UFR Mathématiques, Université de Rennes 1 — 2014-2015
Licence MIEE semestre 4
L3 CAPES — Méthodes Numériques en Analyse

Examen - 1ère session

Mardi 12 mai 2015. Durée : 2 heures.

Les résumés de cours sont autorisés.

Exercice 1. **Recherche de zéro**

Soit $I = [1, 3]$, $a \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie sur I par

$$g(x) = 1 + \frac{a}{x} \,.$$

On considère la méthode itérative $x_{k+1} = g(x_k), k \geq 0$ pour l'approximation de points fixes de g.

1) Pour quelles valeurs de a a-t-on $g(I) \subset I$?

2) Montrer que pour $a \in]0, 1[$ la fonction g est une contraction dans I.

3) Déterminer, en fonction de a, les points fixes x_* de g dans I.

4) Pour quelles valeurs de a a-t-on convergence locale de la méthode itérative ?

5) Soit $(y_k)_{k\geq 0}$ la suite définie par la méthode itérative de Newton $y_{k+1} = h(y_k)$ pour l'approximation des racines de la fonction $x \mapsto f(x) = g(x) - x$. Préciser $h(x)$ et montrer que la convergence locale de la méthode de Newton est au moins d'ordre 2 pour les valeurs de a trouvées dans la question 1.

Exercice 2. **Interpolation polynômiale**

Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. On considère le polynôme p_ε de degré 3 satisfaisant

$$p_\varepsilon(0) = p_\varepsilon(\varepsilon) = 1 \qquad \text{et} \qquad p_\varepsilon(1) = p_\varepsilon(1 + \varepsilon) = 0.$$

Nous désignerons par $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ la base de Lagrange de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 3, associée aux points 0, ε, 1 et $1 + \varepsilon$.

1) Exprimer p_ε dans la base $(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$.

2) Déterminer les fonctions de base de Lagrange ℓ_0 et ℓ_1.

3) En déduire l'expression suivante :

$$p_\varepsilon(x) = \frac{(x-1)(x-1-\varepsilon)(2x+1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}.$$

4) Soit

$$p(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(x).$$

(a) Calculer explicitement $p(x)$.

(b) En déduire la dérivée $p'(x)$.

(c) Calculer alors $p(0)$, $p'(0)$, $p(1)$, $p'(1)$.

(d) Interprétez ces résultats.

Exercice 3. **Intégration numérique**

Soient $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et soient ω_0, ω_1, ω_2 trois nombres réels. Nous considérons la formule de quadrature définie par

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{2} \omega_j f(x_j) \ .$$

pour l'approximation de l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, pour toute fonction f continue donnée sur $[-1, 1]$. Dans l'ensemble de cet exercice, par des raisons de symétrie, on sait que l'on peut prendre $\omega_0 = \omega_2$. On impose alors $\omega_0 = \omega_2$.
Soit $(\ell_0,\ \ell_1,\ \ell_2)$, la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points x_0, x_1, x_2.

1) Déterminer les fonctions de base de Lagrange ℓ_0 et ℓ_1.

2) Déterminer ω_0, ω_1 de sorte que la formule de quadrature Q soit exacte pour tout polynôme de degré au plus égal à 2. *Indication : utilisez le fait qu'elle doit être exacte pour ℓ_0 et ℓ_1.*

3) Pour les valeurs de ω_0, ω_1 établies dans la question précédente, la formule de quadrature est-elle exacte ...

(a) ... pour les polynômes de degré 3 ?

(b) ... pour les polynômes de degré 4 ?

4) Considérons désormais f de classe $\mathcal{C}^3([-1, 1])$.

(a) Déterminer en fonction de $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 le polynôme d'interpolation p de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2. Rappeler la formule d'erreur d'interpolation correspondante.

(b) En déduire enfin la majoration suivante sur l'erreur de quadrature :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q(f) \right| \leq \frac{C}{6} \max_{[-1,1]} \|f^{(3)}\|, \quad \text{avec } C = \int_{-1}^{1} |x(x-1)(x+1)|\, dx.$$
