EFFETS DISPERSIFS DANS LES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER ET DE VLASOV

F. CASTELLA
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Analyse Numérique
Tour 55/65 - 5ème Étage
4, place Jussieu - 75 252 PARIS CEDEX 05
e-mail: castella@ann.jussieu.fr

Paru dans *Séminaire X-EDP, 1997-1998, Exp. No. XXIV., Ecole Polytechnique, Palaiseau (1998).*

1. Introduction.

Ce travail vise à approfondir l'analogie de structure entre l'équation de Schrödinger de la Mécanique Quantique et les équations cinétiques de la Mécanique Classique (équation de Vlasov), au-delà des limites déjà connues lorsque la constante de Planck $\hbar$ tend vers 0 (limite semi-classique). Cette analogie repose sur les propriétés dispersives de ces deux équations, et permet d'exhiber des effets régularisants nouveaux dans les équation cinétiques, qui sont pourtant réversibles dans le temps. Plus précisément, on sait que l'équation de Schrödinger posée sur $\psi := \psi(t,x)$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$),

$$i\hbar\partial\psi/\partial t = \hbar^2\Delta_x\psi + \text{ non-linéarité } ,$$

"converge" quand $\hbar$ tend vers 0 vers l'équation de Vlasov posée sur $f(t,x,v)$ ($t \in \mathbb{R}$, $(x,v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$),

$$\partial f/\partial t + v \cdot \nabla_x f = \text{ non-linéarité } .$$

Ces deux équations ont en apparence des structures très différentes, l'opérateur $i\hbar\partial_t - \hbar^2\Delta_x$ tendant à générer des oscillations de la fonction d'une variable d'espace $\psi(t,x) \in L^2(x)$, quand l'opérateur $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ incite à regarder des phénomènes de transport selon le flot d'un Hamiltonien pour la fonction de deux variables d'espace et de vitesse $f(t,x,v) \in L^1(x,v)$. Notre objectif ici est d'éclairer en quoi ces deux équations peuvent être étudiées à l'aide d'outils très semblables, et d'en déduire des résultats nouveaux tant au niveau Schrödinger qu'au niveau cinétique. En particulier, dans ces deux cas, c'est le problème de l'existence de solutions d'"énergie cinétique infinie" qui retient principalement notre attention.

Nous souhaitons indiquer ici que ce point de vue, qui fait le lien entre les équations de Schrödinger et celles de Vlasov, a déjà été exploité dans de nombreux travaux. Parmi ceux-ci nous citerons [LPe1], [LPe2], et [Co] pour ce qui concerne les propriétés de dispersion dans les équations de type Vlasov, ainsi que [LPa], [MMP], [GMMP], [Ni] pour des questions liées à la limite lorsque $\hbar$ tend vers 0 dans les équations de Schrödinger (limite semi-classique). Dans tous ces travaux, il est fait un usage essentiel de la transformation de Wigner [Wi], qui à une fonction $\psi(t,x)$ associe,

$$W(\psi)(t,x,v) = \int_y e^{iy\cdot v}\ \psi(t, x+\hbar\frac{y}{2})\ \psi^*(t, x-\hbar\frac{y}{2})\ dy\ .$$

Par exemple, si ψ résout l'équation de Schrödinger "libre" $\partial_t\psi - i\Delta\psi = 0$, alors W est solution de l'équation du transport libre $\partial_t W + v\cdot\nabla_x W = 0$. Nous renvoyons aux travaux cités plus haut pour une discussion plus complète des propriétés de la transformation de Wigner.

Dans le deuxième paragraphe, nous considèrons un système infini d'équations de Schrödinger non-linéaires couplées (Système de Schrödinger-Poisson), fréquemment utilisé dans la modélisation des phénomènes quantiques dans les semi-conducteurs. Dans ce modèle, où la fonction d'onde $\psi(t,x)$ prend ses valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème de Cauchy dans un cadre L^2 (masse totale finie / énergie cinétique infinie), améliorant ainsi la théorie H^1 (énergie cinétique finie) déjà connue. Également, nous démontrons divers effets régularisants, ainsi que diverses estimations de décroissance ou d'explosion de $\psi(t,x)$ quand $t\to\infty$ ou $t\to 0$. Ce travail fait appel à des résultats connus dans le cas où ψ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$, et nécessite une estimation de type Strichartz sur les fonctions ψ à valeurs Hilbert, laquelle constitue la principale difficulté.

Ce travail, valable au niveau Schrödinger, pose naturellement deux questions: que deviennent les inégalités de Strichartz au niveau cinétique (équation de Vlasov) ? Qu'advient-il des effets régularisants ci-dessus lorsque $\hbar\to 0$?

