UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Équations Différentielles

Corrigé du CC2

Questions de cours.

Q1. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ordinaire *autonome* ?

C'est une EDO du type $y' = f(y)$ *où le terme source* f *ne dépend pas de* t.

Q2. Donner deux exemples d'espaces de Banach $(E, \| \cdot \|)$ de dimension infinie.

$$E_1 = C([0,1];\mathbb{R})\,, \qquad \| f \|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

$$E_2 = \ell^1(\mathbb{N})\,, \qquad \| (u_n)_n \|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,.$$

Par contre, $\mathbb{R}^p$ *ne convient pas car la dimension* p *est finie.*

Q3. Donner un exemple de problème de Cauchy $y'(t) = f(y)$ et $y(0) = y_0$ pour lequel il n'y a pas unicité locale.

$$f(y) = \sqrt{y} \qquad y_0 = 0$$

Les fonctions $y(t) = 0$ *et* $y(t) = t^2/4$ *sont toutes les deux solutions pour* $t \geq 0$. *Notez que la fonction* $y \to \sqrt{y}$ *n'est pas Lipschitzienne en* 0.

Exercice 1. On considère le problème de Cauchy formé de l'équation différentielle ordinaire $y'(t) = y(t)^{4/3}$ et associé à la donnée initiale $y(0) = 1$.

1.1. Justifier l'existence d'une unique solution locale.

La fonction $f : y \mapsto y^{4/3}$ *est continue, dérivable de dérivée* $f'(y) = (4/3)\, y^{1/3}$ *continue sur* $\mathbb{R}$. *Elle est donc de classe* C^1 *(et donc Lipschitzienne) sur* $\mathbb{R}$. *Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

1.2. Calculer la solution maximale et déterminer son intervalle I de définition.

$$y(t) = 27\,(3-t)^{-3}\,, \qquad I =]-\infty, 3[$$

Cela revient en effet à résoudre $-3\,(y^{-1/3})' = 1$ *qui conduit à* $-3\,y(t)^{-1/3} + 3 = t$ *ou encore* $3 - t = 3\,y(t)^{-1/3}$. *Il suffit d'élever au cube. Partant de* $t = 0$, *la solution est définie tant que* $t < 3$.

Exercice 2. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver une solution de classe C^1 sur l'intervalle $]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$ de l'équation différentielle ordinaire $y' + t\,y^2 = -t$.

$$y(t) = \tan\Big(-\frac{t^2}{2}\Big).$$

Cela revient à résoudre $y'/(1+y^2) = (\arctan y)' = -t$, *ce qui conduit après intégration à* $\arctan y(t) = \lambda - (t^2/2)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Il suffit de choisir* $\lambda = 0$ *pour avoir une solution bien définie sur l'intervalle prescrit.*

Exercice 3. On cherche à résoudre $y''(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ avec les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3.1. Interpréter ce problème en un problème de Cauchy $X'(t) = F(X)$ et $X(0) = X_0$ posé sur $\mathbb{R}^2$.

$$X = (X_1, X_2) = (y, y') \qquad F(X) = (X_2, 1/X_1) \qquad X_0 = (1, 0)$$

3.2. En déduire que ce problème possède une unique solution maximale y qui est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0.

La fonction F, vue comme fonction des deux variables X_1 et X_2, est différentiable en dehors de la droite verticale $X_1 = 0$. En particulier, elle est localement Lipschitzienne au voisinage du point $X_0 = (1, 0)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour trouver une unique solution maximale au problème de Cauchy $X'(t) = F(X)$ et $X(0) = X_0$, ce qui donne en particulier y.

3.3. Quelles sont l'équation et les données initiales vérifiées par la fonction $\tilde{y} : t \mapsto y(-t)$?

$$\tilde{y}''(t) = \frac{1}{\tilde{y}(t)} \qquad \tilde{y}(0) = 1 \qquad \tilde{y}'(0) = 0$$

3.4. En déduire que $a = -b$ et que y est paire.

La fonction $\tilde{y}$ est solution sur $]-b, -a[$ du même problème de Cauchy que y. Par unicité de la solution maximale, on doit avoir $a = -b$ et $\tilde{y}(t) = y(-t) = y(t)$. Avec le même argument, on peut aussi préférer raisonner au niveau de $\big(X_1(-t), -X_2(-t)\big)$.

3.5. On suppose qu'il existe un point c avec $0 < c < b$ tel que y'' soit (strictement) positive sur $[0, c[$ et $y''(c) = 0$. Trouver une contradiction.

On propose trois méthodes :

Méthode 1. Comme $c < b$, on doit avoir $y''(c) = 1/y(c) = 0$ ce qui n'est possible pour aucun nombre réel $y(c)$.

Méthode 2. Comme y ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $[0, c[$, sans quoi l'EDO ne serait pas définie, on a y positive sur $[0, c[$, donc y'' positive sur $[0, c[$, donc y' croissante, donc $y(c) \geq 1$ et $y''(c) = 1/y(c) \neq 0$.

Méthode 3. La condition $y''(c) = 0$ implique que la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers c par valeurs négatives doit être $\pm\infty$. En particulier $\| X(t) \|$ tend vers $+\infty$ ce qui est en contradiction avec la définition de b et le théorème d'explosion (des bouts).

3.6. Etablir le tableau de variation de y sur $[0, b[$.

	0		b
y"	1	+	
y'	0	$\nearrow$	
y	1	$\nearrow$	

La fonction y'' reste donc positive sur $[0, b[$. Il s'ensuit que y' est croissante sur $[0, b[$ et donc positive puisque $y'(0) = 0$. Du coup, y est croissante sur $[0, b[$, avec $y(t) \geq 1$.

3.7. On suppose $b \in \mathbb{R}$. Prouver par l'absurde que $\lim\limits_{t \to b} y(t) = +\infty$.

Comme y est croissante, soit elle admet une limite finie $\ell > 1$, soit elle tend vers $+\infty$. Dans le premier cas, comme $y(t) \geq 1$, on a $0 \leq y''(t) = 1/y(t) \leq 1$ d'où

$$0 \leq y'(t) = \int_0^t y''(s)\, ds \leq t$$

et le vecteur $X(t) = (y, y')(t)$ reste borné au voisinage du point b contredisant ainsi le théorème d'explosion. Faire attention, le théorème d'explosion ne s'applique pas à la seule composante $y(t)$: il faut considérer simultanément $y'(t)$.

3.8. Prouver par l'absurde que $]a, b[= \mathbb{R}$.

Le plus simple est d'utiliser la question 3.6 qui donne $0 \leq y'' = 1/y \leq 1$ puis

$$0 \leq y'(t) = \int_0^t y''(s)\, ds \leq t \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq y(t) = 1 + \int_0^t y'(s)\, ds \leq 1 + \int_0^t s\, ds \leq 1 + (t^2/2)\,.$$

On constate que y ne peut pas exploser en temps fini ce qui contredit la conclusion de la question 3.7.