C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 535-540, 1996
Equations aux Dérivées Partielles/ *Partial Differential Equations*

ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR LES EQUATIONS DE TRANSPORT CINETIQUE

Francois CASTELLA et Benoît PERTHAME

Résumé - Nous démontrons des estimations pour les équations du transport cinétique analogues aux estimations de Strichartz pour les équations de Schrödinger. Nous donnons également quelques applications et résultats reliés.

STRICHARTZ' ESTIMATES FOR KINETIC TRANSPORT EQUATIONS

Abstract - We prove estimates for the kinetic transport equations which are analogous to those of Stichartz for the Schrödinger equations. We also give some applications and related results.

Abridged English Version - The Kinetic Transport Equation describes the evolution of a microscopic density $f(t,x,\xi)$ through the simple Cauchy problem

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x,\xi) \ + \ \xi \cdot \nabla_x f(t,x,\xi) \ = \ 0,$$
$$f(t=0,x,\xi) \ = \ f^0(x,\xi).$$

Here $t \in \mathbb{R}$ represents time, $x \in \mathbb{R}^n$ represents the position of particles with velocity $\xi \in \mathbb{R}^n$. Classically, we may also define the macroscopic density associated with f by

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\, d\xi.$$

We will say that a triple (q,p,a) is *admissible* if

$$(i) \quad 1-\frac{1}{n} < \frac{1}{p} \leq 1, \quad (ii) \quad \frac{2}{q} = n(1-\frac{1}{p}), \quad (iii) \quad a = \frac{2p}{p+1}.$$

We prove the following

Theorem 1. *The solution to the Kinetic Transport Equation satisfies, for all admissible triple* (q,p,a),

$$\|\rho\|_{L^q_t(L^p_x)} \ \leq \ C(n,p)\, \|f^0\|_{L^a(R^{2n})}.$$

The proof of this Theorem is given in the french version with an extension to further integrability results on f in the variables $t,\ x,\ \xi$. We just mention that, apparently, it cannot be obtained using the representation formula $f(t,x,\xi) = f^0(x-\xi t,\xi)$. The method we use is by duality, as initiated in [GV], [Ya].

This estimate is analogous to Strichartz' estimate for the Schrödinger equation. Let us recall that through the Wigner Transform, the Schrödinger equation is transformed into the Kinetic Transport Equation, but the initial data is of a very particular type. The generalized Strichartz' estimate (see [St], [GV], [Cz]) gives a similar estimate for ρ. But it involves a norm on the initial data which is difficult to interpret for general values of f^0. Hence, our result is not a consequence of the pure Schrödddinger case, and it neither implies the Schrödinger case. Finally, let us recall that this kind of direct analogy between the Kinetic Transport and Schrödinger Equations has been initiated, for the $H^{1/2}$ regularizing effect, by [LP] (see [Co] for extensions). A very strong analogy between the time decays has also been pointed out in [P]. Let us also emphasize that another direction towards extensions of Strichartz' estimates is through the mixed states theory (see [Cs]).

We also would like to mention several related results. As far as time decays are concerned , we have for all p, r, with $1 \leq r \leq p \leq \infty$,

$$\|\rho(t)\|_{L^p(R^n)} \;\leq\; \frac{C(n,p)}{|t|^{n(p-1)/p}}\,\|f^0\|_{1,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\|f(t)\|_{p,r} \;\leq\; t^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\,\|f^0\|_{r,p}.$$

Here and below, we set

$$\|f\|_{p,r} \;=\; \|f\|_{L^p_x(L^r_\xi)}.$$

The first inequality generalizes that of [BD] which corresponds to $r=\infty$. Together, and using interpolation arguments, these inequalities yield the general result (Theorem 1 (b) in the french version).

We may give an application of the Theorem 1 to the Vlasov-Poisson System.

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x,\xi) \;+\; \xi\cdot\nabla_x f(t,x,\xi) \;+\; E(t,x)\cdot\nabla_\xi f(t,x,\xi) \;=\; 0,$$

$$E(t,x) = \pm\,\frac{x}{|x|^3} * \rho(t,x),$$

$$f(t=0,x,\xi) \;=\; f^0(x,\xi).$$

We may deduce, the following variant of the estimates proved in [P] (there, low moments in x were needed). Strong solutions to the Vlasov-Poisson System (see the precise meaning in [P]) satisfy, for all T and t, $0 \leq t \leq T$,

$$t^{2-3/p}\,\|E(t)\|_p \;\leq\; C(p,T,\|f^0\|_{L^1\cap L^\infty(R^{2n})},\|f^0\|_{1,3p/(3+p)}), \quad \frac{3}{2} < p < 3.$$

This estimate is enough to prove the existence of weak (distributional) solutions with the only assumptions that f^0 belongs to the space indicated in the above constant.