Nous répondons à la première question dans le troisième paragraphe, qui est un travail en collaboration avec B. Perthame. Nous montrons en effet des estimations de type $L^q_t(L^p_x)$ sur la densité macroscopique associée à la solution de l'équation de transport libre, pour des données initiales seulement intégrables (et en particulier sans hypothèse de moments en vitesse). Si ces estimations semblent liées aux Lemmes de Moyenne, aux effets dispersifs, et aux estimations de Strichartz valables au niveau quantique, notre démonstration indique qu'elles sont en fait indépendantes de tous ces outils.

Nous apportons des réponses à la seconde question dans les deux paragraphes suivants.

En effet, dans le quatrième paragraphe, nous considérons l'équation de Vlasov-Poisson, limite semi-classique du système de Schrödinger décrit plus haut. Par analogie avec le cas quantique, nous montrons comment l'on peut se débarrasser de l'hypothèse d'énergie cinétique finie dans l'équation de Vlasov-Poisson. Plus précisément, si la donnée initiale $f^0(x,v) \geq 0$ possède des moments dans la seule variable d'espace : $\int |x|^m f^0(x,v)dxdv < \infty$ pour un $m \geq 0$ (l'énergie cinétique est dans ce cas la quantité $\int |v|^2 f^0(x,v)dxdv$), nous montrons par un argument de propagation de moments et en exploitant le caractère dispersif de l'opérateur de transport libre que l'on peut construire dans ce cas une solution $f(t,x,v)$ de l'équation de Vlasov-Poisson, singulière en $t = 0$. La difficulté est bien sûr de résoudre le problème de Cauchy alors que toutes les normes "explosent" à l'instant initial.

Dans le cinquième paragraphe, le travail ci-dessus est étendu, et nous construisons des solutions singulières (énergie cinétique infinie) pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Par rapport au cas précédent, l'opérateur de transport libre est ici perturbé par un Laplacien en vitesse, et nous montrons un effet régularisant beaucoup plus fort que dans l'équation de Vlasov-Poisson ci-dessus, qui repose sur l'effet de la diffusion en vitesse et sur les propriétés dispersives de l'équation de transport libre. La nouveauté dans ce résultat consiste à dériver une loi de conservation originale et à utiliser l'hypoellipticité de l'opérateur de Fokker-Planck.

Nous précisons maintenant l'énoncé de nos résultats. Nous renvoyons le lecteur à [Ca1], [Ca2], [Ca3], [CPe] pour des preuves et des énoncés plus complets, ainsi que pour des références bibliographiques plus exhaustives.

2. Solutions L^2 pour le Système de Schrödinger-Poisson [Ca1].

Dans ce paragraphe, nous étudions le Système de Schrödinger-Poisson (SSP) en dimension trois d'espace, qui modélise de manière simplifiée le transport quantique dans les semi-conducteurs. Il s'écrit comme un système infini d'équations de Schrödinger, couplées par le potentiel V:

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \partial_t \psi_j(t,x) = \frac{i}{2}\Delta_x \psi_j(t,x) - iV(t,x)\psi_j(t,x) \ , \\ \psi_j(x)|_{t=0} = \phi_j(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^3 \ , \ t \in \mathbb{R} \ , \end{cases} \tag{1}$$

où,

$$\begin{cases} V(t,x) = \pm \dfrac{1}{4\pi|x|} *_x n(t,x) \ , \\ n(t,x) = \sum_j \lambda_j \ |\psi_j(t,x)|^2 \ , \\ \lambda_j \geq 0 \ ; \ \sum_j \lambda_j = 1 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Le SSP (1)-(2) fait apparaître le vecteur $\psi(t,x) = (\psi_0(t,x), \psi_1(t,x), ...)$; cette fonction d'onde à valeurs vectorielles représente un mélange statistique d'états quantiques (on parle d'état de mélange). Dans le cas simple où $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} = (1,0,0,...)$, le couplage disparait, et l'on est ramené à l'équation de Hartree, qui porte sur une fonction d'onde scalaire.

Les solutions du SSP connues jusqu'à présent ([Ar], [BM], [ILZ]) ont la régularité H^1 au moins (énergie cinétique finie), et même H^2. Dans ce paragraphe on résout, avec unicité, le SSP lorsque la donnée initiale ϕ n'a qu'une régularité de type L^2 (masse totale finie), comme on sait le faire dans le cas découplé de l'équation de Hartree ([GV], [Cz], [Ts], [Ya]). Cela nécessite l'usage d'estimées de type Strichartz ([St]) pour les états de mélange. Plus précisément, nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$L^p(\lambda) = \{\phi(x) = \Big(\phi_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{N}} \; ; \quad \|\phi(x)\|^2_{L^p(\lambda)} = \sum_j \lambda_j \|\phi_j(x)\|^2_{L^p} < \infty\} \; ,$$

$$L^{q,p}_{\mathrm{loc}}(\lambda) = L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L^p(\lambda)) \; .$$

