car l'équation fait intervenir une fonction inconue y et ses dérivées.
2. On dit que l'équation est du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première y'.
3. La notion de linéarité va être expliqué plus loin.

Exemples

Exemple 6.3

1. $y' = k(M - y)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   Pour le voir, on écrit cette équation sous la forme
   $$y' + ky = kM,$$
   donc sous la forme $y' + a(x)y = b(x)$ avec $a(x) = ky$ et $b(x) = kM$.
2. $y'y = \sin(x)$ est une équation différentielle qui n'est pas linéaire : elle n'a pas la forme $y' + a(x)y = b(x)$.

Linéarité

Proposition 6.4

1. Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène
$$y' + a(x)y = 0,$$
alors pour tous nombres réels c et d,
$$cy_1 + dy_2$$
est aussi une solution.

2. Soit y_p une solution de l'équation non homogène
$$y' + a(x)y = b(x),$$
alors l'ensemble des solutions de cette équation est
$$\{y_p + y_0 \mid y_0 \text{ solution de } y' + a(x)y = 0\}.$$

Notation

Notation 6.5

- (1) dit que toute combinaison linéaire $cy_1 + dy_2$ de deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène est encore une solution.
- (2) dit que la solution générale (l'ensemble des solutions) de l'équation non-homogène est la somme d'une solution particulière y_p de l'équation non-homogène et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Ceci va guider notre démarche pour trouver une solution :

1. Chercher la solution générale y_0 de $y' + a(x)y = 0$.
2. Chercher une solution particulière y_p de $y' + a(x)y = b(x)$.
3. $y_p + y_0$ est alors la solution générale de $y' + a(x)y = b(x)$.

Démonstration de la propositon 6.4 (pour aller plus loin)

Pour simplifier l'écriture, on note par E_h l'équation homogène et par E_n l'équation non homogène.

(1) On montre : « si y_1 et y_2 sont des solutions de E_h alors $y = cy_1 + dy_2$ l'est aussi ».
Par hypothèse :

$$\begin{aligned} y_1' + a(x)y_1 &= 0 \\ y_2' + a(x)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Alors $y = cy_1 + dy_2$ vérifie

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= (cy_1 + dy_2)' + a(x)(cy_1 + dy_2) \\ &= cy_1' + dy_2' + ca(x)y_1 + da(x)y_2 \\ &= c(y_1' + a(x)y_1) + d(y_2' + a(x)y_2) = 0. \end{aligned}$$

Donc $y = cy_1 + dy_2$ est encore une solution.

Démonstration (suite)

(2a) On montre : « si y_p est une solution de E_n et si y_0 est une solution de E_h, alors $y_p + y_0$ est une solution de E_h ».
Par hypothèse,

$$y_p' + a(x)y_p = b(x)$$
$$y_0' + a(x)y_0 = 0$$

Alors $y = y_p + y_0$ vérifie

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= (y_p + y_0)' + a(x)(y_p + y_0) \\ &= (y_p' + a(x)y_p) + (y_0' + a(x)y_0) = b(x) \end{aligned}$$

Donc $y_p + y_0$ est bien solution de l'équation non homogène.

Démonstration (suite)

(2b) Soit y_p une solution de E_n. On montre : « toute solution de E_n peut s'écrire comme $y_p + y_0$ avec $y_0 \in S$ ».

Soit donc y_q une solution arbitraire de $y' + a(x)y = b(x)$. Alors

$$\begin{aligned}(y_q - y_p)' + a(x)(y_q - y_p) &= (y_q' + a(x)y_q) - (y_p' + a(x)y_p)\\ &= b(x) - b(x) = 0.\end{aligned}$$

Donc $y_q - y_p$ est solution de E_h. Notons la par y_0.
On a donc bien $y_q = y_p + y_0$.

Conclusion de (2a) et (2b) : y_q est solution de l'équation non-homogène *si et seulement si* $y_q = y_p + y_0$.

Exemple type de la solution de l'équation homogène

Exemple 6.6

$$y' + y \sin x = 0.$$

Solution type pour une équation homogène

- On écrit $y' + y \sin x = 0$ sous la forme $y' = -y \sin x$, et donc

$$\frac{y'}{y} = -\sin x.$$

- En trouvant une primitive des côtés gauche et droite on trouve

$$\ln|y| = \cos x + d.$$

- En applicant la fonction exponentielle aux côtés gauche et droite on trouve

$$e^{\ln|y|} = e^{\cos x + d}.$$

Solution type pour une équation homogène (suite)

- Le côté gauche est $|y|$ et le côté droit est $e^d e^{\cos x}$, donc

$$y = \pm e^d\, e^{\cos x}.$$

- e^d est une constante positive arbitraire, donc $\pm e^d$ est une constante non-zero arbitraire, donc on peut écrire la solution sous la forme $y = c\, e^{\cos x}$, $c \neq 0$.
  Or $y = 0$ est aussi solution, donc on peut prendre $c = 0$:

$$y = c\, e^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Le point délicat avec cette méthode est qu'on commence par diviser par y, donc il faut supposer que y ne s'annule pas.