French Version.

Nous démontrons ici des inégalités de type Strichartz pour l'Equation de Transport Libre

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x,\xi) \;+\; \xi \cdot \nabla_x f(t,x,\xi) \;=\; 0,$$
$$f(t=0,x,\xi) \;=\; f^0(x,\xi).$$

Cette équation décrit l'évolution dans le temps d'un système de particules libres, dont la densité microscopique $f(t,x,\xi)$ représente la densité de particules qui, à l'instant $t \in \mathbb{R}$, ont la position $x \in \mathbb{R}^n$ et la vitesse $\xi \in \mathbb{R}^n$. A la fonction f est naturellement associée la densité macroscopique $\rho(t,x)$ suivante :

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,\xi)\, d\xi.$$

Par la suite, on dira qu'un triplet (q,p,a) est *admissible* lorsque

$$(i) \quad 1-\frac{1}{n} < \frac{1}{p} \le 1, \quad (ii) \quad \frac{2}{q} = n(1-\frac{1}{p}), \quad (iii) \quad a = \frac{2p}{p+1}.$$

Comme dans les inégalités de Strichartz sur l'équation de Schrödinger, notre résultat formule d'abord une inégalité ponctuelle en t (Théorème 2 ci-dessous), dont on déduit ensuite, par des arguments de dualité et de convolution, une inégalité globale en (t,x,ξ) (Théorème 1). Nous démontrons en effet les énoncés suivants

Théorème 1. (a) *La solution de l'Equation de Transport Libre vérifie, pour tout triplet (q,p,a) admissible,*

$$\|\rho\|_{L^q_t(L^p_x)} \;\le\; C(n,p)\, \|f^0\|_{L^a(R^{2n})}.$$

(b) *Plus généralement, si (q,p,r,a) est un quadruplet satisfaisant aux conditions:*

$$(i) \quad \frac{1}{r}-\frac{1}{n} < \frac{1}{p} \le \frac{1}{r} \le 1, \quad (i') \quad 1 \le \frac{1}{p}+\frac{1}{r},$$

$$(ii) \quad \frac{2}{q} = n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}), \quad (iii) \quad a = \frac{2pr}{p+r},$$

alors, on a l'estimation suivante :

$$\|f\|_{L^q_t(L^p_x(L^r_\xi))} \le C(n,p,r)\, \|f^0\|_{L^a(R^{2n})}.$$

(c) *On a également les estimations inhomogènes suivantes, valables dès que le second membre est fini :*

(c1) *Pour un triplet* (q,p,r) *satisfaisant à (i)-(ii) ci-dessus (Cf (b)), on a,*

$$\| \int_0^t g(s, x-\xi(t-s), \xi)ds \|_{L_t^q(L_x^p(L_\xi^r))} \leq C(n,p,r) \ \|g(s,x,\xi)\|_{L_t^{q'}(L_x^r(L_\xi^p))},$$

(c2) *Pour un quadruplet* (q,p,r,a) *satisfaisant à (i)-(ii)-(iii) ci-dessus (Cf (b)), et si l'on suppose de plus,*

$$(i'') \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1,$$

on a,

$$\| \int_0^t g(s, x-\xi(t-s), \xi)ds \|_{L_t^\infty(L_{x,\xi}^a)} \leq C(n,p,r) \ \|g(s,x,\xi)\|_{L_t^{q'}(L_x^r(L_\xi^p))},$$

où q' *désigne l'exposant conjugué de* q.