D'autre part, nous disons dans la suite qu'un couple (q,p) est admissible lorsque, pour $N = dim(\mathbb{R}^N)$ (dans notre cas $N=3$):

$$\text{(i) } 2 \le p < \frac{2N}{N-2} \;\; ; \;\; \text{(ii) } \frac{2}{q} = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \; .$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 1 *(Existence et Unicité des solutions $L^2(\lambda)$).*
Soient $\phi(x) \in L^2(\lambda)$, Alors, il existe une unique solution du SSP avec donnée initiale ϕ. Celle-ci vérifie, pour tout couple (q,p) admissible,

$$\psi(t,x) \in C^0\Big(\mathbb{R}, L^2(\lambda)\Big) \bigcap L^{q,p}_{\mathrm{loc}}(\lambda) \; .$$

La démonstration de ce théorème repose sur les estimations suivantes, de type Strichartz, pour le groupe unitaire $T(t) = \exp(it\Delta)$ agissant sur $L^2(\lambda)$.

Théorème 2 *(Inégalités de Strichartz pour les états de mélange)*
Soit (q,p) un couple admissible. On a alors :
(i) Il existe une constante $C(q)$, qui ne dépend que de q, telle que, pour tout $\phi \in L^2(\lambda)$,

$$\|T(t)\phi(x)\|_{L^{q,p}(\lambda)} \le C(q) \; \|\phi(x)\|_{L^2(\lambda)}.$$

(ii) Pour tout (a,b) admissible, il existe $C(a,q)$ telle que, pour tout $f \in L^{q',p'}(\lambda)$,

$$\| \int_0^t T(t-s) f(s,x) ds \|_{L^{a,b}(\lambda)} \le \; C(a,q) \; \|f(t,x)\|_{L^{q',p'}(\lambda)} \; .$$

L'idée de recourir à des inégalités de ce type pour résoudre les équations de Schrödinger non-linéaires (ou, plus généralement, des équations d'évolution dispersives) remonte à [GV], [Ya], [Ts]. Les Théorèmes 1 et 2 généralisent dans le cas d'états de mélange des résultats connus dans le cas pur (cas où

$(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, \dots))$. Naturellement, les inégalités de Strichartz écrites ici peuvent s'appliquer pour d'autres types de non-linéarités : par exemple, on pourrait remplacer $V(t, x)$ dans le SSP par $n(t, x)^\alpha$ pour $\alpha \geq 0$ suffisamment petit, ou travailler en dimension générale N.

Pour compléter notre analyse du SSP avec donnée initiale $\phi \in L^2(\lambda)$, nous précisons aussi le comportement du système, lorsque l'on fait l'hypothèse supplémentaire $x\phi \in L^2(\lambda)$, ou, plus généralement $|x|^\alpha \phi \in L^2(\lambda)$. On voit dans le Théorème qui suit un phénomène de régularisation par les moments en x.

Théorème 3 *Soit $\phi(x) \in L^2(\lambda)$ telle que $x\ \phi(x) \in L^2(\lambda)$. Soit $\psi(t, x)$ la solution correspondante du SSP. Alors, on a,*

(i) $\forall |t| \leq T,\ \forall p \in [2, 6],\quad \|\psi(t, x)\|_{L^p(\lambda)} \leq \dfrac{C}{|t|^{3(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}}$ (effet régularisant à $t = 0$),

(ii) Si de plus $x^2\phi \in L^2(\lambda)$, alors $\psi(t) \in C^0(\mathbb{R} - \{0\}; L^p(\lambda))$ pour $2 \leq p \leq \infty$,

(iii) Si enfin $|x|^\alpha \phi \in L^2(\lambda)$ pour tout $\alpha > 0$, alors $\psi(t) \in C^0(\mathbb{R} - \{0\}; C^\infty)$.

Ces estimations sont prouvées essentiellement en multipliant de manière répétée l'équation de Schrödinger par l'opérateur $x + it\nabla$, qui commute avec l'opérateur de Schrödinger $\partial_t - i\Delta$, et par usage répété de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Ce type de techniques avait déjà été utilisé dans le cas de l'équation de Hartree ([HO]).

Nota. J. Ginibre nous a indiqué récemment que des espaces semblables aux espaces $L^p(\lambda)$ introduits ici ont déjà été employés de manière indépendante par S. Zagatti dans [Za]. Dans cet article, des estimées de Strichartz équivalentes à celles du Théorème 2 ci-dessus sont énoncées, ainsi qu'un Théorème semblable à notre Théorème 1.

