

Calcul différentiel et géométrie différentielle

Préambule :

Cette année, les rappels de géométrie différentielle seront faits sous forme d'exercices corrigés.

Ce devoir a pour objectifs de

* vous préparer à l'écrit en cherchant les exercices

* vous préparer à l'oral en vous donnant des exercices classiques, importants, ou amusants sur les leçons du programme.

Avant toute chose, repérez des bouquins utiles en calcul diff. Voici quelques exemples parmi d'autres :

<https://math.unice.fr/~frou/PGCD.html>

<https://www.eyrolles.com/Sciences/Livre/calcul-differentiel-9782729858520/>

<https://www.decitre.fr/livres/geometrie-9782868838834.html>

Séance du 15 septembre : différentielles, calculs élémentaires : exercices 1 à 11.

Séance du 16 septembre : théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, exercices 19, 20, 21, 22, 29, 31.

Séances ultérieures : courbes paramétrées à l'agreg, sous-variétés, extrema liés.

Exercice 1 a) On veut étudier $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Que fait-on? Quels sont les outils de calcul? De représentation visuelle?

b) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables. Comment (intuitivement) étudier ses variations, ses extrema, la représenter.

c) Même question avec $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

d) Géométriquement (et sans démonstration) comment peut-on ramener l'étude d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ à celle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Manipulations de la définition) a) Définition d'une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application constante. Calculer sa différentielle.

c) Même question avec une application linéaire.

d) Soit $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q .

e) Soit $f(x, y, z) = (x^2y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0) , son gradient au même point. Quels sont les ensembles dans lesquels vivent tous ces objets (dérivée partielle, gradient, différentielle).

f) Mêmes questions avec les fonctions suivantes: $g(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y)$ et $h(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

Exercice 3 a) Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de \vec{v} ? Si oui, donner son expression en fonction de df_a .

b) Donner des exemples d'applications f ayant des dérivées partielles dans toutes les directions $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au point a mais pas différentiables au point a .

Exercice 4 (Applications linéaires, bilinéaires) a) Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in E$.

b) Soit $\psi : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire. Même question.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Av, v \rangle$?

d) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto \langle Au, u \rangle$.

Exercice 5 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_0 , vue comme application linéaire $df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (Projection stéréographique) Étudier l'application $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\text{pôle nord}\}$ définie par

$$P : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

(différentiabilité, calcul de la différentielle et des dérivées partielles, image, inversibilité, calcul de l'inverse, ...)

Exercice 7 (Coordonnées polaires) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))$. Est-elle différentiable? Injective? Surjective? Sur quel(s) ensemble de définition peut-on l'étudier pour améliorer tout cela? (Faire un dessin).

b) Calculer sa jacobienne, son jacobien. Comment l'inverser? Calculer son (ses?) inverse(s) éventuel(s).

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ en coordonnées polaires.

d) Application: $f(x, y) = e^{-x^2/2 - y^2/2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2/2} dx$.

e) (Question très pénible à savoir faire) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Comment relier $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta))$? Exprimer $(\Delta f)(\varphi(r, \theta))$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$. (On rappelle que $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$).

Exercice 8 (Coordonnées sphériques) Mêmes questions avec $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\Psi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. Quel est le nom usuel des paramètres θ et φ ? (Faire un dessin)

Exercice 9 (Différentielle du déterminant) On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de $\det D \det_a$ au point a . (Exo classique, se trouve dans la littérature.)

Exercice 10 Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \rightarrow A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle au point a .

Exercice 11 (Différentiation de l'inversion) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ dans \mathbb{R}^2 définie par $f(x) = a + c \frac{x-a}{\|x-a\|^2}$ de pôle a et de puissance c . Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et calculer sa différentielle au point x . Montrer que la différentielle au point x est une similitude, composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à la perpendiculaire à $x - a$.

2) En déduire que si f est une inversion positive préservant le cercle C , et si $f(M) = M'$, alors tout cercle (ou droite) passant par M et M' est orthogonal à C .

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , positive, telle que f'' est bornée. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}$.

Exercice 13 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$. Calculer $\exp(M)$.

Indication : Sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n , observer le lien entre M et la dérivation des polynômes. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $h \in \mathbb{R}$, à l'aide des formules de Taylor, écrire le polynôme $X \mapsto P(X+h)$ en fonction de P et de M . En déduire l'expression de l'exponentielle de M .

Exercice 14 a) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Énoncer une condition nécessaire pour que f ait un extremum au point $a \in U$.

b) Donner des exemples (avec $n = 1$ et $n \geq 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f a un extremum en a . Donner des exemples ($n = 1$ puis $n = 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f n'a pas d'extremum en a .

c) Si f est de classe C^2 , donner une condition suffisante pour que f ait un extremum en a . Donner des exemples ($n = 1$ puis $n \geq 2$) dans lesquels f a un extremum en a , et cette condition est/n'est pas vérifiée.

d) Étudier les extrema de l'application de l'exercice ?? question 2).