Théorème 2. *La solution de l'Equation de Transport Libre vérifie l'estimation ponctuelle suivante, valable pour tous* p, r *tels que* $1 \leq r \leq p \leq +\infty$ *:*

$$\|f(t,x,\xi)\|_{L_x^p(L_\xi^r)} \ \leq \ |t|^{-n(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|f^0\|_{L_x^r(L_\xi^p)}.$$

Ces estimations sont le pendant, dans le cas du Transport Libre, des inégalités de Strichartz sur les solutions de l'équation de Schrödinger libre (Cf [St], [GV], [Cz]). Elles ne semblent pas pouvoir être obtenues directement sur la représentation explicite de la solution $f(t,x,\xi) = f^0(x-\xi t, \xi)$, et l'on fait appel à des techniques de dualité introduites par [GV], [Ya].

Rappelons que la transformation de Wigner permet de passer de l'équation de Schrödinger à l'équation de Transport Libre. L'application des inégalités de Strichartz classiques permet, via cette transformation, d'obtenir sur le Transport Libre des estimations tout à fait analogues à celles écrites ici, mais qui font intervenir aux seconds membres des normes sur f^0 difficiles à interpréter. En fait, on ne peut déduire le Théorème 1 des estimations classiques de Strichartz, et le chemin inverse est également impossible. Rappelons que ce type d'analogies entre le Transport Libre et les équations de Schrödinger a été initié par [LP] dans le cas de l'effet régularisant $H^{1/2}$ (Cf [Co] pour des extensions). On trouve de très fortes similitudes en ce qui concerne la décroissance à l'infini dans [P]. Enfin, on trouve d'autres prolongements des inégalités de Strichartz grâce à la théorie des états de mélange dans [Cs].

Démonstration du Théorème 2. Pour des raisons de commodité, on notera dans toute la suite $\|.\|_p$ (resp. $\|.\|_{p,r}$, $\|.\|_{q,p,r}$) les normes dans $L^p(\mathbb{R}^{2n}) = L_x^p(L_\xi^p)$ (resp. $L_x^p(L_\xi^r)$, $L_t^q(L_x^p(L_\xi^r))$). On part de la représentation exacte de la solution $f(t,x,\xi) = f^0(x-\xi t, \xi)$, qui montre (Cf [BD])

$$\|f(t,x,\xi)\|_{\infty,1} \quad \leq \quad |t|^{-n} \ \|f^0\|_{1,\infty} \ , \tag{1}$$

En interpolant (1) avec la conservation de la norme L^1 on obtient, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\|f(t,x,\xi)\|_{p,1} \quad \leq \quad |t|^{-n(1-\frac{1}{p})} \, \|f^0\|_{1,p} \, . \tag{2}$$

Par ailleurs, la représentation exacte de la solution fournit, comme en (1) et par un simple changement de variables,

$$\|f(t,x,\xi)\|_{\infty,r} \quad \leq \quad |t|^{-\frac{n}{r}} \, \|f^0\|_{r,\infty} \, , \tag{3}$$

ceci quel que soit $1 \leq r \leq \infty$. Interpolant (2) et (3), on obtient le Théorème 2.

Notons à ce propos que l'argument d'interpolation invoqué ici n'est pas tout à fait direct. En effet, l'interpolé de $L^1(L^1)$ avec $L^\infty(L^1)$ n'est pas *a priori* égal à $L^p(L^1)$: en toute généralité, un tel résultat n'a lieu que si l'on remplace l'espace $L^\infty(L^1)$ par $L^\infty_0(L^1)$, où L^∞_0 est le complété, pour la norme L^∞, de l'espace des fonctions L^∞ à support compact (Cf [BL]). Ici, nous pouvons nous placer dans ce cadre en remplaçant d'abord l'opérateur de transport par un opérateur tronqué (on peut considérer par exemple l'opérateur $T(t) \cdot \chi_R(x,\xi)$ où χ_R est une fonction de troncature). A ce stade, et comme l'opérateur de transport libre preserve le support compact, il est équivalent de travailler dans L^∞ ou L^∞_0. Puis nous passons à la limite sur la troncature.

