Licence 1 : PCSTM 2012/13

Contrôle continu 1 de Outils Mathématiques 1

Durée : 1 heure

L'utilisation des calculatrices et des calculettes est interdit.

Exercice 1 : Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de:

$$(4+4i)z^3 = \left(\sqrt{3}+1-i-\frac{5}{1+2i}\right)^4.$$

Exercice 2 : Donner et décrire géométriquement l'ensemble des solutions complexes de

$$Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0.$$

Exercice 3 : Factoriser en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = 2X^3 - 6X^2 + (6+2i)X.$$

Exercice 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{3X^5 - 6X^4 - 3X - 2}{(X-1)^2(X^2+1)}.$$

Licence 1 : PCSTM

Corrigé du contrôle continu 1 de Outils Mathématiques 1

Exercice 1 : On cherche les solutions dans $\mathbb{C}$ de:

$$(4+4i)z^3 = \left(\sqrt{3}+1-i-\frac{5}{1+2i}\right)^4. \tag{0.1}$$

Puisque

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i}{1^2+2^2} = 1-2i,$$

l'équation (0.1) est équivalente à

$$(4+4i)z^3 = \left(\sqrt{3}+i\right)^4. \tag{0.2}$$

On met $4+4i$ et $\sqrt{3}+i$ sous forme exponentielle :

$$|4+4i| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad |\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2,$$

d'où

$$4+4i = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On est donc ramené à résoudre

$$z^3 = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4}{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2^4e^{i\frac{4\pi}{6}}}{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Les solutions sont donc les

$$z = \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad \text{pour } k=0,\ 1 \text{ et } 2,$$

autrement dit,

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{36}},\ z = \sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{36}} \text{ et } z = \sqrt{2}e^{i\frac{53\pi}{36}}.$$

Exercice 2 : On cherche l'ensemble des solutions complexes de

$$Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0.$$

Il faut tout d'abord remarquer que la valeur $z=1$ est interdite. Maintenant posons $z=a+ib$, alors

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{a+1+ib}{a-1+ib} = \frac{(a+1+ib)(a-1-ib)}{(a-1+ib)(a-1-ib)} = \frac{(a+1)(a-1)+b^2-ib(a+1)+ib(a-1)}{(a-1)^2+b^2}.$$

D'où,

$$Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{a^2-1+b^2}{(a-1)^2+b^2}.$$

Ainsi, ce nombre est nul si et seulement si $z \neq 1$ et

$$a^2-1+b^2=0,$$

que l'on peut réécrire $a^2+b^2=1$. L'ensemble des solutions est donc le cercle de centre 0 et de rayon 1 privé du point $z=1$.

Exercice 3 : Pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P, remarquons d'abord que

$$P(X) = 2X^3-6X^2+(6+2i)X = 2X(X^2-3X+(3+i)).$$

Factorisons maintenant $X^2-3X+(3+i)$. Le discriminent s'écrit

$$\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i.$$

On cherche une racine carré de Δ c'est-à-dire $w=a+ib \in \mathbb{C}$ tel que $w^2=\Delta$. Puisque

$$w^2 = a^2-b^2+2abi \text{ et } |w^2| = |w|^2 = a^2+b^2,$$

il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 & (1) \\ 2ab=-4 & (2) \\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5, & (3) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} (1)+(3) \ : \ 2a^2=2 \\ (3)-(1) \ : \ 2b^2=8 \\ ab=-2, \end{cases}$$

Ainsi $w=1-2i$ est racine de Δ et les racines de $X^2-3X+(3+i)$ sont

$$z_1 = \frac{3-(1-2i)}{2} = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+(1-2i)}{2} = 2-i.$$

Finalement on a

$$P(X) = 2X(X-z_1)(X-z_2) = 2X(X-1-i)(X-2+i).$$

Exercice 4 : Pour décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{3X^5-6X^4-3X-2}{(X-1)^2(X^2+1)},$$

on commence par chercher sa partie entière. Développons son dénominateur:

$$(X-1)^2(X^2+1) = (X^2-2X+1)(X^2+1) = X^4-2X^3+2X^2-2X+1.$$

D'où la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3X^5-6X^4 \qquad\qquad\quad -3X-2 & X^4-2X^3+2X^2-2X+1 \\
 & -(3X^5-6X^4+6X^3-6X^2+3X) & ------------------ \\
 & -6X^3+6X^2-6X-2 & 3X
\end{array}$$

et on s'arrête là puisque $deg(-6X^3+6X^2-6X-2) < deg(X^4-2X^3+2X^2-2X+1)$. La partie entière de R est donc $E(X) = 3X$.