3. Estimations de Strichartz pour le Transport Libre [CPe]. (En collaboration avec B. Perthame).

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi des estimations de type Strichartz pour le Système de Schrödinger-Poisson, ou, plus précisément, pour le groupe unitaire généré par l'opérateur de Schrödinger sur l'espace $L^2(\lambda)$. Si l'on renormalise cet opérateur de manière à faire apparaître la constante de Planck $\hbar$, et que l'on passe à la limite $\hbar \to 0$, on sait ([LPa], [GMMP]) que ce système "converge" vers l'équation de Vlasov (ou équation du transport libre) posée sur la fonction $f(t, x, v) \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$, $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$):

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \ .$$

Plus précisément, c'est la transformation de Wigner qui permet de passer de l'opérateur de Schrödinger à l'opérateur du transport libre. Ce type d'observation a été systématiquement utilisé dans [LPe2] (voir aussi [Co]).

Il est donc naturel de tenter d'établir des estimations de type Strichartz pour le groupe généré par l'opérateur $\partial_t + v \cdot \nabla_x$, unitaire sur tous les espaces L^p $(1 \leq p \leq \infty)$.

La difficulté à ce niveau est que, si au niveau "Schrödinger" l'espace $L^2(\lambda)$ joue naturellement un rôle central, au niveau "Vlasov", tous les espaces L^p semblent jouer un rôle équivalent. On perd ainsi le cadre Hilbertien.

Néanmoins, nous montrons par le résultat typique suivant:

Théorème 4. *Soit $f(t,x,v) = f^0(x - vt, v)$ la solution de l'équation de transport libre avec donnée initiale $f^0(x,v)$. Soit également $\rho^0(t,x) = \int_{v \in \mathbb{R}^n} f(t,x,v)dv$ la densité macroscopique associée. Soit enfin un triplet (q,p,a) admissible au sens suivant,*

$$(i) \quad 1 \leq p < \frac{n}{n-1}, \quad (ii) \quad \frac{2}{q} = n(1 - \frac{1}{p}), \quad (iii) \quad 1 \leq a = \frac{2p}{p+1} < \frac{2n}{2n-1}.$$

Alors, on a l'estimation,

$$\|\rho^0(t,x)\|_{L^q_t(L^p_x)} \;\leq\; C(n,p)\, \|f^0(x,v)\|_{L^a(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Nous démontrons une large classe d'inégalités du même type dans [CPe].

La preuve de ce résultat repose sur les deux observations suivantes. D'une part, on a l'estimation de dispersion suivante sur les normes L^p de la densité ρ^0:

$$\|\rho^0(t,x)\|_{L^p_x} = \|f^0(x - vt, v)\|_{L^p_x L^1_v} \leq |t|^{-3(1-1/p)} \|f^0(x,v)\|_{L^1_x L^p_x} \,.$$

D'autre part, lorsque l'on interpole les normes $L^p_x L^1_v$ et $L^1_x L^p_v$ intervenant de part et d'autre de l'inégalité ci-dessus, on observe:

$$[L^p_x L^1_v, L^1_x L^p_v]_{1/2} = L^a_x L^a_v \,,$$

pour $2/a = 1 + 1/p$, et le groupe du transport libre est unitaire sur $L^a_{x,v}$. Les arguments usuels de dualité tels qu'on les rencontre dans la démonstration des inégalités de type Strichartz (pour l'équation de Schrödinger, des ondes, de KdV, etc ...) permettent alors d'obtenir le Théorème 4.

Il est à remarquer, par exemple, que l'estimation ci-dessus entraîne en particulier que la densité $\rho^0(t,x)$ appartient, *presque partout* en t, à l'espace L^p_x, dès lors que $f^0(x,v) \in L^a_{x,v}$.

Bien que ces estimations soient analogues, par transformation de Wigner, à celles obtenues dans le Théorème 2 ci-dessus, elles ne s'en déduisent pas directement, et à l'inverse, le Théorème 4 n'implique pas non plus le Théorème 2.

4. Propagation des moments en espace pour l'équation de Vlasov-Poisson [Ca2].

Dans le paragraphe 3, nous avons établi des estimations de Strichartz pour le transport libre qui sont analogues aux estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger. De même, dans ce paragraphe, nous établissons une propriété de régularisation par les moments en x dans l'équation de Vlasov-Poisson, analogue à celle énoncée plus haut pour le Système de Schrödinger-Poisson.

Plus précisément, nous considérons ici l'équation de Vlasov-Poisson (VP):

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0 \ , \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v) \geq 0 \ , \\ E(t,x) = \pm \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{x}{|x|^3} * \rho(t,x) \ , \\ \rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\, dv \ . \end{cases} \tag{3}$$

Ce système décrit l'évolution d'un système de particules en interaction gravitationnelle ou Coulombienne *via* l'inconnue $f(t,x,v) \geq 0$, qui est la densité de particules situées dans l'espace des phases au point $x \in \mathbb{R}^3$, à la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$, à l'instant $t \in \mathbb{R}$.