On peut montrer que cette méthode donne toujours la solution générale.

Formule pour la solution générale de l'équation homogène

Plutôt que d'utiliser la méthode de l'exercice précédent on peut utiliser :

Théorème 6.7

La solution générale de $y' + a(x)y = 0$ est

$$y = ce^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Exemple 6.8 (Voir exemple 6.6)

$$y' + y \sin x = 0.$$

Réponse. Une primitive de $a(x) = \sin x$ est $A(x) = -\cos x$. Donc la solution générale de l'équation est

$$y_0 = ce^{-A(x)} = ce^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration du théorème 6.7 (pour aller plus loin)

(i) On montre : « $y = ce^{-A(x)}$ est une solution de $y' + a(x)y = 0$. »

$$y' + a(x)y = c(-a(x))e^{-A(x)} + a(x)ce^{-A(x)} = 0.$$

(ii) On montre : « Si y est une solution de $y' + a(x)y = 0$ alors $y = ce^{-A(x)}$. »
Si on pose $u(x) = e^{A(x)}y(x)$, alors on peut écire

$$y(x) = u(x)e^{-A(x)}.$$

Notons qu'on a

$$y'(x) = u'(x)e^{-A(x)} + u(x)(-a(x)e^{-A(x)})$$

et donc

$$y' + a(x)y = u'e^{-A(x)}.$$

Démonstration (suite)

On déduit que y est solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ si et seulement si

$$u'e^{-A(x)} = 0.$$

Vu que $e^{-A(x)} > 0$, cette condition équivaut à $u' = 0$. Autrement dit, u est une constante, disons c.
Donc on a bien

$$y = u(x)e^{-A(x)} = ce^{-A(x)}.$$

Exemple d'une équation non-homogène

Exemple 6.9

$$y' + y \sin x = 2 \sin x.$$

1. $y_p = 2$ est une solution évidente.
2. On a déjà montré (exemple 6.6) que $y_0 = ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de l'équation homogène associé.
3. Donc la solution générale de $y' + y \sin x = 2 \sin x$ est

$$y_p + y_0 = 2 + ce^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : exemple

En général, on ne va pas pouvoir deviner une solution évidente.

Il y a une méthode, dite variation de la constante, qui marche toujours.

On va expliquer cette méthode avec l'exemple suivant :

Exemple 6.10 (Voir exemple 6.9)

$$y' + y \sin x = 2 \sin x.$$

Solution type pour la « variation de la constante »

- On a vu (exemple 6.6) que la solution générale de l'équation homogène $y' + y \sin x = 0$ est
$$y_0 = c\, e^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$
- En remplacant la constante c par une fonction inconnue $c(x)$, on pose
$$y_p = c(x) e^{\cos x}$$

Solution type pour la « variation de la constante » (suite)

- Notons que

$$y_p' = c'(x)e^{\cos x} - c(x)\sin x e^{\cos x}$$

et donc

$$y_p' + y_p \sin x = c'(x)e^{\cos x}.$$

Donc y_p est solution de

$$y' + y \sin x = 2\sin x$$

si et seulement si

$$2\sin x = y_p' + y_p \sin x = c'(x)e^{\cos x}.$$

Solution type pour la « variation de la constante » (suite)

- $c(x)$ vérifie donc
$$c'(x) = 2\sin x e^{-\cos x}.$$
Un calcul de primitive donne
$$c(x) = 2\int \sin x e^{-\cos x}\, dx = 2\int e^u\, du = 2e^u = 2e^{-\cos x}.$$
(Il n'y a pas de c, car on cherche une solution.)
- On trouve
$$y_p = c(x)e^{\cos x} = 2e^{-\cos x}e^{\cos x} = 2.$$
(C'est la solution évidente qu'on avait déjà devinée.)

Exemple type

Exemple 6.11

Résoudre l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]0,1[$$

avec condition initiale

$$y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

Solution type d'une équation non-homogène

1. Solution générale de l'équation homogène $xy' - y = 0$:
   On écrit $xy' - y = 0$ sous la forme $xy' = y$, et donc

   $$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.$$

   En prenant la primitive du côté gauche et du côté droit, on trouve

   $$\ln|y| = \ln|x| + d.$$

   On applique la fonction exponentielle au côté gauche et au coté droit :

   $$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+d} = e^d\, e^{\ln|x|} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm e^d x.$$

   $c = \pm e^d$ est une constante non zero arbitraire, mais comme $c = 0$ donne aussi une solution on trouve comme solution générale de l'équation homogène

   $$y = cx, \quad c \in \mathbb{R}$$

Solution type d'une équation non-homogène (suite)

2. Solution particulière de l'équation non homogène $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$:
   On pose $y_p = c(x)x$, donc $y_p' = c'(x)x + c(x)$. Donc

   $$xy_p' - y_p = c'(x)x^2 + c(x)x - c(x)x = c'(x)x^2.$$

   On déduit que y_p est une solution de $xy_p' - y_p = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ si et seulement si $c(x)$ vérifie

   $$c'(x)x^2 = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   On déduit que $c(x) = \arcsin x$.
   Conclusion : Une solution particulière de l'équation non homogène est

   $$y_p = x\,c(x) = x \arcsin x.$$

Solution type d'une équation non-homogène (suite)