Démonstration du Théorème 1. On ne démontre que (b) et (c2). Les résultats (a) et (c1) s'en déduisent facilement. De plus, on ne considère pas le cas $p = r$ dans (b), qui n'est que la conservation des normes L^p par le Transport Libre. Soient p', r' tels que $r' > p'$. Notons enfin $E'_0 = L^{r'}_x(L^{p'}_\xi)$, $E'_1 = L^{p'}_x(L^{r'}_\xi)$. On écrit l'inégalité ponctuelle du Théorème 2 sous la forme

$$\|T(t)f^0\|_{E'_0} \quad \leq \quad |t|^{-\delta} \|f^0\|_{E'_1} \, , \tag{4}$$

où $T(t)$ est le groupe engendré par l'équation de Transport Libre, donné par $T(t)f^0(x,\xi) = f^0(x - \xi t, \xi)$, et $\delta = n\,(\frac{1}{p'} - \frac{1}{r'})$. Notons p, r les exposants conjugués de p', r', et E_0, E_1 les espaces $L^r_x(L^p_\xi)$, $L^r_x(L^p_\xi)$, dont E'_0, E'_1 sont les duaux. La démarche qui va suivre peut se formaliser ainsi : posons q tel que $\frac{2}{q} = \delta$; l'inégalité (4) entraine alors "automatiquement", via certaines conservations de normes par le groupe $T(t)$, et via l'inégalité de Riesz-Sobolev,

$$\|T(t)f^0\|_{L^q_t(E_1)} \quad \leq \quad C \, \|f^0\|_{E_{1/2}} \, , \tag{5}$$

où $E_{1/2}$ est l'interpolé d'ordre 1/2 entre E_0 et E_1. L'inégalité (5) montre, aux restrictions près sur les exposants, le Théorème 1. Cette méthode généralise le raisonnement qui permet, dans les inégalités de Strichartz, pour lesquelles $E'_0 = L^p$, $E'_1 = L^{p'}$, $E_{1/2} = L^2$, et $\delta = n\,(1/2 - 1/p)$, de passer d'une inégalité ponctuelle en temps à une inégalité mixte en temps-espace, et l'on dégage ainsi un procédé valable pour d'autres groupes d'évolution. Dans le cas qui nous intéresse, on écrit

$$\|T(t)f^0\|_{q,p,r} = \sup_\phi \int_{\mathbb{R}} < T(t)f^0|\phi(t) >_{L^2_{x,\xi}} dt \ ,$$

où le sup est pris sur tous les $\phi \in L_t^{q'}(L_x^{p'}(L_\xi^{r'}))$ tels que $\|\phi\|_{q',p',r'} = 1$. D'où,

$$\begin{aligned}
\|T(t)f^0\|_{q,p,r} &= \sup_\phi \int_{\mathbb{R}} < f^0|T(-t)\phi(t) >_{L^2_{x,\xi}} dt \\
&\leq \|f^0\|_{\frac{2pr}{p+r}} \cdot \sup_\phi \| \int_{\mathbb{R}} T(-t)\phi(t)dt\|_{\frac{2p'r'}{p'+r'}} \ .
\end{aligned}$$

On a enfin,

$$\| \int_{\mathbb{R}} T(-t)\phi(t)\|^2_{\frac{2p'r'}{p'+r'}} = \| \int_{t,s} T(-t)\phi(t)\, T(-s)\phi(s)\|_{\frac{p'r'}{p'+r'}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t,s} \|T(-t)\phi(t)\, T(-s)\phi(s)\|_{\frac{p'r'}{p'+r'}} \\
&= \int_{t,s} \|\phi(t)\, T(t-s)\phi(s)\|_{\frac{p'r'}{p'+r'}} \\
&\leq \int_{t,s} \|\phi(t)\|_{p',r'}\ |t-s|^{-\delta}\ \|\phi(s)\|_{p',r'} \\
&\leq C\ \|\phi(t)\|_{q',p',r'}\ \|\phi(s)\|_{q',p',r'} \ .
\end{aligned}$$

Pour cela on a utilisé, dans cet ordre : la conservation du produit scalaire L^2, puis de la norme $L^{\frac{p'r'}{p'+r'}}$ par le groupe $T(t)$ (ce qui impose $\frac{p'r'}{p'+r'} \geq 1$) ; l'inégalité ponctuelle du Théorème 2 (ce qui impose $r' \geq p'$) ; l'inégalité de Riesz-Sobolev (ce qui impose $0 < \delta = \frac{2}{q} < 1$). En collectant toutes ces restrictions sur les exposants, on obtient le point (b) du Théorème 1. Le point (c2) se démontre en écrivant,

$$\| \int_0^t g(s, x-\xi(t-s), \xi)\ ds\|^2_{L^a_{x,\xi}} = \| \int_0^t T(t-s)g(s)\ ds\|^2_{\frac{2pr}{p+r}}$$

$$\begin{aligned}
&= \| \int_0^t \int_0^t T(t-s)g(s)\ T(t-u)g(u)\ ds\ du\|_{\frac{pr}{p+r}} \\
&\leq \int_s \|g(s) \cdot \int_u T(s-u)g(u)\ du\|_{\frac{pr}{p+r}}\ ds \\
&\leq \|g(s)\|_{q',r,p} \int_u \|T(s-u)g(u)\ du\|_{q,p,r} \\
&\leq \|g(s)\|_{q',r,p}\|g(u)\|_{q',r,p} \ .
\end{aligned}$$

