5 Calcul intégral

Linéarisation

Exercice 5.1. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

$$\text{(a)} \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int \left(e^x - e^{-x}\right)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5.2 (Pour s'entraîner)**.** Calculer

$$\text{(a)} \int \cos^4 x \,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int (x^2+2)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int \sin(5x)\cdot\cos(3x)\,\mathrm{d}x$$

Réponse. (a) $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.
Donc $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(b) $\int (x^4 + 4x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(c) $\sin(5x)\cos(3x) = \frac{1}{2}(\sin(8x) + \sin(2x))$.
Donc $\int \sin(5x)\cdot\cos(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\cos(8x) - \frac{1}{4}\cos(2x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Intégration par parties

Exercice 5.3 (Premièrs exemples)**.** Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

$$\text{(a)} \int_0^2 (x+1)\cdot e^x \,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_1^3 x^2\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int \sqrt{x}\cdot\ln(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5.4. Calculer les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

$$\text{(a)} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int \sin(x)\cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)} \int x\cdot\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Changement de variable

Exercice 5.5 (Premiers exemples)**.** Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

$$\text{(a)} \int \sin(x)\cdot e^{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int_0^2 x\cdot e^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(d)} \int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(e)} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(f)} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5.6. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

$$\text{(a)} \int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\sin^7(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)} \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(d)} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(e)} \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(f)} \int \frac{\mathrm{d}x}{5x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5.7. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cdot\cos^5(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 5.8. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$$

(*Indication :* Utiliser le changement de variable $u = 1+\sqrt{x}$; écrire $x = (u-1)^2$ et déterminer $\mathrm{d}x$.)

Exercice 5.9 (Pour s'entraîner)**.** Calculer les primitives suivantes

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_3^4 x\cdot(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(\ln(x))^4}$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Réponse. (a) $u = 10-3e^x$; $I = \dfrac{1}{3(10-3e^x)} + c$, $c \in \mathbb{R}$.
(b) $u = 1+e^x$. $I = 2\sqrt{1+e^x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. (c) $u = 1+\ln x$. $I = \dfrac{1}{3}(1+\ln x)^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.
(d) $u = x^2-6$. $I = \dfrac{3}{14}(x^2-6)^{\frac{7}{3}} + c$, $c \in \mathbb{R}$. (e) $u = \ln(x)$. $I = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\ln(x))^3} + c$, $c \in \mathbb{R}$.
(f) $u = 1-x^2$. $I = -\sqrt{1-x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.10. Calculer

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5.11 (Pour s'entraîner)**.** Calculer

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$

Réponse. (a) Décomposition en éléments simples : $\dfrac{x^3-2x}{x+1} = x^2 - x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
Donc $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
(b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = \left[\ln(x-1) - \frac{2}{x-1}\right]_2^3 = \ln(2)+1.$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 5.12. Calculer les primitives suivantes

(a) $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$. (*Indication :* intégration par parties avec $u = \arctan x$.)

(b) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$. (*Indication :* intégration par parties avec $u = \ln(1+x^2)$.)

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. (*Indication :* changement de variable $u = 2+\sin x$.)

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$. (*Indication :* changement de variable $u = e^x$.)

Exercice 5.13 (Pour s'entraîner)**.**

(a) (i) Déterminer les primitives de $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ (*Indication :* division euclidienne).

(ii) Utiliser une intégration par parties avec $u = \arctan x$ pour évaluer $\int x^2\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) (i) Déterminer les primitives de $f(x) = \dfrac{-\,2x^2}{x^2-1}$ (*Indication :* éléments simples).

(ii) Utiliser une intégration par parties pour évaluer $\int \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

Réponse. (a) (i) $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, $c\in\mathbb{R}$.
(ii) $\displaystyle\frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{1}{6}[x^2-\ln(x^2+1)] + c$, $c\in\mathbb{R}$. $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
(b) (i) $\displaystyle\frac{-2x^2}{x^2-1} = -2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$. $\displaystyle\int\frac{-2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$.
(ii) $u=\ln(x^2-1)$, $v'=1$: $\displaystyle\int\ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2-1) - 2\int\frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$, $c\in\mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.
(*Variante :* on utilise $\int\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$ et $\ln(x^2-1) = \ln(x-1)+\ln(x+1)$, ...)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 5.14. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int\frac{(\ln x)^3}{x}\,\mathrm{d}x$	(b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$	(c) $\displaystyle\int\frac{x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x$
(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$	(e) $\displaystyle\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$	(f) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$
(g) $\displaystyle\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$	(h) $\displaystyle\int\frac{1}{3x^2+2}$	(i) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x^2}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 5.15 (Pour s'entraîner)**.** Calculer

(a) $\displaystyle\int\left(e^x+e^{-2x}\right)^2\,\mathrm{d}x$	(b) $\displaystyle\int\sin x\,\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$
(c) $\displaystyle\int\arcsin x\,\mathrm{d}x$	(d) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Réponse.

(a) Linéarisation : $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}$. $F(x) = \frac{1}{2}\,e^{2x} - 2e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + c$, $c\in\mathbb{R}$.

(b) $u = 1+\cos x$: $F(x) = -\dfrac{2}{3}\,(1+\cos x))^{3/2} + c$, $c\in\mathbb{R}$.

(c) $u = \arcsin x$, $v' = 1$. $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(d) $u = 1 + \ln x$. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.16 (Pour s'entraîner)**.** Calculer en utilisant une intégration par parties :

(a) $\displaystyle\int x \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$. (*Indication :* commencer par linéariser $\cos^2(x)$.)

(b) $\displaystyle\int (x+1)e^x \ln(x) \, \mathrm{d}x$. (*Indication :* $u' = (x+1)e^x$.)

Réponse. (a) On utilise d'abord $\cos^2 x = 1/2(1+\cos(2x))$. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int x \cos(2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$.
Conclusion : $\displaystyle\int x \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} x \sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(b) $u' = (x+1)e^x$ donne (déjà vu, sinon intégration par parties) $u = xe^x$ et $v = \ln x$ donne $v' = 1/x$. On obtient $\displaystyle\int (x+1)e^x \ln(x) \, \mathrm{d}x = xe^x \ln(x) - e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

Exercice 5.17 (Pour s'entraîner)**.** Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2-x-1} \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3e^x+2e^{2x}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$. (*Indication :* $v' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.)

Réponse. (a) $\displaystyle\frac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2-x-1} = 1 + \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)^2} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.
$\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2-x-1} \, \mathrm{d}x = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
(b) $u = e^x$, $x = \ln u$, $\mathrm{d}x = 1/u \, \mathrm{d}u$. $\displaystyle I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+3e^x+2e^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)(2u+1)}$.
$\displaystyle\frac{1}{u(u+1)(2u+1)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1} + \frac{-4}{2u+1}$. $\displaystyle I = x + \ln\left(\frac{e^x+1}{(2e^x+1)^2}\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = x \tan x + \ln|\cos x| + c$, $c \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.