2 Fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques directes

Exercice 2.1.

(a) Rappeler la formule qui exprime $\cos(a+b)$ en fonction du cosinus et sinus de a et b.

(b) En déduire les formules (à connaître) : $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos(2a))$ et $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos(2a))$. (On commence par poser $a = b$.)

(c) En déduire $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 2.2 (Pour s'entraîner)**.**

(a) Rappeler la formule qui exprime $\sin(a+b)$ en fonction du cosinus et sinus de a et b.

(b) En déduire la formule (à connaître) : $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

(c) Résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \sin x$.

Réponse. (b) On pose $b = a$. (c) $x = 0, \pi, \pi/3, 5\pi/3$.

Solution

(a) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. (b) On pose $b = a$.

$$\sin(2x) = \sin x \iff 2\sin x\cos x = \sin x \iff 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$x = 0, \pi$ et $x = \pi/3, 5\pi/3$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.3.

(a) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ? Tracer sa courbe. Quel est son image ?

(b) Donner la définition de la fonction arcsinus. Quel est son domaine de définition ? Quel est son image ? Tracer sa courbe.

(c) Même questions pour les fonctions cosinus et arccosinus.

(d) Même questions pour les fonctions tangente et arctangente.

Exercice 2.4. Calculez

$$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \qquad \arccos(-\frac{1}{2}) \qquad \arctan(1)$$

Exercice 2.5. Calculez

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{4})) \qquad \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) \qquad \arccos(\cos(-\frac{2\pi}{3})) \qquad \arccos(\cos\frac{8\pi}{3}))$$

Exercice 2.6. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\arcsin(\sin(\theta))$, si $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) $\arcsin(\sin(\theta))$, si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

(c) $\arccos(\cos(\theta))$, si $\theta \in [0, \pi]$.

(d) $\arccos(\cos(\theta))$, si $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

Exercice 2.7 (Pour s'entraîner)**.** Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\arcsin(\sin(\theta))$, si $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$.

(b) $\arccos(\cos(\theta))$, si $\theta \in [-\pi, 0]$.

(c) $\arccos(\cos(\theta))$, si $\theta \in [-2\pi, -\pi]$.

Réponse.

(a) Si $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ alors $\theta - 2\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et $\arcsin(\sin(\theta)) = \arcsin(\sin(\theta - 2\pi)) = \theta - 2\pi$.

(b) Si $\theta \in [-\pi, 0]$ alors $-\theta \in [0, \pi]$ et $\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(-\theta)) = -\theta$.

(c) $\theta \in [-2\pi, -\pi]$: alors $\theta + 2\pi \in [0, \pi]$, et $\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(\theta + 2\pi)) = \theta + 2\pi$.

Exercice 2.8 (Pour s'entraîner)**.** Soit

$$f(x) = \cos(\arcsin(x)).$$

(a) Étudier le signe de f.

(b) Montrer en utilisant $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Réponse.

(a) La fonction arcsinus prend ses valeurs dans $[-\pi, \pi]$, donc $\cos(\arcsin(x) \geq 0$.

(b) On a $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$. Vu que $f \geq 0$, on a $\cos(\arcsin(x)) = +\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Étude de fonction

Exercice 2.9. Soit

$$f(x) = \arcsin(2x^2 - 1).$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) La fonction f est-elle paire ? impaire ?

(c) Étudier la dérivabilité de f et montrer que sur $]0, 1[$ on a

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 2.10. Soit

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}), \qquad x \neq 0.$$

(a) Montrer que $f'(x) = 0$, pour $x > 0$.

(b) En déduire que $f(x) = \frac{\pi}{2}$, pour $x > 0$.

(c) Montrer que f est impaire. En déduire que $f(x) = -\frac{\pi}{2}$, pour $x < 0$.

Exercice 2.11. Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) La fonction est-elle paire ? impaire ?

(c) Déterminer le tableau de variations de f.

(d) Étudier la convexité/concavité de f.

(e) Tracer le graphe de f.

Exercice 2.12 (Exercice travaillé)**.** Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = x + \arctan\frac{1}{x}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) La fonction est-elle paire ? impaire ?

(c) Déterminer le tableau de variations sur $]0, +\infty[$.

(d) Calculer la limite de $f'(x)$ à droite en 0.

(e) Déterminer une équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

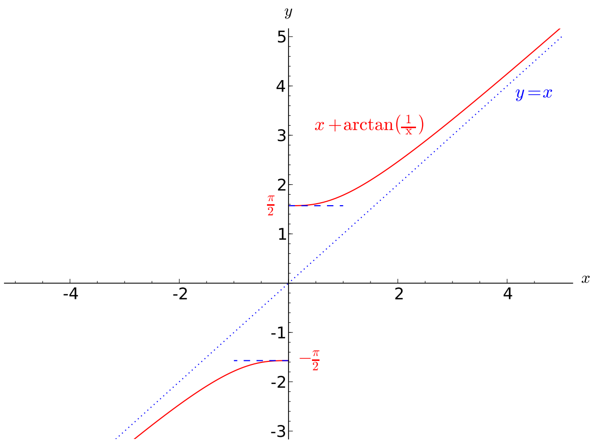
(f) Étudier la convexité/concavité de f sur $]0, +\infty[$.

(g) Tracer le graphe de f.

Réponse. (a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. (b) f est impaire. On va faire l'étude de f sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. (c) f est (continue et) dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables et on a $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. On a $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0, +\infty[$. On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le tableau de variation sur $\mathcal{D}$ est :

x	0		$+\infty$
$f'(x)-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. (e) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$. (Variante : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$). De plus, sur $]0, +\infty[$ on a $f(x) - x = \arctan(\frac{1}{x}) > 0$, donc la courbe est au-dessus de l'asymptote.
(f) On a $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ et donc f est convexe sur $]0, +\infty[$.



Exercice 2.13 (Exercice travaillé)**.** Soit la fonction réelle définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Déterminer le tableau de variations.

(c) Calculer les limites de f' à gauche et à droite en 1.

(d) Étudier les branches infinies de f.

(e) Étudier la concavité de f.

(f) Tracer la courbe représentative de f.

Réponse. (a) Domaine de définition : $\mathcal{D} =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$. (b) $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée de fonctions dérivables. On a $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2+(x+2)^2} = \frac{-3}{2x^2+2x+5}$. La dérivée étant négative, la fonction est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$. (c) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f'(x) = -\frac{1}{3}$.

(d) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$ est asymptote horizontale à la courbe quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$. D'après (b) il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 1$.
(e) La fonction f' est dérivable sur D. On a $f''(x) = \frac{3(4x+2)}{(2x^2+2x+5)^2}$. f'' est négative si $x < -\frac{1}{2}$, zero en $-\frac{1}{2}$ et positive si $x > -\frac{1}{2}$ (et $x \neq 1$). La courbe est donc concave sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et convexe sur $]-\frac{1}{2}, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Il y a donc un point d'inflexion en $x = -\frac{1}{2}$.