3. La solution générale de l'équation non-homogène est

$$y = y_p + y_0 = x \arcsin x + cx = x(\arcsin x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Solution de l'équation non homogène avec condition initiale :
   On obtient

$$y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\arcsin(\frac{1}{2}) + c) = \frac{\pi}{12} + \frac{c}{2}$$

   La condition initiale $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ nous donne

$$\frac{\pi}{12} + \frac{c}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{\pi}{3}.$$

   Conclusion : la solution de l'équation différentielle avec condition initiale est

$$y = x\left(\arcsin x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Existence et unicité de la solution

Théorème 6.12

Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 *avec condition initiale admet une solution unique.*

Interprétation géométrique

Exemple 6.13

Construire géométriquement les solutions de $y' = y$.

Réponse.

- Soit f une fonction (dérivable) quelconque. Le coefficient directeur de la droite tangente en un point $(x, f(x))$ de la courbe de f est $f'(x)$. Donc un vecteur directeur de cette droite tangente est par exemple $(1, f'(x))$.
- Soit maintenant f une solution de $y' = y$.Donc $f'(x) = f(x)$.
- Donc si la courbe de f passe par un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors un vecteur directeur de la droite tangente en (x, y) est $(1, y)$.
- Dans le graphique suivant on a tracé quelques vecteurs directeurs (qu'on a normalisé pour avoir longueur 1).

Le champ de vecteurs de $y' = y$

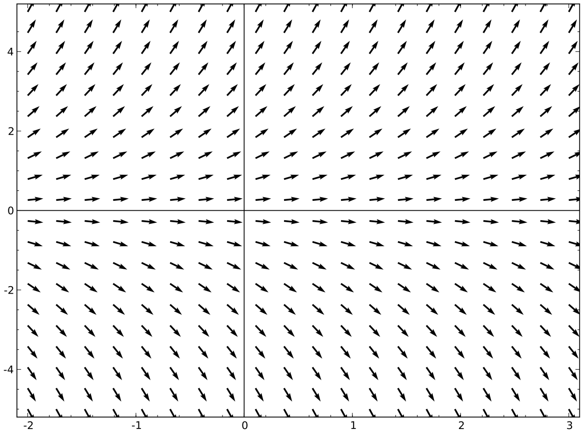


FIGURE – Le champ de vecteurs de $y' = y$.

Une condition initiale ...

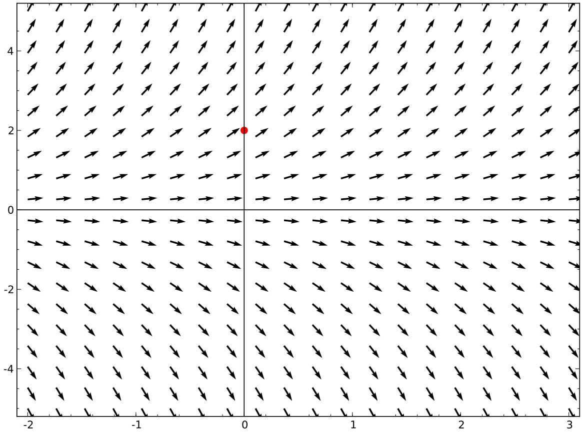


FIGURE – Condition initiale : $y(0) = 2$.

. . . et sa solution

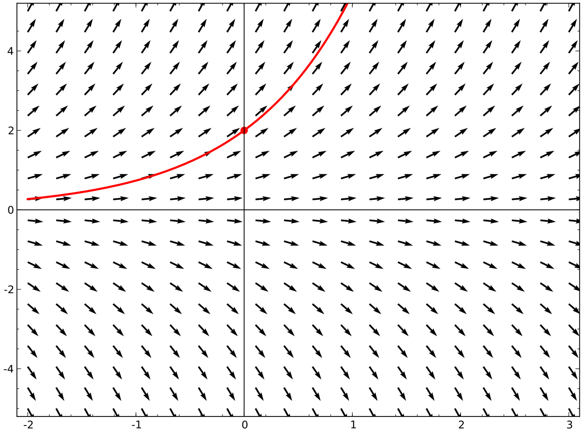


FIGURE – Solution de $y' = y$ avec condition initiale : $y(0) = 2$.

Une autre condition initiale ...

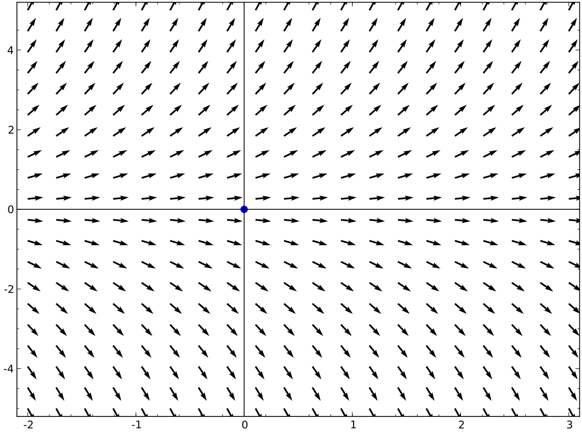


FIGURE – Condition initiale : $y(0) = 0$.