Exercice 15 (Extrema liés) a) Énoncer le théorème des extrema liés.

b) On considère une boîte parallélépipédique de dimensions l, L, h . Sa surface est imposée et vaut S_0 . Quel est alors son volume maximal? Même question si son volume est imposé et vaut V_0 , quelle est sa surface minimale? ⁽¹⁾ Comparer.

c) Mêmes questions avec une boîte cylindrique de rayon r et de hauteur h . Comparer avec les dimensions standard des canettes.

Exercice 16 (Fonctions harmoniques et principe du maximum) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert du plan. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dite harmonique si $\Delta f = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

a) Montrer que si f est holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} , alors f est harmonique.

b) Montrer que si f est harmonique, alors f vérifie la propriété de la moyenne: pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$ tels que $D(p, r) \subset U$, on a

$$f(p) = \int_{S(p,r)} f d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) dt.$$

c) Que peut-on dire de la réciproque?

d) (*Principe du maximum*) Montrer que si f est une fonction harmonique sur U et continue sur \bar{U} , alors elle n'a pas d'extremum dans l'intérieur de U .

¹Il s'agit de problèmes logistiques classiques pour fabriquer des emballages peu coûteux.

Exercice 17 (Lemme de Schwarz) a) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
 b) Donner la définition de la différentielle seconde $d^2f(a)$ de f au point a . Montrer que $d^2f(a)$ est bilinéaire.
 c) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^2 . Montrer que l'application $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire symétrique.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ sinon.
 a) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
 b) Est-elle de classe C^2 ? Pourquoi ?

Exercice 19 (Théorème d'inversion locale) Énoncer le théorème d'inversion locale. Comment l'illustrer? Exemples, applications?

Exercice 20 (Théorème des fonctions implicites) a) Énoncé, exemples, applications.
 b) Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Illustrez le théorème des fonctions implicites. Géométriquement, que signifient ses hypothèse(s) et conclusion(s).

Exercice 21 (Perturbation d'application) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 , telle que $T(0) = 0$ et 0 n'est pas un point fixe dégénéré, i.e. 1 n'est pas une valeur propre de dT_0 .
 a) Montrer qu'alors 0 est un point fixe isolé de T , i.e. il existe un voisinage de 0 sur lequel 0 est l'unique point fixe de T . Exemples?
 b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , et $T_\lambda := T + \lambda S$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et U voisinage de 0 tels que pour tout $|\lambda| < \delta$, l'opérateur perturbé T_λ a un unique point fixe x_λ dans U . De plus, montrer que l'application $\lambda \in]-\delta, \delta[\rightarrow x_\lambda$ est de classe C^1 . (on pourra considérer $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$).

Exercice 22 (Continuité des racines d'un polynôme) Soit $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ un polynôme, et x_0 une racine de P_0 telle que $P_0'(x_0) \neq 0$. Montrer que si (a, b, c) est assez proche de (a_0, b_0, c_0) alors $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ a une unique racine proche de x_0 .

Exercice 23 (Lagrangien) Soit $E = \{\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \gamma \in C^1\}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie, que l'on munit de sa norme C^1 : $\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma(0)\| + \sup_{t \in [0,1]} \|\gamma'(t)\|$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k . Soit $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathbb{R}$ le *Lagrangien*, défini par $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$. Montrer qu'elle est de classe C^k .

Exercice 24 (Encore de la méca) Soit $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte unité, et $\mathcal{F} = \{u : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \text{ à support compact}\}$. On définit l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_B \|\nabla u(x)\|^2 dx - \int_B F \circ u(x) dx$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 bornée.

a) Calculer la différentielle de E au point $u_0 \in \mathcal{F}$. En déduire que les points critiques de E (i.e. tels que $dE_{u_0} = 0$) sont solutions d'une EDP. (On admettra la formule de Stokes $\int_B \nabla u \nabla \varphi dx = - \int_B \Delta u \varphi dx$)
 b) Calculer la différentielle seconde de E .

Exercice 25 (Surfaces) a) Donner différentes définitions d'une surface (sous-variété de dimension 2) de \mathbb{R}^3 comme

* ensemble des zéros d'une submersion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

* localement l'image d'un plongement $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

* localement le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

* ensemble localement modelé sur \mathbb{R}^2 : chaque point de S a un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ces points méritent d'être précisés (hypothèses), complétés, et l'équivalence entre eux doit être démontrée.

b) Comparer avec la définition de nappe paramétrée de \mathbb{R}^3 . Pouvez-vous donner un exemple de nappe paramétrée qui ne soit pas une surface (au sens de sous variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3) ? Ou de surface qui ne soit pas une nappe paramétrée?

c) Illustrer chacune de ces définitions de surface avec la sphère unité de \mathbb{R}^3 . (On écrira explicitement chacune des définitions montrant que la sphère est une surface de \mathbb{R}^3). Peut-on l'écrire comme nappe paramétrée ?

c) Même question avec l'hyperboloïde à deux nappes $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, l'hyperboloïde à une nappe $z^2 - x^2 - y^2 = -1$, le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; et toutes vos quadriques préférées.

d) Même question avec le tore paramétré par $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\mapsto ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$.

