ÉNS Rennes – Première année Mathématiques — 2023/2024
Université de Rennes – L3 Mathématiques — Agnès DAVID
ANneaux et ARithmétique — agnes.david@ens-rennes.fr

Feuille d'exercices 2

Dans toute la feuille, A désigne un anneau unitaire commutatif.

Exercice 1. À quelle condition l'idéal $\{0\}$ est-il premier dans A ? Maximal ?

Exercice 2.

1. Démontrer que A est un corps si et seulement s'il ne possède pas d'idéal propre non trivial.
2. Démontrer : si tous les idéaux propres de A sont premiers, alors A est un corps. *Indication : construire un idéal (premier) à partir d'un élément a dans $A \setminus \{0\}$.*
3. On suppose A intègre ; démontrer : si A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux, alors A est un corps. *Indication : on peut pousser plus loin la construction précédente.*

Exercice 3. Démontrer que l'ensemble $R = \{a \in A \mid \forall x \in A,\ 1 + ax \in A^\times\}$ est un idéal de A.

Exercice 4. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est inclus dans B et un sous-anneau de B.
2. Démontrer que tout idéal de B est principal.

Exercice 5. Soient I, J, K trois idéaux de A.

1. Démontrer que le produit d'idéaux est associatif : $(IJ)K = I(JK)$.
2. A-t-on également la relation de distributivité $I(J + K) = IJ + IK$?

Exercice 6 (Radical)**.** Soit I un idéal de A. On appelle *radical* de I (et on note $\sqrt{I}$) l'ensemble $\sqrt{I} := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ a^n \in I\}$.

1. Démontrer que $I \subseteq \sqrt{I}$.
2. Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
3. Soit J un idéal de A contenant I ; démontrer : $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.
4. Démontrer que tout idéal premier de A est égal à son radical.
5. Démontrer que tout idéal premier de A contenant I contient aussi $\sqrt{I}$.
6. Démontrer : $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
7. Soit J un idéal de A ; démontrer : $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
8. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, démontrer : $\sqrt{I^m} = \sqrt{I}$.
9. Soit n dans $\mathbb{N}^*$; on considère l'idéal $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer $\sqrt{n\mathbb{Z}}$.
   (b) Donner un exemple de n vérifiant : $n\mathbb{Z} \subsetneq \sqrt{n\mathbb{Z}}$.

(c) Donner un exemple de n non premier (et différent de 1) vérifiant : $n\mathbb{Z} = \sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ avec $\#V \geq 2$; on considère $\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in V,\ f(x) = 0\}$.

10. Démontrer que $\mathcal{I}(V)$ est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
11. L'idéal $\mathcal{I}(V)$ est-il premier ?
12. Démontrer : $\sqrt{\mathcal{I}(V)} = \mathcal{I}(V)$.

Exercice 7. Soient B un anneau commutatif unitaire, J un idéal de B et f un morphisme d'anneaux de A dans B.

1. Démontrer : si J est premier, alors $f^{-1}(J)$ est premier.
2. Qu'en est-il si on suppose J maximal ?
3. On suppose que B est un corps et f surjectif ; démontrer que $\ker f$ est maximal dans A.
4. On suppose que B est intègre ; justifier que $\ker f$ est un idéal premier de A.

Exercice 8. On dit que l'anneau A est *local* si A possède un unique idéal maximal.

1. Démontrer que A est local si et seulement si $A \setminus A^{\times}$ est un idéal de A.
   Lorsque c'est le cas, cet idéal est-il maximal dans A ?
2. Démontrer que tout corps est un anneau local.
3. L'anneau $\mathbb{Z}$ est-il local ?

Pour p un nombre premier, on considère la partie $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, p \nmid b \right\}$ de $\mathbb{Q}$.

4. Démontrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
5. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ est local et expliciter son idéal maximal.

Exercice 9. Soit B un sous-anneau de A ; on appelle *conducteur* de B dans A (noté ici C) l'ensemble des éléments a de A vérifiant : $aA \subseteq B$.