. . . et sa solution

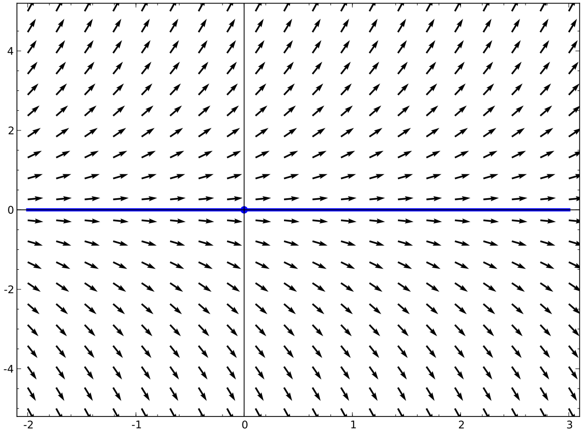


FIGURE – Solution de $y' = y$ avec condition initiale : $y(0) = 0$.

Plusieurs conditions initiales . . .

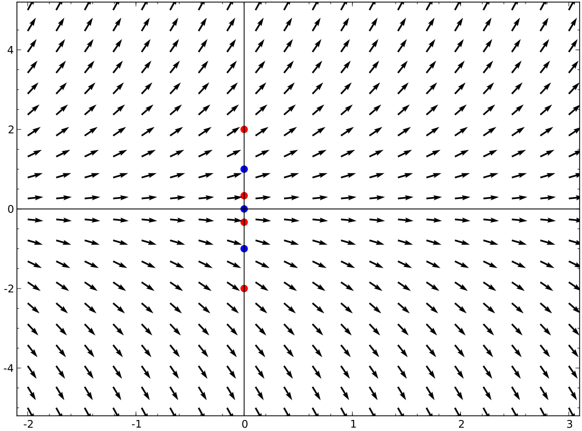


FIGURE – $y' = y$ et conditions initiales $y(0) = 2, 1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1, -2$

...et leur solutions

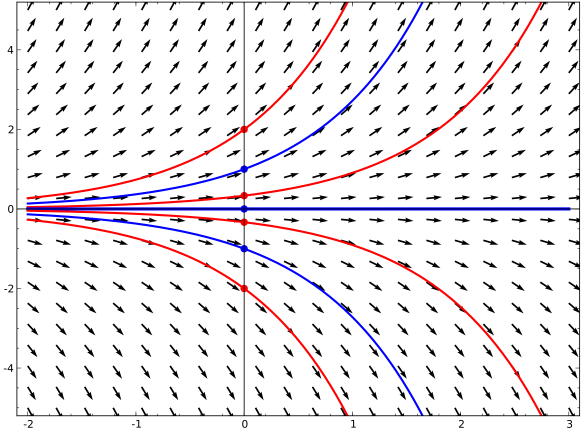


FIGURE – Solutions de $y' = y$ avec $y(0) = 2, 1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1, -2$.

Remarques sur l'exemple précédent

- Pour trouver géométriquement la courbe d'une solution de $y' = y$ avec condition initiale $y(x_0) = y_0$ on cherche une courbe qui passe par le point (x_0, y_0) et qui « épouse » le champs de vecteurs.
- Le théorème d'éxistence et d'unicité dit que pour chaque condition initiale il y a une telle courbe et qu'elle est unique.
- L'unicité nous dit que deux courbes différentes qui sont solutions ne se coupent jamais.
- Un calcul montre que les solutions de $y' = y$, $y(x_0) = y_0$ sont $f(x) = y_0 e^x$.

Le champ de vecteurs de $y' + y \sin x = 2 \sin x$

Exemple 6.14

$$y' + y \sin x = 2 \sin x.$$

On avait vu (exercice 6.9.) que la solution générale est

$$y_p + y_0 = 2 + ce^{\cos x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Le champ de vecteurs de $y' + y \sin x = 2 \sin x$

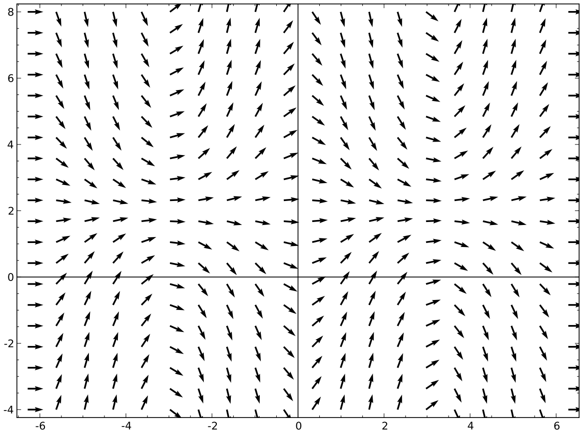


FIGURE – Le champ de vecteurs de $y' + y \sin x = 2 \sin x$.

Quelques conditions initiales . . .