Exercice 26 (Espaces tangents) L'espace tangent en $x \in S$ à la surface est par définition le plan affine de \mathbb{R}^3 passant par x et de direction l'ensemble $\{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ courbe } C^1\}$ (ici ε dépend de c . Il s'agit de courbes définies au voisinage de 0.

a) Pour chacune des définitions équivalentes de surfaces, préciser comment on trouve l'espace tangent en un point $x \in S$. (Il suffit de raisonner localement au voisinage de x .)

b) Dans chacun des exemples des question c-d) de l'exercice 25, calculer l'espace tangent en un point quelconque de la surface.

Exercice 27 (Groupes de Lie) Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans \mathbb{R}^k , qui en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^k est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^k , et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \rightarrow G$, et l'inverse est un difféomorphisme de $G \rightarrow G$.

a) Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension :

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$, $SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1 \text{ et } {}^tABA = B\}$, avec q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , et B la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A}A = Id\}$.

b) Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^k , et $x \in M$. L'espace tangent en x à M est par définition l'ensemble $T_x M := \{c'(0), c :]-1, 1[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^k \text{ courbe } C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l'identité.

Exercice 28 a) Soit S une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^n , et $a \in S$. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 définie sur un voisinage U de S , et $f = g|_S$. L'application linéaire tangente $T_a f$ est par définition la restriction de dg_a à l'espace tangent $T_a S$. Le point a est un point critique de f si $T_a f = 0$, soit encore lorsque la restriction de dg_a à $T_a S$ est nulle. Montrer que $a \in S$ est un point critique de f ssi $\nabla g(a)$ est orthogonal à $T_a S$. (On rappelle que $\nabla g(a)$ est défini comme l'unique vecteur de \mathbb{R}^n tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla g(a), v \rangle = dg_a.v$.)

b) Un exemple célèbre. Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, et A la matrice

symétrique (inversible) associée dans la base canonique. Vérifier que $\nabla q(x) = 2Ax$. Soit $\Sigma = q^{-1}(1)$. Vérifier que Σ est une hypersurface de \mathbb{R}^n . Soit $q_0(x) = \|x\|^2$ (norme euclidienne). Que vaut $\nabla q_0(x)$? Donner les équations satisfaites par les points critiques de q_0 restreinte à Σ . Que doit vérifier le multiplicateur de Lagrange? Discuter l'existence de points critiques de $(q_0)|_\Sigma$ en fonction des valeurs propres de A .

c) Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion. (Rappeler la définition). Soit \mathcal{S}_g la surface définie par $\mathcal{S}_g = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x) = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Comment trouver les extrema de la restriction $f|_{\mathcal{S}_g}$ de f à \mathcal{S}_g ? Justifier d'une part à l'aide du théorème des extrema liés, et d'autre part à l'aide de votre intuition géométrique, et d'un dessin.

d) On cherche à minimiser la surface S d'une canette cylindrique, tout en fixant son volume égal à $V = 33cl$. Résoudre le problème à l'aide du théorème des extrema liés.

d) On cherche à maximiser le volume inclus à l'intérieur d'une surface cylindrique de surface fixée S_0 . Même question.

Exercice 29 (Lemme de Morse) Soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$, et que d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$, avec U, V deux voisinages de 0 , tel que pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$f \circ \varphi(x) = f(0) + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x).$$

Commentaire Après changement de variable convenable, au voisinage de 0 , $f(x)$ ressemble à son développement de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 30 Quelques compléments à connaître aussi : théorème du rang constant, théorème de Sard, étude des courbes planes et gauches, définition et étude des quadriques. Classification des formes quadratiques et étude locale des surfaces. Surface réglée. ...

Exercice 31 Démontrez le théorème de d'Alembert (tout polynôme à coefficients complexes non constant a au moins une racine) à l'aide du théorème d'inversion locale.

Exercice 32 Montrez que $SO(n)$ est simple avec une preuve de calcul différentiel.

Exercice 33 Démontrez la formule de Cauchy (voir Rudin)

Exercice 34 Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe simple fermée continue de classe C^1 par morceaux.

1. Vérifiez la définition de chaque terme.
2. Exprimez sa longueur.
3. Énoncez le théorème de Jordan (admis).
4. Soit L sa longueur et S l'aire de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Montrez que

$$L^2 \geq 4\pi S.$$

5. Que pouvez-vous dire du cas d'égalité.

Exercice 35 Étudiez la différentiabilité de l'application $v \in E \mapsto \|v\|$, $\|\cdot\|$ étant une norme sur E .

Même question avec l'application $x \in X \rightarrow d(x, F)$, où (X, d) est un espace métrique et F un fermé de X .