Université de Rennes 1 | 2006-2007
Master 1 Mathématiques | G08 - Équations elliptiques

Feuille de TD n^o3

Espaces de Sobolev

Exercice 1. Étude de $W^{1,p}(0,1)$

1. *Injections de Sobolev*
   (a) Soit $g \in L^1(0,1)$. On pose $w(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Montrer que $w \in C^0[0,1]$ et que sa dérivée, prise au sens des distributions, est $w' = g$.
   (b) Montrer que, si de plus $g \in L^p(0,1)$, et $1 \le p < +\infty$, alors $w \in C^{0,\alpha}[0,1]$ avec $\alpha = 1 - 1/p$. On rappelle que, pour $0 < \alpha < 1$,
   $$C^{0,\alpha}[0,1] := \{v \in C^0[0,1]\,;\exists C \text{ tel que } \forall\, x,y \in [0,1], \quad |v(x)–v(y)| \le C\,|x–y|^\alpha\}.$$
   (c) Montrer que, si $g \in L^\infty(0,1)$, alors $w \in C^{0,1}[0,1]$, où
   $$C^{0,1}[0,1] := \{\text{espace des fonctions uniformément lipschitziennes sur } [0,1]\}.$$
   (d) En comparant u et w défini par $w(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$, montrer que, si $u \in W^{1,p}(0,1)$, alors
   $$u \in C^{0,1-1/p}[0,1], \text{ si } 1 \le p < +\infty, \quad \text{et} \quad u \in C^{0,1}[0,1], \text{ si } p = +\infty.$$
   (e) Montrer que l'injection canonique, liée à l'inclusion $W^{1,p}(0,1) \subset C^0[0,1]$, est continue.
2. *Caractérisation de* $W_0^{1,p}$
   (a) On pose $W_0 = \{v \in W^{1,p}(0,1)\,; v(0) = v(1) = 0\}$ (l'inclusion précédente montre que $v(0)$ et $v(1)$ sont bien définis, puisque v est continue). Montrer que, pour $p \neq \infty$, on a $W_0^{1,p}(0,1) \subset W_0$.
   (b) Soit $v \in W_0$ et $p \neq \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ vérifiant $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$ tel que l'on ait $\varphi_n \to v'$ dans $L^p(0,1)$. En déduire que $W_0^{1,p}(0,1) = W_0$.
3. *Formule de Green et application*
   (a) Montrer que $W^{1,p}(0,1) = W_0^{1,p}(0,1) \oplus \mathbb{P}_1$. En déduire que $\mathcal{D}([0,1])$ est dense dans $W^{1,p}(0,1)$.
   (b) Soit u et $v \in W^{1,1}(a,b)$, montrer que $uv \in W^{1,1}(a,b)$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ et que
   $$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx.$$
   Si de plus $u \in W^{1,p}(a,b)$ et $v \in W^{1,q}(a,b)$, $1 \le p \le q \le +\infty$, en déduire que $u\,v \in W^{1,p}(a,b)$.

(c) Soit $a < b < c$. Pour $u \in L^p(a,c)$, on note $u_g = u_{|(a,b)}$ et $u_d = u_{|(b,c)}$. Montrer que

$$u \in W^{1,p}(a,c) \Longleftrightarrow \text{“}u_g \in W^{1,p}(a,b), \quad u_d \in W^{1,p}(b,c),\text{et} \quad u_g(b) = u_d(b)\text{”}.$$

Exercice 2. Inégalités de Poincaré, Poincaré-Wirtinger et de Deny-Lions
On suppose que Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, connexe.

1. On veut démontrer par l'absurde qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2} .$$

Vérifier que nier cette inégalité entraîne l'existence d'une suite u_n de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_{L^2} = 1, \qquad \|\nabla u_n\|_{H^1} < \frac{1}{n} .$$

En utilisant le théorème de Rellich, montrer qu'il existe une fonction $u \in L^2(\Omega)$ telle que $\|u\|_{L^2} = 1$ et telle que, après extraction d'une sous-suite (renommée u_n), on ait $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.
En examinant la convergence de la suite ∇u_n, montrer que u est une fonction constante appartenant à $H_0^1(\Omega)$ et établir une contradiction.

2. Pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$, on note

$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx,$$

où $|\Omega| = \int_\Omega dx$. Montrer par l'absurde qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - \overline{u}\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note Π_k la projection orthogonale (dans $L^2(\Omega)$) sur l'ensemble $\mathbb{P}_k$ des polynômes de degré $\leq k$. Montrer que

$$\forall u \in H^{k+1}(\Omega), \qquad \|u - \Pi_k u\|_{H^{k+1}} \leq C|u|_{H^{k+1}} ,$$

où l'on note

$$\|u\|_{H^{k+1}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \qquad |u|_{H^{k+1}} = \left(\sum_{|\alpha| = k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} .$$

Les exercices suivants sont donnés en complément et ne seront pas traités en TD.

Exercice 3. Noyau de l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné de classe C^1. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω et $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ l'opérateur trace. On se propose de montrer que $Ker(\gamma) = H^1_0(\Omega)$.

1. Montrer que $H^1_0(\Omega) \subset Ker(\gamma)$.
2. Soit $u \in Ker(\gamma)$. On cherche à montrer que $u \in H^1_0(\Omega)$. Pour cela, on va construire une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$.
   (a) Expliquer comment, par cartes locales, on peut se ramener au cas où la fonction est dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^N_+}$ et telle que $\gamma u(x',0) = 0$ pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.
   (b) On note $T(u)$ le prolongement de u par 0 à $\mathbb{R}^N$. Montrer que
   $$\forall i = 1, \ldots, N \qquad \frac{\partial T(u)}{\partial x_i} = T\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$
   puis que $T(u) \in H^1(\mathbb{R}^N)$.
   (c) Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ tel que $\theta > 0$ et $\int \theta(x)dx = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\theta(x/\varepsilon)$. Montrer que la fonction $u_\varepsilon = \theta_\varepsilon \star T(u)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ et converge vers $T(u)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$.

Exercice 4. Injection de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$.
Soit $p \in [1,N[$. On cherche à montrer l'existence de $C > 0$ tel que, si p^* est donné par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \tag{1}$$

alors

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \qquad \|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}\,. \tag{2}$$

1. Supposons l'existence de $q > 0$ tel que
   $$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \qquad \|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}\,. \tag{3}$$
   Soit $\lambda > 0$. Ecrire (3) avec $v(x) = u(\lambda x)$, et en déduire que $q = p^*$.
2. Soient f_1,..., f_N N fonctions de $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ on note
   $$\tilde{x}_i = (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_N).$$
   et $f(x) = f_1(\tilde{x}_1) \cdots f_N(\tilde{x}_N)$. Montrer par récurrence sur N que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et que
   $$\|f\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{N-1}} ... \|f_N\|_{L^{N-1}}$$

3. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On pose

$$f_i(y_1,\ldots,y_{N-1}) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},t,y_i,\ldots,y_{N-1}) \right| dt\,.$$

   En remarquant que

$$|u(x)|^N \leq f_1(\tilde{x}_1) \cdots f_N(\tilde{x}_N),$$

   montrer l'inégalité (2) pour $p = 1$.

4. Refaire le raisonnement précédent pour la fonction $|u|^{t-1}u$, avec $t = \dfrac{N-1}{N}p^*$. Conclure.