Remarquons que le dénominateur de R est déjà sous forme des facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi la forme théorique de la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{R}(X)$ est

$$R(X) = \frac{3X^5-6X^4-3X-2}{(X-1)^2(X^2+1)} = E(X) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}, \tag{0.3}$$

où les coefficients a, b, c et d sont réels.

Pour trouver b on multiplie (0.3) par $(X-1)^2$ et on évalue en $X=1$:

$$b = R(X)(X-1)^2\Big|_{X=1} = \frac{3-6-3-2}{1^2+1} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Pour trouver c et d, on multiplie (0.3) par (X^2+1) et on évalue en $X=i$:

$$ci+d = R(X)(X^2+1)\Big|_{X=i} = \frac{3i-6-3i-2}{(i-1)^2} = \frac{-8}{-2i} = -4i,$$

d'où $c=-4$ et $d=0$. La décomposition (0.3) donne donc

$$R(X) = \frac{3X^5-6X^4-3X-2}{(X-1)^2(X^2+1)} = 3X + \frac{a}{X-1} - \frac{4}{(X-1)^2} - \frac{4X}{X^2+1}. \tag{0.4}$$

Pour déteminer a, il suffit par exemple d'évaluer cette égalité en $X=0$:

$$\frac{-2}{(-1)^2} = -a-4 \text{ et donc } a=-2.$$

En conclusion :

$$R(X) = 3X - \frac{2}{X-1} - \frac{4}{(X-1)^2} - \frac{4X}{X^2+1}.$$

L1 PCSTM OM1 : Contrôle continu 2 2012/13

Durée : 1 h - L'utilisation des calculatrices et des calculettes est interdite

Exercice 1 : Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x + Arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Première partie : Etude de la fonction f.

1) Déterminer le domaine de définition de f, $\mathcal{D}_f$.
2) Réduire si possible le domaine d'étude.
3) Déterminer la dérivée de f : en déduire les variations de f.
4) Lorque x tend vers 0 à droite, déterminer les limites de $f(x)$ et de $f'(x)$.
5) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
6) Etudier la concavité de f.
7) Tracer le graphe de f en plaçant les demi-tangentes à l'origine et les asymptotes en l'infini.

Deuxième partie : Intégrale de f. Soit I l'intégrale donnée par :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx.$$

8) Que représente graphiquement I ?

9) Déterminer une primitive de $\dfrac{2x}{x^2+1}$.

10) En déduire une primitive de $Arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (Indication : $v' = 1$)

11) Calculer I. (Indication : $Arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$)

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'ensemble des primitives de f :

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, 2) $f(x) = \dfrac{4\cos(x)}{3+\cos^2(x)}$, 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(x)$,

4) $f(x) = (ch(x))^2$, (indication : $u = e^x$), 5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}$.

UFR Mathématiques de l'université de Rennes 1 — Année 2012-2013

Licence 1 : PCSTM — Outils Mathématiques 1

Examen Terminal du 18 décembre 2012 - Durée : 2 heures

Calculettes et documents ne sont pas autorisés sauf la « feuille triche »

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+i)z + (3+i) = 0$.
2. Montrer que 1 est solution de

$$(E) \qquad z^3 - (3+i)z^2 + (5+2i)z - (3+i) = 0.$$

3. Trouver $P(z) = z^2 + az + b$ tel que

$$z^3 - (3+i)z^2 + (5+2i)z - (3+i) = (z-1)P(z).$$

4. En déduire, sans nouveau calcul, les solutions de (E).

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(1+e^{2x}) - 2\ \mathrm{Arctan}(e^x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et donner le tableau de variation de f.
3. Calculer les limites de f aux bords de $\mathcal{D}_f$.
4. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = -\pi.$$
5. En déduire que le graphe de f admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on donnera les équations cartésiennes.
6. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$? Justifier.

Exercice 3.

1. Calculer
$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx.$$
(*Indication :* On pourra faire le changement de variable $u = 1 + x^2$.)
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(x) = \frac{4x+5}{(x-1)(1+x^2)}.$$
3. En déduire une primitive de F.
(*Indication :* on pourra décomposer le terme $\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ sous la forme $\alpha\dfrac{2x}{1+x^2} + \beta\frac{1}{1+x^2}$.)
4. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle :
$$(H) \qquad y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$
5. Déterminer un solution particulière de l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x+5}{x-1}.$$
Indication : On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.
6. En déduire la forme générale des solutions de (E).
7. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 4.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :
$$(H) \quad y'' + y' - 2y = 0.$$
2. Trouver une solution particulire l'équation différentielle :
$$(E) \quad y'' + y' - 2y = (6x+2)e^x.$$
3. En déduire la forme générale des solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.