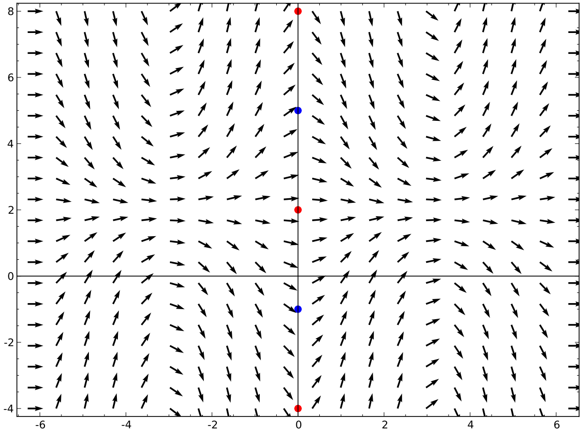


FIGURE – $y' + y \sin x = 2 \sin x$ et conditions initiales $y(0) = 8, 5, 2, -1, -4$.

. . . et leur courbes

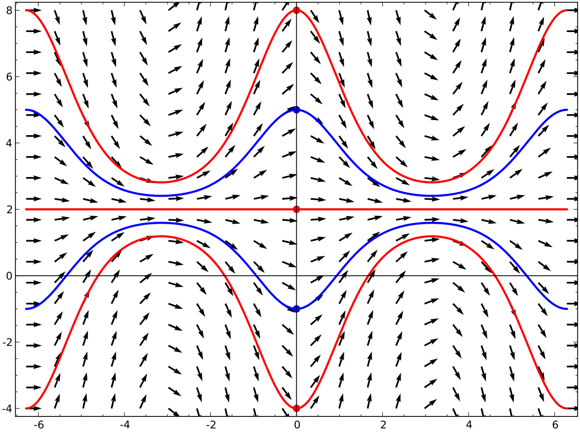


FIGURE – Solutions de $y' + y\sin x = 2\sin x$, $y(0) = 8, 5, 2, -1, -4$.

Le champ de vecteurs de $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et ces solutions

Exemple 6.15

$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Voir exercice 6.11.)

Quelques conditions initiales ...

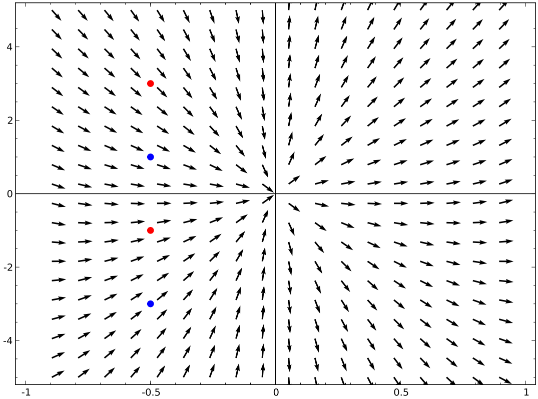


FIGURE – Le champ de $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ avec quelques conditions initiales.

. . . et leur courbes

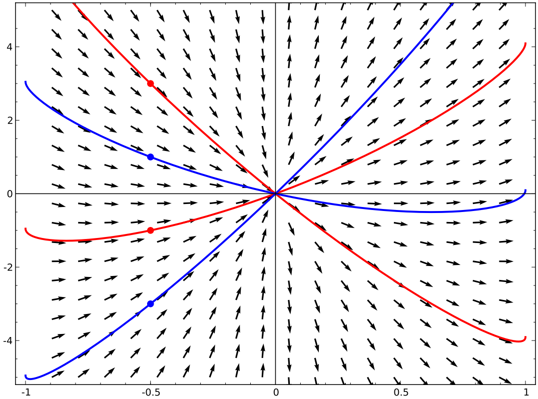


FIGURE – Quelques solutions de $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarques sur l'exemple $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

- Le second membre n'est définie que sur $]-1,1[$.
- Pour avoir y' en fonction de y, il faut diviser l'équation par x (et donc il faut que $x \neq 0$) :
$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- Le champs de vecteurs est donc définie sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$.
- Notons que si $x = 0$ alors on a $y' = \pm\infty$ (sauf si $y = 0$).
- Il faut donc bien exclure $x = 0$.
- Toutes les courbes semblent passer par 0 (avec des directions différentes).
- Un calcul confirme ce constat : on a vu que les solutions sont
$$y_p + y_0 = x \arcsin x + cx = x(\arcsin x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$
- On peut donc prolonger les solutions en 0.

Définition d'une equation à variables séparées du premier ordre

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I.

Définition 6.16

On appelle équation différentielle à variables séparées une équation de la forme

$$f(y)y' = g(x)$$

Remarque 6.17

On peut écrire

$$f(y)dy = g(x)dx$$

ce qui explique leur nom.

Exemples

Exemple 6.18

1. Résoudre $yy' = \cos x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
2. Résoudre $y' = y^2$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

Solution de $yy' = \cos x$

On écrit

$$y\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad \Longrightarrow \qquad y\,dy = \cos x\,dx$$

En intégrant

$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$

on obtient

$$\frac{y^2}{2} = \sin x + c.$$

On peut écrire

$$y = \pm\sqrt{2\sin x + c}.$$

Notons que $y(0) = \pm\sqrt{c}$, donc la condition initiale $y(0) = 1$ nous dit que $c = 1$ et que

$$y = +\sqrt{1 + 2\sin x}.$$

Cette solution est définie sur $[-\pi/6, 7\pi/6]$.