La dernière majoration est conséquence de l'inégalité ponctuelle du Théorème 2 et de l'inégalité de Riesz.

Notons que le cas $r = 1$ dans les Théorèmes 1-(a), 1-(b), correspond à un cas critique: en effet, le dual de $L^p(L^1)$ n'est pas *a priori* égal à $L^{p'}(L^\infty)$, car l'espace L^∞ ne jouit pas de la propriété de Radon-Nykodym (Cf [DU]). Ceci amène une difficulté dans l'argument de dualité utilisé. On lève cette difficulté en établissant d'abord le Théorème pour $r > 1$, puis en passant à la limite en r grâce à un argument simple de troncature. Ceci conclut la démonstration du Théorème 1.

On termine par une application du Théorème 1 au cas des équations de Vlasov-Poisson

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x,\xi) \; + \; \xi \cdot \nabla_x f(t,x,\xi) \; + \; E(t,x) \cdot \nabla_\xi f(t,x,\xi) \; = \; 0,$$

$$E(t,x) = \pm \, \frac{x}{|x|^3} * \rho(t,x),$$

$$f(t=0,x,\xi) \; = \; f^0(x,\xi).$$

On peut déduire la variante suivante des estimations démontrées dans [P] (pour lesquelles on avait besoin des moments d'ordre peu élevé en x). Les solutions fortes du système de Vlasov-Poisson (Cf [P] pour la définition exacte) vérifient, pour tous T et t, $0 \le t \le T$,

$$t^{2-3/p} \, \|E(t)\|_p \; \le \; C(p, T, \|f^0\|_{L^1 \cap L^\infty(R^{2n})}, \|f^0\|_{1,3p/(3+p)}), \quad \frac{3}{2} < p < 3.$$

Ceci suffit à démontrer l'existence de solutions distribution au système, sous les seules hypothèses d'appartenance de f^0 aux espaces intervenant dans la constante ci-dessus.

References

[BD] C. Bardos, P. Degond. Global existence for the Vlasov-Poisson Equation in 3 space variables with small initial data. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 2, 101–118 (1985).

[BL] J.Bergh, J.Loefstroem. Interpolation Spaces. Springer, Berlin (1976).

[Co] Th. Colin. Smoothing effects for dispersive equations via a generalized Wigner transform. Siam J. Math. Anal., Vol. 25, No 6, pp 1622-1641 (1994)

[Cs] F. Castella. L^2 solutions to the Schródinger-Poisson system. To appear in Math. Meth. Mod. Appl. Sci.

[Cz] Th. Cazenave. An introduction to nonlinear Schröddinger Equations. Textos de Metodos Matematicos 26. Instituto de Matematica. Uiversidade Federal de Rio de Janeiro (1993).

[DU] J. Diestel, J.J. Uhl. Vector Measures. Mathematical Surveys, Vol.15, American Mathematical Society (1977).

[GV] J. Ginibre, G. Velo. The global Cauchy problem for some nonlinear Schröddinger equation revisited, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse nonlinéaire 2 (1985), 309-327.

[LP] P.L. Lions, B. Perthame. Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 314; Série I, 801–806 (1992).

[P] B. Perthame. Time decays, propagation of low moments and dispersive effects for Kinetic equations. Comm. PDE., Vol. 21, 659-686 (1996).

[St] R. S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. Duke Math. J. 44 (1977), 705-714.

[Ya] K.Yajima. Existence of Solutions for Schrödinger evolution Equations. Commun. Math. Phys., Vol.110, 415-426 (1987).

Université Pierre et Marie Curie - Laboratoire d'Analyse Numérique,
CNRS UA 189, Tour 55/65, 5ème étage,
4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France.