Corrigé succinct de l'examen du 18 décembre 2012

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+i)z + (3+i) = 0$.
2. Montrer que 1 est solution de
$$(E) \qquad z^3 - (3+i)z^2 + (5+2i)z - (3+i) = 0.$$
3. Trouver $P(z) = z^2 + az + b$ tel que
$$z^3 - (3+i)z^2 + (5+2i)z - (3+i) = (z-1)P(z).$$
4. En déduire, sans nouveau calcul, les solutions de (E).

Solution.

1. $1+2i$, $1-i$.
2. Montrer que 1 est solution de
$$(E) \qquad z^3 - (3+i)z^2 + (5+2i)z - (3+i) = 0.$$
3. Une division euclidienne donne $P(z) = z^2 - (2+i)z + (3+i) = 0$.
4. 1, $1+2i$, $1-i$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \ln(1+e^{2x}) - 2\ \mathrm{Arctan}(e^x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et donner le tableau de variation de f.
3. Calculer les limites de f aux bords de $\mathcal{D}_f$.
4. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = -\pi.$$
5. En déduire que le graphe de f admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on donnera les équations cartésiennes.
6. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$? Justifier.

Solution.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. $$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} - 2\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2e^x(e^x-1)}{1+e^{2x}}$$
$f'(x) > 0$ ssi $x > 0$ et $f'(x) < 0$ ssi $x < 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
4. On utilise $\ln(1+e^{2x}) = \ln(e^{2x}(e^{-2x}+1) = \ln(e^{2x})\ln(1+e^{-2x}) = 2x + \ln(1+e^{-2x})$
et $\lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \pi/2$.

5. $y = 2x - \pi$ en $+\infty$ et $y = 0$ en $-\infty$
6. (i) Le tableau des variations montre que $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 0]$. Aucune solution. (ii) f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ avec $f(0) < 0$ (voir (i)) et $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, donc exactement une solution. (On utilise : f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc f prend chaque valeur dans $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ exactement une fois, donc en particulier la valeur 0.)