Solution de $y' = y^2$

Notons que $y = 0$ est une solution de $y' = y^2$.
Les autres solutions ne s'annullent jamais. On peut donc supposer que $y \neq 0$.
On peut donc écrire $y' = y^2$ sous la forme

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

En intégrant on trouve $-\frac{1}{y} = x + c$, donc $y = -\frac{1}{x+c}$.
La condition initiale $y(1) = 1$ donne $c = -2$. Donc la solution est

$$y = \frac{1}{2-x}.$$

Cette solution est définie sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ (il faut que l'intervalle contienne 1).

Modèle de l'osciallateur harmonique

Une masse m est accroché à un ressort qui se trouve en état d'équilibre.
A l'instant initial (temps $t = 0$) on a tiré la masse une distance y_0 vers le bas et on relache.

Notation : $y(t)$ est la hauteur de la masse à l'instant t par rapport à la position de repos.

Modèle de Newton : La masse multiplié par son acceleration est égal à la force (de rappel du ressort).

Modélisation : Si $y(t)$ est la position, alors $y'(t)$ est la vitesse et $y''(t)$ est l'acceleration. Donc le modèle de Newton donne $my'' = F$.

Cas d'un ressort : Cette force est proportionnelle à la distance de la masse à la position de repos.

Modélisation : Ceci se traduit par $F(t) = -ky(t)$.
($k > 0$ est la constante de raideur du ressort).

Osciallateur harmonique : On obtient le modèle de l'osciallateur harmonique :

$$my''(t) = -ky(t).$$

Remarque sur le modèle de l'osciallateur harmonique

D'ou vient le signe négatif dans la formule $my''(t) = -ky(t)$?

Si le ressort est en extension, alors la hauteur de la masse est négative, donc $y < 0$.

Dans ce cas, la masse est accélerée, donc $y'' > 0$.

Comme (par convention) $k > 0$, il faut écrire $-k$.

Osciallateur harmonique : conditions initiales

A l'instant initial $t = 0$, la masse est tirée une distance y_0 vers le bas, donc

$$y(0) = -y_0$$

Comme la masse est imobile (avant d'être relaché), sa vitesse initiale est 0, donc

$$y'(0) = 0.$$

On a donc un équation différentielle d'ordre 2

$$my''(t) = -ky(t)$$

avec condition initiale :

$$\begin{aligned} y(0) &= -y_0 \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Définition d'une équation d'ordre 2

f et g sont des fonctions (deux fois continument différentiables) sur un intervalle I. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.

Définition 7.1

1. Une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** est une équation de la forme
$$ay'' + by' + cy = g(x).$$
2. Une **condition initiale** est la donnée de deux équations $y(x_0) = y_0$, et $y'(x_0) = y_1$, où $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.
3. f est une **solution** de l'équation avec condition initiale, si f vérifie $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$ et $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_1$.

Exemple 7.2 (Modèle de l'osciallateur harmonique)

$$my'' + ky = 0, \qquad y(0) = -y_0, y'(0) = 0.$$

Notation

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on a les notions de :

- second membre,
- équation homogène où sans second membre,
- équation non-homogène ou avec second membre

Linéarité

On a comme pour l'ordre 1 :

Proposition 7.3

1. Toute combinaison linéaire $cy_1 + dy_2$ de solutions y_1, y_2 de l'équation homogène est encore une solution de l'équation homogène.
2. La solution générale de l'équation non-homogène est la somme d'une solution particulière de l'équation non-homogène et de la solution générale de l'équation homogène.
3. Si on se donne en plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, avec x_0 un réel dans l'intervalle ou l'équation différentielle est définie, et y_1, y_2 deux réels arbitraires, alors on a unicité de la solution.

L'équation sans second membre

Exercice 7.4

Trouver une condition sur r sous laquelle $y = e^{rx}$ est solution de l'équation

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0.$$

Réponse. $y = e^{rx}$ donne $y' = r\,e^{rx}$, $y'' = r^2\,e^{rx}$, donc

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = a\,r^2\,e^{rx} + b\,r\,e^{rx} + c\,e^{rx} = (a\,r^2 + b\,r + c)e^{rx}.$$

Vu que $e^{rx} > 0$ on a

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a\,r^2 + b\,r + c = 0.$$

Racines du polynôme caractéristique

Notation 7.5

Le polynôme

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

s'appelle polynôme caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$.

On a montré :

A retenir

$y = e^{rx}$ est solution de l'équation différentielle

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

si et seulement si r est racine du polynôme caractéristique.