1. Démontrer que tout idéal de A inclus dans B est aussi un idéal de B.
2. Donner un exemple d'anneaux A, B et d'un idéal de B qui n'est pas un idéal de A.
3. Démontrer que C est un idéal de A.
4. En déduire que C est également un idéal de B.
5. Soit I une partie de B qui est un idéal de A ; démontrer que I est inclus dans C.

Exercice 10. Soit B un anneau commutatif unitaire.

1. Soit I un idéal de A et J un idéal de B ; démontrer que $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
2. Décrire l'ensemble des idéaux de $A \times B$ en fonction de ceux de A et B.
3. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; démontrer que $\mathfrak{p} \times B$ est un idéal premier de $A \times B$.
4. Même question qu'en 2 avec les idéaux premiers.
5. On suppose maintenant que A et B sont des corps. Déterminer les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $A \times B$.
6. Soient n dans $\mathbb{N}_{\geqslant 3}$, $A_1, \ldots, A_n$ des anneaux (commutatifs unitaires) ; on considère l'anneau produit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Décrire les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de A en fonction de ceux de $A_1, \ldots, A_n$.

Agnès DAVID

agnes.david@ens-rennes.fr

Feuille d'exercices 3

Dans toute la feuille, A désigne un anneau unitaire commutatif et K un corps.

Exercice 1. Que peut-on dire de l'idéal (X) de $A[X, Y]$?

Exercice 2.

1) On suppose l'anneau A intègre.
   Soient P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 dans $A[X]$ vérifiant : $P \neq 0$; $\deg R_1 < \deg P$; $\deg R_2 < \deg P$; $PQ_1 + R_1 = PQ_2 + R_2$. Démontrer : $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$.
2) Soient L un corps contenant K et P, Q dans $K[X]$.
   On suppose que P divise Q dans $L[X]$. A-t-on : P divise Q dans $K[X]$?

Exercice 3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1) Soit d dans $\mathbb{N}^*$ un diviseur de n ; démontrer que $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ dans $K[X]$.
2) Soit d dans $\mathbb{N}^*$ et r le reste (positif) de la division euclidienne de n par d ; démontrer que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^d - 1$ dans $K[X]$.

Exercice 4.

1) Démontrer : tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.
2) Donner un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 1, non irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5. Soit P dans $K[X]$.

1) Démontrer : si P est irréductible et $\deg(P) \neq 1$, alors P n'a pas de racine dans K.
2) Donner une condition suffisante sur P pour que la réciproque soit vraie.
3) Donner un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{R}$ et non irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4) Démontrer que $X^3 + X^2 + 1$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

Exercice 6.
On considère l'anneau $A = \{a + ib\sqrt{5},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et le corps $K = \{a + ib\sqrt{5},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Démontrer que le polynôme $3X^3 + 4X + 3$ est irréductible dans $A[X]$ et réductible dans $K[X]$.

Exercice 7. Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ non constant ; pour tout nombre premier p, on note $\pi_p(P)$ le polynôme dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ obtenu en réduisant les coefficients de P modulo p.
Démontrer : il existe un ensemble fini de nombres premiers X tel que, pour tout premier p n'appartenant pas à X, $\pi_p(P)$ a une racine dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8. On suppose l'anneau A intègre.

1) Soient a dans $A^\times$ et b dans A ; démontrer qu'il existe un unique automorphisme de l'anneau $A[X]$ qui laisse invariants les éléments de A et envoie X sur $aX + b$.
2) Démontrer que les automorphismes d'anneau de $A[X]$ qui laissent invariants les éléments de A sont du type précédent.

ÉNS Rennes – Première année Mathématiques — 2024/2025
Université de Rennes – L3 Mathématiques — Agnès DAVID
ANneaux et ARithmétique — agnes.david@ens-rennes.fr

Feuille d'exercices 3

Dans toute la feuille, A désigne un anneau unitaire commutatif (non nul) et K un corps.

Exercice 1. Soit n dans $\mathbb{N}$. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Lesquels sont premiers, maximaux ?