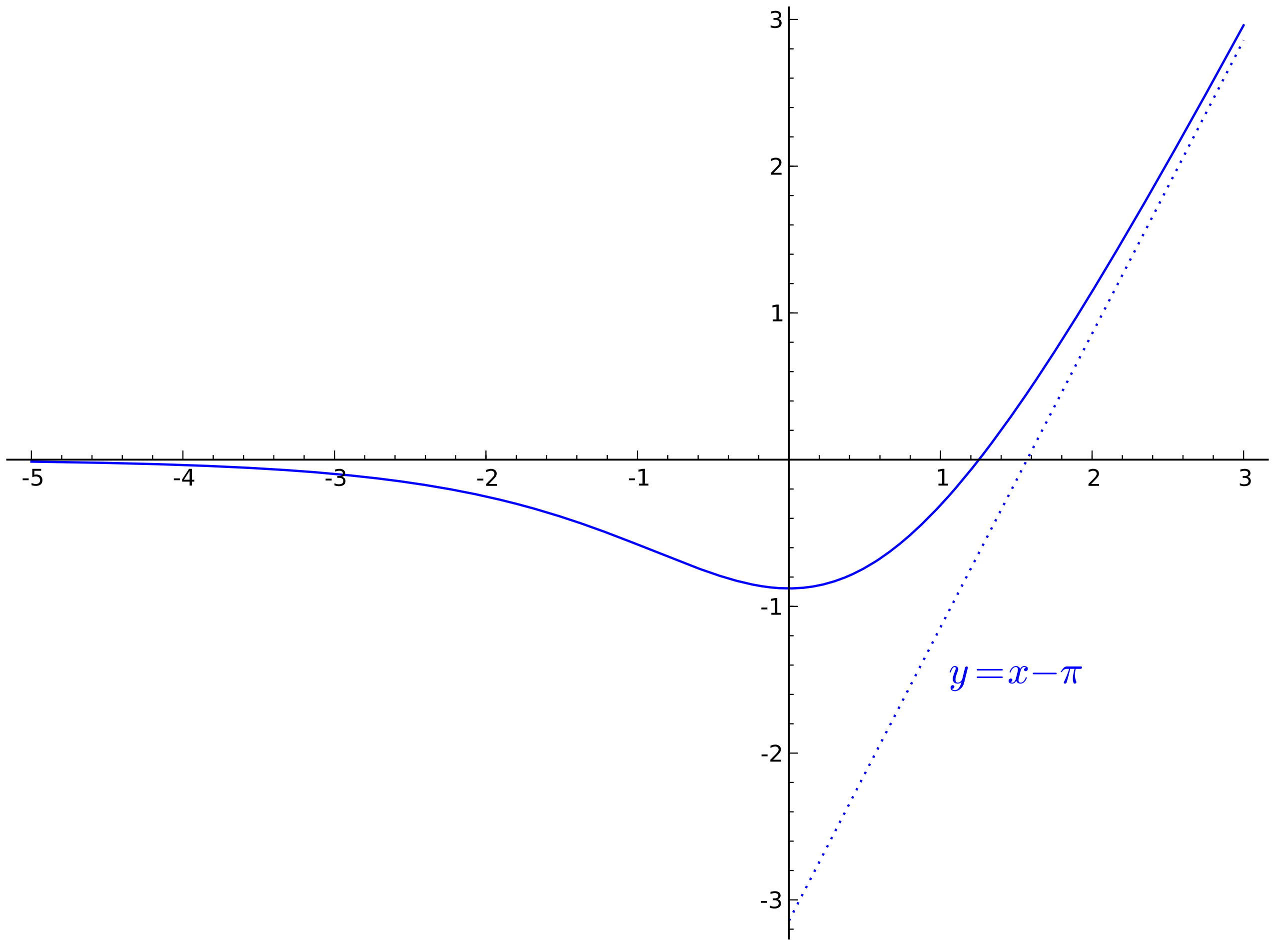

FIGURE 1 – La courbe représentative de $\ln(1 + e^{2x}) - 2\ \mathrm{Arctan}(e^x)$.

Exercice 3.

1. Calculer
$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx.$$
(*Indication :* On pourra faire le changement de variable $u = 1 + x^2$.)

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(x) = \frac{4x+5}{(x-1)(1+x^2)}.$$

3. En déduire une primitive de F.
(*Indication :* on pourra décomposer le terme $\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ sous la forme $\alpha\dfrac{2x}{1+x^2} + \beta\frac{1}{1+x^2}$.)

4. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle :
$$(H) \qquad y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

5. Déterminer un solution particulière de l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x+5}{x-1}.$$
Indication : On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

6. En déduire la forme générale des solutions de (E).

7. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Solution.

$$1. \quad \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(1+x^2) + c.$$

$$2. \quad F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{x-1} - \frac{9x+1}{1+x^2}\right).$$

$$3. \quad \int F(x)dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{9}{4}\int \frac{2x}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

Donc $\int F(x)dx = \frac{9}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan(x) + c$.
4. $y_0 = c(1+x^2)$.
5) On pose $y_p = c(x)(1+x^2)$. On obtient $c'(x) = F(x)$, donc $c(x) = \frac{9}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan(x)$, et $y_p = (1+x^2)(\frac{9}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan(x))$.
6) $y_p + c(1+x^2) = (1+x^2)(c + \frac{9}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan(x))$.
7) $c = 2$ donc $(1+x^2)(2 + \frac{9}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan(x))$.

Exercice 4.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(H) \quad y'' + y' - 2y = 0.$$

2. Trouver une solution particulière à l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + y' - 2y = (6x + 2)e^x.$$

3. En déduire la forme générale des solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.

Solution.

1. $c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
2. On pose $y_p = x(ax + b)e^x$. On trouve $y_0 = x^2 e^x$.
3. $x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
4. $x^2 e^x + 2e^x + e^{-2x}$.

Université de Rennes 1 — 2012–2013
UFR de Mathématiques — Licence

Outils Mathématiques 1

Deuxième Session : Juin 2013 (Durée : 2 heures)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 1
Soit un nombre complexe z. On désigne son conjugué par $\overline{z}$.
Résoudre l'équation $z^2 = \overline{z}^2$.
Soit le nombre complexe $w_0 = 1 + i$.
Donner la forme exponentielle de w_0 et résoudre l'équation $z^5 = w_0$.

Exercice 2
On considère la fonction $f(x)$ définie par l'expression $f(x) = \arctan x + \arctan 1/x$.
Donner son domaine de définition, les intervalles où elle est dérivable.
Calculer sa dérivée $f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3
Soit la fonction g définie comme suit :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; / \;\; x \longrightarrow g(x) = Ln(1 + \sin x) + \sin x$$

1) Donner le domaine de définition, étudier la parité et la périodicité de g.
2) Calculer l'expression de la dérivée $g'(x)$.
   En déduire les variations de g et donner son tableau de variation.
3) Déterminer les asymptotes éventuelles de g.

Exercice 4
On considère la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$$

1) Donner la décomposition théorique de cette fraction.
2) Calculer les coefficients de cette décomposition théorique.
3) En déduire une primitive de cette fraction.

Exercice 5
Soit l'équation différentielle suivante :

$$(2+\sin x)\,y' - (\cos x)\,y = (2+\sin x)\cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

1) Résoudre l'équation homogène.
2) A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer les solutions générales.

Exercice 6
Expliciter les solutions générales de l'équation différentielle du second ordre suivant :

$$y" + 2y' + 2y = 0$$