Polynôme caractéristique

1. Si le discriminant Δ de p est positif, alors p admet deux racines réelles différentes, disons r et s. On a donc deux solutions $y_1 = e^{rx}$ et $y_2 = e^{sx}$ de $ay'' + by' + cy = 0$.
2. Si $\Delta = 0$, alors p a une racine double r. Donc $y_1 = e^{rx}$ est solution de $ay'' + by' + cy = 0$. On peut voir que $y_2 = x\, e^{rx}$ est aussi une solution.
3. Si $\Delta < 0$ alors p a une racine complexe, disons $\lambda = \alpha + i\beta$. (La deuxième racine est $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$.) On a une solution complexe de $ay'' + by' + cy = 0$:

$$y = e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

On peut voir que la partie réelle $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et la partie complexe $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sont des solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$.

Théorème : Recette pour l'équation homogène

Soit l'équation différentielle sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (*)$$

où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ le polynôme caractéristique associé.

1. Si p a deux racines réelles distinctes r et s, alors la solution de (*) est
$$y_0 = c_1 e^{rx} + c_2 e^{sx}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si p a une racine réelle double r, alors la solution de (*) est
$$y_0 = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} = e^{rx}(c_1 + c_2 x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si p a une racine complexe (non réelle) $\lambda = \alpha + i\beta$, alors la solution de (*) est
$$y_0 = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1

Exemple 7.6

$$y'' - 3y' = 0.$$

Solution type

Le polynôme caractéristique est

$$p(x) = x^2 - 3x = x(x-3).$$

Les racines de p sont

$$r = 3, \qquad s = 0.$$

La solution générale de l'équation $y'' - 3y' = 0$ est

$$y_0 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{0x} = c_1 e^{3x} + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2

Exemple 7.7

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Solution type

Le polynôme caractéristique est

$$p(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

La racine (double) de p est

$$r = -2.$$

La solution générale de $y'' + 4y' + 4 = 0$ est

$$y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = e^{-2x}(c_1 + c_2 x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7.8

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Solution type

Le polynôme caractéristique est

$$p(x) = x^2 - 2x + 5 = 0.$$

$\Delta = 4 - 20 = -16$. Les racines de p sont

$$\lambda = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Une solution complexe de $y'' - 2y' + 5y = 0$ est

$$e^{(1+2i)x} = e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)).$$

La solution générale (réelle) de $y'' - 2y' + 5y = 0$ est

$$y_0 = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) = e^x(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

L'équation avec second membre

On cherche une solution particulière y_p de l'équation avec second membre :

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

où a, b, c sont des constantes et g est une fonction (connue).

Avant de donner la règle générale, traitons quelques exemples :

Exemple 7.9

Déterminer une solution particulière de

$$y'' + y' + y = -7e^{2x}$$

Solution type

Le second membre $-7e^{2x}$ est de la forme « constante fois e^{2x} ».

On cherche une solution particulière de l'équation de la forme

$$y_p = ce^{2x}.$$

On trouve $y_p' = 2ce^{2x}$, $y_p'' = 4ce^{2x}$. Et donc

$$y_p'' + y_p' + y_p = 4ce^{2x} + 2ce^{2x} + ce^{2x} = 7ce^{2x}.$$

Donc y_p est solution de

$$y'' + y' + y = -7e^{2x}$$

si et seulement si

$$7ce^{2x} = -7e^{2x}.$$

On trouve $c = -1$. Conclusion : une solution particulière est

$$y_p = -e^{2x}.$$

Un autre exemple

Exemple 7.10

Déterminer une solution particulière de

$$y'' + 2y' - y = -x^2$$

Solution type

Le second membre est un polynôme de degrée 2, donc on pose

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

On trouve

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - y_p &= (2a) + 2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) \\ &= -ax^2 + (4a - b)x + 2a + 2b - c \end{aligned}$$

y_p est solution de

$$y'' + 2y' - y = -x^2$$

si et seulement si $a = 1$, $4a - b = 0$, $2a + 2b - c = 0$.
Donc $a = 1$, $b = 4$, $c = 10$.
Conclusion :

$$y_p = x^2 + 4x + 10.$$

Cas général

On va traiter les cas ou le second membre est de la forme

$$g(x) = P_n(x)e^{\lambda x},$$

avec $P_n(x)$ un polynôme de degrée $n \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notons les cas particuliers pour le second membre $g(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$:

- Si $\lambda = 0$, alors $e^{\lambda x} = 1$, donc $g(x) = P_n(x)$.
- Si $n = 0$, alors le degrée de P est 0. Ceci implique que P est une constante, disons $P(x) = d$. On a alors $g(x) = d\, e^{\lambda x}$.

Exemples

Recette pour trouver la forme générale de y_p

Si $g(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$, alors on connaît la forme général de y_p :

1. Si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique, alors
$$y_p = Q_n(x)e^{\lambda x},$$
où $Q_n(x)$ est un polynôme (à déterminer) de degrée n.
2. si λ est racine simple du polynôme caractéristique, alors
$$y_p = x\, Q_n(x)e^{\lambda x}.$$
3. Si λ est racine double du polynôme caractéristique, alors
$$y_p = x^2\, Q_n(x)e^{\lambda x}.$$

On trouve les coefficients de Q_n par identification.

