Université de Rennes I Année 2011-2012
L1- PCSTM **OM1**

Examen: Outils mathématiques 1

Le 13/12/2011

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère le polynôme P défini par

$$P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (13+i)z - 2 - 14i.$$

1. Montrer que i est une racine de P.
2. Trouver le polynôme Q tel que $P(z) = (z-i)Q(z)$.
3. Chercher les racines carrées de $-48 + 14i$.
4. Trouver toutes les solutions complexes de $Q(z) = 0$.
5. En déduire les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - x.$$

1. Donner le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$
5. En déduire les variations de f.
6. Etudier l'existence d'asymptotes verticales.
7. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x)+x\big)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+x\big)$.
8. En déduire les asymptotes obliques en $-\infty$ et en $+\infty$.
9. Calculer $f(1)$. En utilisant le tableau des variations, résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant -1$.

Exercice 3.

1. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X(X^2+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$, pour tout $x > 0$.
3. En intégrant par parties, montrer l'identité suivante : Pour tout $x > 0$,
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\arctan t\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan x}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt.$$
4. En déduire l'expression de $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\arctan t\,dt$, pour tout $x > 0$.
5. Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 4. On se propose de résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 3y' + 3y = (x^2+1)e^x. \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E).
3. Donner toutes les solutions de (E).

Université de Rennes I
L1- PCSTM

Année 2011-2012
OM1

Examen de rattrapage: Outils mathématiques 1

Le ../06/2012

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère le nombre complexe $w = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

1. Donner la forme exponentielle de w.
2. Résoudre sous forme exponentielle l'équation d'inconnue z : $z^3 = w$.
3. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de l'équation précédente sous forme algébrique.
4. A partir des questions précédentes déterminer les valeurs de $\cos(\frac{11}{12}\pi)$ et $\sin(\frac{11}{12}\pi)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Etudier la partité de f.
2. Etudier les variations de f.
3. Montrer l'identité suivante :
$$f(x) - x = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)}.$$
4. Etudier l'existence des asymptotes au voisinage de $+\infty$.
On définit dans la suite le nombre réel suivant
$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$
5. Vérifier que
$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$
6. Démontrer que $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
8. En effectuant une intégration par parties, démontrer la relation
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \sqrt{2} - I.$$

9. En déduire la valeur de I.

Exercice 3. On se propose de résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$, l'équation différentielle suivante

$$y' - \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{x^2(x-1)} \cdot \qquad (1)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (1).
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de (1).
3. Donner toutes les solutions de l'équation (1).

Exercice 4. On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 6y' - 7y = (x+1)e^x. \qquad (2)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (2).
2. Trouver une solution particulière de (2).
3. Donner toutes les solutions de (2).