Dans ce système, comme d'ailleurs dans le SSP étudié plus haut, le problème principal en vue de montrer l'existence d'une solution est de borner le champ $E(t,x)$ dans les espaces L^p_x, donc la densité $\rho(t,x)$ dans L^q_x $(q > 1)$. L'estimation classiquement utilisée dans ce sens est l'inégalité d'interpolation suivante,

$$\|\rho(t,x)\|_{L^p_x} \leq C \ \|f(t,x,v)\|^{1-\theta}_{L^\infty_{x,v}} \ (\int_{x,v} v^2 f(t,x,v) dx\, dv)^\theta \ , \tag{4}$$

pour certains exposants θ, p. Alors, la "conservation" de l'énergie cinétique $\int_{x,v} v^2 f(t,x,v) dx\, dv \leq \int_{x,v} v^2 f^0(x,v) dx\, dv$ fournit une borne satisfaisante sur ρ. Ce type de démarche a été utilisé dans [HH], [IN], [DPL1], et également dans [LPe1], où la propagation de tous les moments en vitesse de f d'ordre élevé est démontrée. Nous renvoyons aussi à [Pf], [Sc] pour l'étude des solutions à support compact, ainsi quà [BD] pour une utilisation importante des propriétés dispersives de l'équation VP.

Le but de ce travail est de montrer comment l'on peut se passer de l'estimation précédente dans le cas de l'énergie cinétique infinie. Ce type de résultats a d'abord été mis en évidence dans [Pe]. On renvoie également à [PMi] pour le cas de l'équation de Boltzmann.

Tout d'abord, nous donnons diverses nouvelles estimations *a priori* sur le champ E ou la densité ρ lorsque la donnée initiale $f^0 \in L^1 \bigcap L^\infty$ a une énergie cinétique infinie, mais satisfait une hypothèse supplémentaire, comme par exemple $f^0(x,v) \in L^1_v(L^a_x)$ $(a > 1)$.

Puis, dans l'esprit des phénomènes de régularisation par les moments en x observés au niveau de l'équation de Schrödinger, nous nous concentrons sur le cas où f^0 possède des moments en x. Nous montrons ainsi le Théorème suivant,

Théorème 5. *Soit $f^0 \in L^1 \bigcap L^\infty$, satisfaisant de plus les conditions $\int_{x,v} |x|^m f^0(x,v) dx\, dv < \infty$ et $\int_{x,v} |v|^\varepsilon f^0(x,v) dx\, dv < \infty$ (m, $\varepsilon > 0$). Si l'une des deux quantités m ou ε est strictement plus grande que 3, il existe alors une solution au système VP. Si de plus on définit les quantités,*

$$M_k(t) = \int_{x,v} |x - vt|^k f(t,x,v) dx\, dv \quad \textit{(moments en espace)} \quad ,$$

$$N_j(t) = \int_{x,v} |v|^j f(t,x,v) dx\, dv \quad \textit{(moments en vitesse)} \quad ,$$

on a alors,

(i) Si $m > 3$ et $\varepsilon > 0$, les fonctions $M_k(t)$ et $N_j(t)$ restent localement bornées en temps, pour tout $k < m$ et $j < \varepsilon$ (propagation des moments initiaux). Dans ce cas, on en déduit la borne suivante sur la densité,

$$\|\rho(t,x)\|_{L^p_x} \le C(T)\, |t|^{-3(1-1/p)} \quad \textit{pour tout} \quad |t| \le T \quad \textit{et pour} \ \ 1 \le p \le 1 + m/3 \, .$$

(ii) Si $m > 0$ et $\varepsilon > 3$, les fonctions $M_k(t)$ et $N_j(t)$ restent localement bornées en temps, pour tout $k < m$ et $j < \varepsilon$. Dans ce cas, on en déduit la borne suivante sur la densité,

$$\|\rho(t,x)\|_{L^p_x} \le C(T) \quad \textit{pour tout} \quad |t| \le T \quad \textit{et pour} \ \ 1 \le p \le 1 + \varepsilon/3 \, .$$

Ce Théorème montre que les moments en vitesse *et* en espace sont propagés par l'équation de Vlasov-Poisson, sous une hypothèse de "grand moment" dans la variable de vitesse (cas (ii): $\varepsilon > 3$) *ou* dans la variable d'espace (cas (i): $m > 3$). La propagation des seuls moments en vitesse a déjà été démontrée dans [LPe1] sous la même hypothèse de "grand moment" initial, c'est-à-dire sous l'hypothèse $N_\varepsilon(0) < \infty$ avec la restriction $\varepsilon > 3$. À cet égard, on voit que le Théorème 5 permet de propager les moments d'ordre peu élevé en vitesse sous une hypothèse de grand moment en espace (cas (i)), ou bien ou bien les moments d'ordre peu élevé en espace sous une hypothèse de grand moment en vitesse (cas (ii)), problème qui était laissé ouvert dans [LPe1], et avait été en partie résolu dans [Pe]. C'est ici l'usage simultané des moments en espace et en vitesse qui permet de lever le problème des moments de bas ordre.