Exemple 7.11

$$y'' - 2y' = 0.$$

Réponse. Le polynôme charactéristique est

$$p(x) = x^2 - 2x = x(x-2).$$

Les racines de p sont

$$r = 0, \qquad s = 2.$$

La solution générale de $y'' - 2y' = 0$ est

$$y_0 = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

Exemples pour le choix de y_p

On se donne la même équation que pour l'exemple précédent, mais avec un second membre :

$$y'' - 2y' = g(x).$$

Rappel : $p(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$
Le tableau suivant donne quelques exemples pour la forme générale d'une solution particulière y_p.

$g(x)$	g a la forme :	Choix pour y_p :
$x^2 - 3x$	$P_2(x) = P_2(x)e^{0x}$	$ax^2 + bx + c$
$5\,e^{3x}$	$P_0(x)e^{3x}$	$c\,e^{3x}$
$(x^3 - 2x)\,e^{5x}$	$P_3(x)e^{5x}$	$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\,e^{5x}$
$5e^{2x}$	$P_0(x)e^{2x}$	$x\,c\,e^{2x}$
$x + 3$	$P_1(x)e^{0x}$	$x\,(ax + b)$

Remarques sur l'exemple précédent

- Pour $y'' - 2y' = 5e^{2x}$ on a choisi $y_p = x\, c\, e^{2x}$.
- Le x (en rouge) est nécessaire car 2 est racine simple de p.
- Pour comprendre pourquoi $y_p = ce^{2x}$ n'est pas un bon choix, il suffit de calculer $y_p'' - 2y_p'$: on trouve 0. Donc jamais $5e^{2x}$.
- La raison pour laquelle $y_p = ce^{2x}$ donne $y_p'' - 2y_p' = 0$ est que y_p est solution de l'équation homogène (car 2 est racine du polynôme caractéristique).
- De même, on a choisi $y_p = x\,(ax+b)$ pour $y'' - 2y' = x + 3$ car 0 est racine du polynôme caractéristique.

Exemples

Exemple 7.12

$$y'' - 6y' + 9y = g(x).$$

Le polynôme charactéristique est $p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ et 3 est racine double de p.

$g(x)$	g a la forme :	Choix pour y_p :
x	$P_1(x) = P_1(x)e^{0x}$	$ax + b$
$x^3\, e^{4x}$	$P_3(x)e^{4x}$	$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\, e^{4x}$
$x^3\, e^{3x}$	$P_3(x)e^{3x}$	$x^2\,(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x}$

Le x^2 (en rouge) est nécessaire car 3 est racine double de p.

Exemple

Exemple 7.13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' = 0$.
2. $y'' - y' = -4e^{2x}$.
3. $y'' - y' = e^{x}(x+1)$.
4. $y'' - y' = -4e^{2x} + e^{x}(x+1)$.
5. $y'' - y' = -4e^{2x} + e^{x}(x+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solution type

1. Le polynôme charactéristique est $P(x) = x^2 - x = x(x-1)$.
   Les racines de P sont $r = 0$ et $s = 1$.
   La solution générale est

$$y_0 = c_1 e^{0x} + c_2 e^x = c_1 + c_2 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Le second membre est de la forme $d\, e^{2x}$, d une constante (autrement dit $P_0(x)e^{2x}$ où P_0 est un polynôme de degrée 0).
   2 n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc on prend $y_p = ce^{2x}$.
   On trouve $y_p'(x) = 2ce^{2x}$ et $y_p''(x) = 4ce^{2x}$, donc

$$y_p'' - y_p' = 2ce^{2x}.$$

   y_p est solution de $y_p'' - y_p' = -4e^{2x}$ ssi $c = -2$. Donc $y_p = -2e^{2x}$.
   Conclusion : La solution générale de $y_p'' - y_p' = -4e^{2x}$ est

$$y_p + y_0 = -2e^{2x} + c_1 + c_2 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution type (suite)

3. Le second membre est de la forme $P_1(x)e^x$ où P_1 est un polynôme de degrée 1.
   1 est racine du polynôme caractéristique, donc on prend $y_q = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$.

$$y_q' = (ax^2+(2a+b)x+b)e^x$$
$$y_q'' = (ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^x$$

   donc

$$y_p'' - y_p' = (2ax+2a+b)e^x.$$

   y_q est solution de $y_p''-y_p' = e^x(x+1)$ si et seulement si $a = 1/2$ et $b = 0$. Donc $y_q = \frac{x^2}{2}e^x$.
   Conclusion : La solution générale de $y_p''-y_p' = e^x(x+1)$ est

$$y_q + y_0 = \frac{x^2}{2}e^x + c_1 + c_2e^x = c_1 + (c_2+\frac{x^2}{2})e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution type (suite)

4. Superposition des solutions :

$$y = y_p + y_q + y_0 = -2e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^x + c_1 + c_2 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. On trouve

$$y' = -4e^{2x} + xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + c_2 e^x.$$

On a

$$y(0) = -2 + c_1 + c_2, \qquad y'(0) = -4 + c_2.$$

Donc les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ donnent $c_2 = 6$ et $c_1 = -3$.
Conclusion :

$$y = -2e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^x - 3 + 6e^x = -2e^{2x} - 3 + e^x(6 + \frac{x^2}{2})e^x.$$