Université de Rennes 1 | 2006-2007
Master 1 Mathématiques | G08 - Équations elliptiques

# Feuille de TD n$^o$4
# Problèmes elliptiques linéaires

**Exercice 1. Identification de formulations variationnelles**
On considère le problème suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V \qquad a(u,v) = L(v) \end{cases}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x) dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)\, v(x) dx + a_0\, v(0) + a_1\, v(1).$$

Les données sont la fonction $f \in L^2(0,1)$, et les réels $a_0$ et $a_1$ .

1. Étudier ce problème dans chacun des cas suivants :

$$V = H_0^1(0,1), \qquad V = H^1(0,1),$$
$$V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(1) = 0\}, \qquad V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(0) = 0\},$$
$$V = \{v \in H^1(0,1)\,;v(0) = v(1)\}, \qquad V = \{v \in H^1(0,1)\,;\textstyle\int_0^1 v(x)\,dx = 0\}.$$

2. Dans les cas bien posés, montrer que la solution $u$ de (1) vérifie (au sens des distributions) une équation différentielle que l'on précisera. Montrer que $u' \in C^0[0,1] \cap H^1(0,1)$. En déduire que, pour tout $v \in V$, $a(u,v) - L(v)$ peut s'écrire sous une forme ne faisant intervenir que des termes au bord.

3. Montrer que, dans chacun des cas bien posés, (1) équivaut à un problème différentiel à conditions au bord, que l'on précisera.

4. Montrer que

$$f \in H^m(0,1) \quad \text{entraîne} \quad u \in H^{m+2}(0,1),$$
$$f \in C^k([0,1]) \quad \text{entraîne} \quad u \in C^{k+2}([0,1]).$$

**Exercice 2. Problème de Fourier pour le Laplacien**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier, on se donne $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ où $\partial\Omega$ est la frontière de $\Omega$ et $\lambda$ un réel strictement positif. On considère alors le problème elliptique suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \lambda\, u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{pour tout } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\nu$ est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à $\Omega$.

1. Donner la formulation variationnelle de (2).

2. Montrer qu'il existe $C_\Omega > 0$, ne dépendant que de $\Omega$, telle pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on ait

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left( \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

   où l'on rappelle que $\gamma_0$ est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

3. Montrer qu'il existe une unique solution faible de (2).

4. Interpréter la formulation faible.

**Exercice 3. Le bilaplacien**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère $f \in L^2(\Omega)$ et on veut résoudre le problème

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{rll} \Delta^2 u & = f & (\Omega) \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 & (\partial\Omega) \end{array} \right.$$

1. Donner la formulation variationnelle du problème sur l'espace

$$H^2_0(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \, u = \nabla u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

2. Montrer que (3) admet une unique solution faible.

3. Interpréter la formulation faible.

**Exercice 4. Une question de compatibilité**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et on veut résoudre le problème

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{rll} -\Delta u & = f & (\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = g & (\partial\Omega) \end{array} \right.$$

1. Donner la formulation variationnelle du problème sur $H^1(\Omega)$ et montrer qu'elle n'admet pas une unique solution.

2. On pose

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x)\, dx = 0 \right\}.$$

   À l'aide de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, montrer que la formulation variationnelle est bien posée sur $V$.

3. Interpréter la formulation faible et montrer que la solution faible correspondante $u$ ne satisfait (4) que sous une condition que doivent satisfaire $f$ et $g$.

**Exercice 5. Un problème de perturbation singulière**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On considère $f \in L^2(\Omega)$ et le problème suivant, pour $\varepsilon > 0$ :

$$(5) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\,\Delta u + u &= f \qquad (\Omega) \\ u &= 0 \qquad (\partial\Omega) \end{cases}$$

1. Montrer que (5) admet une unique solution faible $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et que $\|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ .

2. Montrer que la suite $u^\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $f$ (on montrera d'abord que toute suite extraite de $u^\varepsilon$ admet une sous-suite faiblement convergente et que la limite est nécessairement égale à $f$).

3. Déduire des deux questions précédentes que $u^\varepsilon$ converge fortement vers $f$ dans $L^2(\Omega)$.

4. On suppose désormais que $f \in H_0^1(\Omega)$. En remarquant que $u^\varepsilon$ est l'unique minimiseur sur $H_0^1(\Omega)$ d'une fonctionnelle que l'on écrira, montrer que $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\nabla f\|_{L^2}$ .

5. En déduire que $u^\varepsilon$ converge fortement vers $f$ dans $H^1(\Omega)$.