Exercice 2. On suppose l'anneau A principal (c'est-à-dire que A est intègre et tout idéal de I admet une famille génératrice à un élément). Soit I un idéal propre de A ; démontrer que tout idéal de A/I est principal (c'est-à-dire admet une famille génératrice à un élément).

Exercice 3. Démontrer : tout idéal propre de A est contenu dans un idéal maximal de A.

Exercice 4.

1. On suppose que l'anneau A est fini, de cardinal 4.
   Démontrer que la caractéristique de A (i.e. l'élément de $\mathbb{N}$ générateur du noyau de l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A) vaut 2 ou 4.
2. Donner au moins trois (voire quatre) anneaux de cardinal 4 deux à deux non isomorphes.

Exercice 5 (Un quotient des entiers de Gauss)**.** On rappelle que $\mathbb{Z}[i]$ désigne le sous-anneau de $\mathbb{C}$ formé des nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont dans $\mathbb{Z}$.
On note R l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$.

1. Rappeler les éléments du groupe $\mathbb{Z}[i]^\times$ des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. En déduire que l'anneau R est non nul.
3. Démontrer que $\overline{i} = \overline{3}$ dans R.
4. Démontrer que $\overline{10} = \overline{0}$ dans R.
5. Donner un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans R.
6. L'idéal $(1+3i)$ de $\mathbb{Z}[i]$ est-il premier ? Maximal ?

Exercice 6 ((Nil)radical)**.** On note $\operatorname{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A.

1. Démontrer que $\operatorname{Nil}(A)$ est un idéal, égal à $\sqrt{(0_A)}$.
2. Démontrer que $\operatorname{Nil}(A)$ est égal à l'intersection des idéaux premiers de A.
   Indication : pour l'inclusion réciproque, on pourra considérer, pour x dans $A \setminus \operatorname{Nil}(A)$, l'ensemble des idéaux de A ne rencontrant pas $\{x^n,\, n \in \mathbb{N}^*\}$ et utiliser le lemme de Zorn.
3. Démontrer : $\operatorname{Nil}\big(A/\operatorname{Nil}(A)\big) = (0)$ (i.e. le seul élément nilpotent dans le quotient $A/\operatorname{Nil}(A)$ est 0 ; un tel anneau est dit *réduit*).
4. Démontrer : $\operatorname{Nil} A = (0)$ si et seulement s'il existe un morphisme d'anneaux injectif de A dans un produit d'anneaux intègres.

5. Soit I un idéal propre de A ; on note π la surjection canonique de A dans A/I.
   (a) Démontrer : $\pi\big(\sqrt{I}\big) = \mathrm{Nil}(A/I)$. En déduire : $\mathrm{Nil}(A/I) = (0) \Leftrightarrow I = \sqrt{I}$.
   (b) Démontrer : $\sqrt{I} = \displaystyle\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{p}\supseteq I}} \mathfrak{p}$.
6. Pour n dans $\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, déterminer $\mathrm{Nil}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 7 (Radical de Jacobson)**.** On appelle *radical de Jacobson* de l'anneau A, noté $J(A)$ ou $\mathrm{Jac}(A)$, l'intersection des idéaux maximaux de A.

1. Démontrer : $J(A) = \{a \in A \mid \forall x \in A,\ 1 + ax \in A^\times\}$.
2. Démontrer : $\mathrm{Nil}\, A \subseteq J(A)$ (notation Nil de l'Exercice 6).
3. Démontrer : $J\big(A/J(A)\big) = (0)$.
4. Soit I un idéal de A contenu dans $J(A)$; démontrer : $J(A/I) = J(A)/I$.
5. Pour n dans $\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, déterminer $J\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 8. On considère l'anneau $K[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans K.

1. Demander la définition de cet anneau, si besoin.
2. Démontrer : $K[[X]]^\times = \{F \in K[[X]] \mid F(0) \in K^\times\}$.
3. Déterminer la liste des idéaux de $K[[X]]$. Lesquels sont premiers ? Maximaux ?
4. Déterminer $\mathrm{Nil}\,(K[[X]])$ et $\mathrm{Jac}\,(K[[X]])$.