La démonstration de ce Théorème repose d'abord sur l'observation suivante, déjà faite par B. Perthame dans [Pe], et analogue à (4) ci-dessus,

$$\|\rho(t,x)\|_{L^p_x} \le C\, |t|^{-3(1-1/p)}\, M_k(t) \, , \tag{5}$$

pour $p \le 1 + k/3$. Notons à ce propos que cette estimation a également été utilisée de manière cruciale dans [Re] pour obtenir une borne sur la croissance du support dans l'équation VP.

Ainsi, grâce à l'estimation (5), la démonstration du Théorème 5 se ramène dès lors essentiellement à borner la quantité $M_k(t)$ pour tout temps, sachant qu'elle est bornée à l'instant initial (propagation des moments en x). La différence notable entre les estimations (4) (énergie finie) et (5) (énergie infinie) est bien évidemment l'apparition de singularités en $t = 0$, en sorte que dans notre cas, on est amené à résoudre un problème de Cauchy où toutes les normes "explosent" à l'instant initial.

En effet, en multipliant l'équation par $(x-vt)^k$ et après intégration, on obtient,

$$\partial_t M_k(t) = mt \int_x E(t,x)\{\int_v (x-vt)^{k-1} f(t,x,v)\} \, ,$$

et une majoration "brutale" du second membre donne:

$$\partial_t M_k \leq |t|^{-1} M_k^{\alpha} \, , \tag{6}$$

avec $\alpha > 1$. Il apparaît donc d'emblée nécessaire d'améliorer d'une part l'exposant négatif en t, et d'autre part l'exposant positif en M_k dans (6).

On améliore l'exposant en t dans (6) en observant que, si l'utilisation des moments en espace (inégalité (5)) donne des estimations singulières en temps, les moments en vitesse donnent en revanche des estimations L^∞ en temps (estimation (4)). Dès lors, interpolant (4) et (5), on peut utiliser des estimations du type:

$$\|\rho(t,x)\|_{L^p_x} \leq C|t|^{-3\theta(1-1/p)} M_k(t)^{\theta} \; N_j(t)^{1-\theta}$$

où $\theta \in]0,1[$ est un exposant d'interpolation, et ceci permet d'améliorer la singularité en $t = 0$, quitte à chercher à propager *simultanément* les moments en espace (M_k) *et* les moments en vitesse (N_j). On est donc d'emblée confronté au problème de la propagation des moments d'ordre peu élevé en vitesse (cas (i)) ou en espace (cas (ii)), comme on l'a souligné plus haut. Ce programme est réalisé en couplant judicieusement les estimations disponibles sur M_k et N_j.

Essentiellement, cette prmière observation permet d'améliorer (6) en:

$$\partial_t M_k(t) \leq C|t|^{-1+\beta} M_k(t)^{\alpha} \, , \tag{7}$$

où $\beta > 0$ et $\alpha > 1$. On utilise alors des techniques introduites dans [LPe1] pour le cas de la propagation des moments en vitesse, pour décroitre l'exposant α. On obtient ainsi une estimation du type $\partial_t M_k \leq |t|^{-1+\delta} M_k \log M_k$ avec $\delta > 0$, ce qui permet de conclure.

Pour conclure, le Théorème 5 exploite de manière essentielle l'effet dispersif de l'équation de transport, qui est pris en compte dans la puissance négative de t dans (5). C'est grâce à cet effet, par exemple, que l'estimation de régularisation du Théorème 4 (i) sur ρ est démontrée.

5. Solutions d'énergie infinie pour le Système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck [Ca3].

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment l'on peut se passer de l'hypothèse d'énergie finie dans l'équation de Vlasov-Poisson grâce à l'usage de moments en x. Ceux-ci permettent, *via* l'estimation (5) ci-dessus, d'exploiter le caractère dispersif de l'opérateur de transport libre $\partial_t + v \cdot \nabla_x$. On peut se demander si ce type de propriété persiste lorsque l'on perturbe cet opérateur.

