3 Les nombres complexes

Révision de terminale (Travail maison)

Exercice 3.1. Simplifier les expressions suivantes :

$$(a)\quad (3+2i)(1-3i) \qquad (b)\quad (1+5i)(1-5i) \qquad (c)\quad \frac{3+2i}{1-3i}$$
$$(d)\quad (4-3i)^2 \qquad (b)\quad (2+i)^3$$

Réponse. (a) $9-7i$. (b) 26. (c) $\frac{1}{10}(-3+11i)$. (d) $7-24i$. (e) $(2+i)^2(2+i) = (3+4i)(2+i) = 2+11i$. *Variante :* En utilisant la formule du binôme $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ on obtient $(2+i)^3 = 8+12i-6-i = 2+11i$.

Exercice 3.2. Représenter dans le plan complexe les nombres complexes suivantes :

(a) $z_1 = 1+2i$

(b) Le nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{4}$.

(c) $z_3 = 4(\cos(\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{3\pi}{4}))$

Représentation graphique

Exercice 3.3. Trouver le lieu géométrique des points M d'affixes z dans les cas suivants

$$\text{(a)}\quad |z-2| = 1 \qquad \text{(b)}\quad |z+i| < 2 \qquad \text{(c)}\quad |z-i| = |z+1|$$

Forme exponentielle

Exercice 3.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants

$$\text{(a)}\quad (1-i\sqrt{3})^5 \qquad \text{(b)}\quad \frac{1-i}{(-\sqrt{3}+i)^2} \qquad \text{(c)}\quad \frac{2+3i}{5+i}$$

Exercice 3.5. Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous forme exponentielle.
Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$, $-z$ et $1/z$.

Exercice 3.6 (Pour s'entrainer)**.** Donner la forme exponentielles des nombres complexes suivants :

$$\text{(a)}\quad (1-i)^4 \qquad \text{(b)}\quad \frac{i-\sqrt{3}}{(i+\sqrt{3})^5} \qquad \text{(c)}\quad \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$$

Réponse. Notons le nombre complexe à déterminer par z. (a) $a = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z = a^4 = 4e^{-i\pi} = -4$. (b) $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{32e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{16}$. (c) $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice 3.7 (Pour aller plus loin)**.** Soient

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = 1-i \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

(a) Ecrire z_3 sous forme exponentielle.

(b) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

(c) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Réponse. (a) $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.
(b) $z_3 = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$.
(c) On déduit de (a) que $z_3 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$. En comparant avec (b) on trouve que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (≈ 0.9659258) et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (≈ 0.2588190).

Linéarisation

Exercice 3.8. Linéariser :

a) $\sin^4(x)$ b) $\sin(x)\cos^3(x)$ c) $\cos^2(x)\sin^2(x)$

Racines carrées

Exercice 3.9. Calculer les racines carrées de

(a) $2i$ (b) $1 - i\sqrt{3}$ (c) $-3 - 4i$ (d) $15 + 8i$

Exercice 3.10 (Pour s'entraîner)**.** Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

(a) $1 + 4i\sqrt{5}$ (b) $-45 - 28i$ (c) $33 + 56i$

Réponse. (a) $\pm(\sqrt{5} + 2i)$; (b) $\pm(2 - 7i)$; (c) $\pm(7 + 4i)$.

Équations du second degré

Exercice 3.11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $4z^2 - 2z + 1 = 0$

(b) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Exercice 3.12 (Pour s'entraîner)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $iz^2 + (2 - i)z + 2(2 - 3i) = 0$

(b) $(1 - i)z^2 - (3 + i)z + 2i = 0$

(c) $iz^2 - (i + 1)z + 2i - 1 = 0$

Réponse. (a) $\Delta = -21 - 20i$; les racines carrées de Δ sont $w_{1,2} = \pm(2 - 5i)$; les solutions de l'équation sont $z_1 = -2$, $z_2 = 2i + 3$.
(b) $\Delta = 2i$; $w_{1,2} = \pm(1 - i)$; $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$. (c) $\Delta = 8 + 6i$; $w_{1,2} = \pm(3 + i)$; $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = i$.

Exercice 3.13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

Exercice 3.14 (Exercice travaillé)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0.$$

Solution. On pose $w = z^2$ et on résout $w^2 + 10w^2 + 169 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = -576$; les racine carrées de Δ sont $\pm 24i$; les racines de l'équation en w sont : $w_1 = -5 + 12i$, $w_2 = -5 - 12i$. Les racine carrées de w_1 sont $z_{1,2} = \pm(2+3i)$; Les racine carrées de w_2 sont $z_{3,4} = \pm(2-3i)$. (*Remarque :* On peut voir que comme $w_2 = \bar{w}_1$, on a $z_{3,4} = \bar{z}_{1,2}$. Aussi : le polynome en z est réel, donc si z est une solution alors $\bar{z}$ en est une et comme toutes les puissances sont paires $-z$ est une aussi.)

Racines n-ièmes

Exercice 3.15.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $-2 + 2i$.

(b) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$.

Exercice 3.16 (Pour s'entraîner)**.** Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

Réponse. $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$. On trouve $w_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})}$: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

Exercice 3.17 (Exercice travaillé)**.** Calculer les racines cubiques de $8i$ sous forme exponentielle. Les écrire sous forme algébrique.

Réponse. On a $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. On cherche $\omega = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, tel que $\omega^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc $\rho^3 e^{i3\alpha} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. On a $\rho = 2$. On a aussi $3\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit de prendre $k = 0, 1, 2$. Les racines troisièmes de $8i$ sont donc $w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$. Sous forme algébrique on trouve $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $w_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.

(*Remarque* $w_1 = jw_0$ et $w_2 = \bar{j}w_0$, ou j et $\bar{j}$ sont des racines troisièmes de l'unité.)

Exercice 3.18 (Exercice travaillé)**.** Déterminer toutes les racines $4^{\text{èmes}}$ de

$$z = \frac{-32}{1 + i\sqrt{3}}.$$

On donnera les réponses sous forme exponentielle et sous forme algébrique.

Solution. $z = \frac{32e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$. (*Variante* : En multipliant par le conjugué on trouve $z = -8 + 8i\sqrt{3} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$.) Les racines quatrièmes de z sont $w_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$:
$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$, $w_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$, $w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$.
(*Remarque* : Pour déterminer les formes algébriques, il suffit de déterminer celle de w_0 et d'utiliser $w_1 = iz_0$, $w_2 = -z_0$, $w_3 = -iz_0$.)