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où l'opérateur de transport libre est remplacé par l'opérateur de Fokker-Planck $\partial_t + v \cdot \nabla_x - \sigma \Delta_v$. Plus précisément, nous nous intéressons au Système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP),

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + div_v(E - \beta v) \cdot f - \sigma \Delta_v f = 0 \ , \\ f(t=0, x, v) = f^0(x, v) \geq 0 \ , \\ E(t, x) = \pm \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{x}{|x|^3} * \rho(t, x) \ , \\ \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \, dv \ . \end{cases} \tag{8}$$

Ici, $\beta \geq 0$ et $\sigma > 0$ sont des constantes données. Similairement au système de Vlasov-Poisson, cette équation qui porte sur la densité inconnue $f(t, x, v) \geq 0$ décrit l'évolution d'un système de particules qui interagissent à travers trois effets distincts: une interaction Coulombienne ou gravitationnelle contenue dans le champ de forces $E(t, x)$, un effet de friction contenu dans le terme $\beta div_v(vf)$, et enfin un terme de diffusion en vitesse $-\sigma \Delta_v f$ qui décrit des collisions aléatoires entre particules. Dans le cas d'une donnée initiale d'énergie finie, ce système a été étudié dans [Bo1], [Bo2], [VO], [RW], et plus récemment [CS].

Dans le cadre d'une énergie infinie, nous montrons le Théorème suivant.

Théorème 5. *Soit $f^0 \in L^1 \bigcap L^\infty_{x,v}$ telle que $|x|^2 f^0 \in L^1_{x,v}$ et $|v|^\varepsilon f^0 \in L^1_{x,v}$ pour un exposant $\varepsilon > 0$. Soit $T > 0$. Alors, il existe une solution $f(t, x, v) \in L^\infty_{loc}([0; \infty[; L^1(\mathbb{R}^6_{x,v}))$ pour le Système VPFP avec donnée initiale f^0. De plus,*

(i) Soit $p \in [1; \infty]$, $q \in]3/2; \infty]$. Alors, il existe un constante $C = C(T, \|f^0\|_{L^\infty}, \|(1 + |x|^2) f^0\|_{L^1}, p, q)$ et des exposants γ, $\delta > 0$ tels que,

$$\|\rho(t, x)\|_{L^p_x} \leq C \ t^{-\gamma} \ , \ \ \|E(t, x)\|_{L^q_x} \leq C \ t^{-\delta} \ ,$$

pour tout $t \in [0; T]$. Des estimations du même type ont lieu en norme Hölderienne pour ρ, E, et ∇E.

(ii) La loi de conservation suivante a lieu, où $\phi(t) = (e^{\beta t} - 1)/\beta$,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^6} |x - \phi(t) v|^2 f(t, x, v) dx dv + \omega \phi(t)^2 \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2(t, x) dx\right] = \\ 6\sigma \phi(t)^2 \|f^0\|_{L^1_{x,v}} + \omega(2\phi'(t) - 1)\phi(t) \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2(t, x) dx \ .$$

La démonstration de ce Théorème se fait en trois étapes.

D'abord, nous observons la loi de conservation (ii) ci-dessus, qui semble être originale. Elle permet de montrer la propagation des moments en espace (modifiés par rapport au paragraphe précédent) $M_2(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |x - \phi(t)v|^2 f(t,x,v)dxdv$. La quantité $M_2(t)$ est donc localement bornée.

A partir de là, on utilise une inégalité similaire à (2) (précédent paragraphe) pour obtenir des bornes sur $\|\rho(t,x)\|_{L^p_x}$ pour les *petites* valeurs de p (en fait $p \leq 5/3$). A ce niveau, ce sont les propriétés dispersives de l'opérateur de transport libre $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ qui prédominent et la diffusion en vitesse, comme le terme de friction, ne jouent essentiellement pas. Ce point est contenu dans le fait que $\phi(t) \approx t$ quand $t \to 0$ (de sorte que, par exemple, le moment M_2 introduit ici et celui utilisé dans le cas Vlasov-Poisson ne diffèrent pas sensiblement).

Puis, en utilisant des techniques développées par F. Bouchut ([Bo1], [Bo2]) dans le cas de l'énergie cinétique finie, nous démontrons des bornes L^∞ et même Hölder sur $\rho(t,x)$ et $E(t,x)$. A ce niveau, c'est la diffusion en vitesse qui prédomine et explique les forts gains de régularité observés. Ceci repose sur le fait essentiel de l'hypoellipticité de l'opérateur de Fokker-Planck ([Ho1], [Ho2]). Nous soulignons que l'obtention d'une borne L^∞_x sur $E(t,x)$ pour $t > 0$ est tout à fait essentielle dans ce type d'équation. Elle permet en effet de déduire immédiatement un grand nombre d'autres bornes sur f ou ρ, comme, par exemple, la propagation de tous les moments (en x ou en v) de f.

REFERENCES.

[Ar] A.Arnold, *Self-consistent relaxation-time models in quantum mechanics*, Comm. PDE, Vol. 21, 473-506 (1996).

[BD] C. Bardos, P. Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson Equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 2, 101–118 (1985).

[Bo1] F. Bouchut, *Existence and Uniqueness of a Global Smooth Solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System in Three Dimensions*, J. Funct. Anal., Vol. 111, 239-258 (1993).

[Bo2] F. Bouchut, *Smoothing effect for the non-linear Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System*, J. Diff. Eq.,122, 225-238 (1995).

[BM] F. Brezzi, P.A. Markowich, *The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation*, Math. Meth. Appl. Sci., 14, p. 35-62 (1991).

[Ca1] F. Castella, *L^2 solutions to the Schrödinger-Poisson system*, Math. Meth. Mod. Appl. Sci., Vol. 7, N. 8, p. 1051-1083 (1997).

[CPe] F. Castella, B. Perthame, *Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Sér. I, p. 535-540 (1996).

[Ca2] F. Castella, *Propagation of space moments in the Vlasov-Poisson equation*, à paraître dans Ann. IHP. Anal. Nonlin. (1998).

[Ca3] F. Castella, *Infinite kinetic energy solutions for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System*, à paraître dans Indiana Univ. Math. J. (1998).

[Cz] T. Cazenave, **An introduction to nonlinear Schrödinger Equations**, Second Edition, Textos de Métodos Matemàticas 26, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993).

[CS] J.A. Carillo, J. Soler, *On the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation with measures in Morrey spaces as initial data*,

[Co] Th. Colin, *Smoothing effects for dispersive equations via a generalized Wigner transform*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 25, No 6, p. 1622-1641 (1994).

[DPL1] R.J. Di Perna, P.L. Lions, *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 307, 655-658 (1988).

[GMMP] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J.Mauser, F. Poupaud, *Homogenization limits and Wigner transforms*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 50, N. 4, p. 323-379 (1997).

[GV] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for some nonlinear Schrödinger equation revisited*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse nonlinéaire 2, 309-327 (1985).

[HH] E. Horst, R. Hunze, *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 6, 262-279 (1984).

[HO] N. Hayashi, T. Ozawa, *Smoothing Effect for Some Schrödinger Equations*, J. Funct. Anal., 85, p. 307-348, (1989).

[Ho1] L. Hörmander, **The Analysis of Linear Partial Differential Operators**, Vol. I, Springer Verlag, New-York-Berlin (1983).

[Ho2] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., Vol. 119, 147-171 (1967).

[ILZ] R. Illner, H. Lange, P. Zweifel, *Global existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger systems*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol.17, 349-376 (1994).

[IN] R. Illner, H. Neunzert, *An existence theorem for the unmodified Vlasov equation*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 1, 530-540 (1979).

[LPa] P.L. Lions, Th. Paul, *Sur les mesures de Wigner*, Rev. Mat. Iberoam., Vol. 9, Num. 3, 553-618 (1993).

[LPe1] P.L. Lions, B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math., Vol. 105, 415-430 (1991).

[LPe2] P.L. Lions, B. Perthame, *Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion*, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 314, 801-806 (1992).

[MMP] P.A. Markowich, N. Mauser, F. Poupaud, *A Wigner function approach to (semi) classical limits: electrons in a periodic potential*, J. Math. Phys., Vol. 35, N. 3, p. 1066-1094 (1994).

[Ni] F. Nier, *A semi-classical picture of quantum scattering*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4. Sér., t. 29, p. 149-183 (1996).

[Pe] B. Perthame, *Time decay, Propagation of Low Moments and Dispersive Effects for Kinetic Equations*, Comm. PDE, Vol. 21, 659-686 (1996).

[PMi] B. Perthame, S. Mischler, *Solutions of the Boltzmann equation with infinite energy*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 28, N. 5, 1015-1027 (1997).

[Pf] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Diff. Eq., 95, 281-303 (1992).

[Re] G. Rein, *growth estimates for the solutions of the Vlasov-Poisson system in the plasma physics case*, to appear in Math. Nachrichten.

[RW] G. Rein, J. Weckler, *Generic global classical solutions of the Vlasov-Fokker-Planck-Poisson system in three dimensions*, J. Diff. Eq., Vol. 95, 281-303 (1992).

[Sc] J. Schaeffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Comm. PDE., Vol. 16, N. 8-9, 1313-1335 (1991).

[St] R.S. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J., 44, p. 705-714 (1977).

[Ts] Y. Tsutsumi, *L^2-Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations and Nonlinear Groups*, Funk. Ekva., 30, p. 115-125 (1987).

[VO] H.D. Victory, B.P. O'Dwyer, *On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 39, 105-157 (1990).

[Wi] E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev., Vol. 40 (1932).

[Ya] K. Yajima, *Existence of Solutions for Schrödinger evolution Equations*, Commun. Math. Phys., 110, p. 415-426 (1987).

[Za] S. Zagatti, *The Cauchy problem for Hartree-Fock time dependent equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Th., Vol. 56, N. 4, 357-374 (1992).