UFR Mathématiques – Université de Rennes 1 — 2013 – 2014

Méthodes numériques en analyse — Licence MIEE 2e année - Semestre 4

L3 CAPES / L3 Modélisation

Examen – 1re session

18 avril 2014

Méthodes numériques en analyse

⋆ ⋆ ⋆

Durée : 2 heures.
Les documents et calculatrices ne sont pas autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
On pourra également admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. **Polynômes orthogonaux**

On considère le produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ défini par l'intégrale convergente (faisant intervenir une racine cubique $\sqrt[3]{\ }$)

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\sqrt[3]{x}\,dx.$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{3}}\,dx$ et vérifier que $I_2 = 3/10$.
2) Déterminer les 2 premiers polynômes $P_0,\ P_1$ orthogonaux pour ce produit scalaire.
3) Déduire de la question précédente deux réels μ et z tels que la formule de quadrature $Q(f) = \mu\, f(z)$ approchant l'intégrale $\int_0^1 f(x)\sqrt[3]{x}\,dx$ soit d'ordre maximal et donner la valeur de l'ordre alors obtenu.
4) Déterminer un réel a qui minimise la quantité :

$$\int_0^1 (\sqrt[5]{x} - a)^2\sqrt[3]{x}\,dx.$$

Exercice 2. **Résolution approchée d'équations**

1) On considère la fonction polynomiale $p(x) = x^3 + 4x - 5$.

(a) Montrer que la seule racine réelle de p est $x = 1$.

(b) Expliciter la fonction g qui définit les itérations $y_{k+1} = g(y_k)$ de la méthode de Newton pour l'approximation de la racine réelle du polynôme p.

(c) Justifier que, si la suite $(y_k)_{k\geq 0}$ ainsi définie converge vers $x = 1$ (avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \neq 1$) alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+1} - 1}{(y_k - 1)^2} = \frac{3}{7}.$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{x^2+4}$. On définit une suite récurrente $(x_k)_{k\geq 0}$ par le choix de $x_0 \in \mathbb{R}$ puis par les itérations $x_{k+1} = f(x_k)$ pour $k \geq 0$.

(a) Montrer que la fonction f admet un unique point fixe $x^\star \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser 1.a).

(b) Étudier les variations de f.

(c) A-t-on convergence locale de $(x_k)_{k\geq 0}$ au voisinage de $x^\star$, et si oui, quel est l'ordre de convergence ?

(d) On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque fixé. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $x_k \in [0, 5/4]$.

(e) Prouver avec rigueur que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.

Exercice 3. **Interpolation et premières formules de Faulhaber**

On s'intéresse dans cet exercice au calcul des sommes des puissances d'entiers consécutifs de la forme :

$$F_s(n) = \sum_{k=1}^{n} k^s = 1^s + 2^s + \ldots + n^s, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^\star,\ s \in \mathbb{N}.$$

Rappel (Formule des différences divisées) :

$$f[x] = f(x), \quad f[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_2, \ldots, x_n] - f[x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_1}.$$

1) Calculer $F_0(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et vérifier que F_0 coïncide sur $\mathbb{N}^\star$ avec un polynôme de degré 1 que l'on précisera.

2) *Dans cette question, on met en place quelques observations utiles à partir du cas particulier $s = 1$.*

(a) Par la méthode des différences divisées, déterminer le polynôme d'interpolation de degré minimal p tel que $p(1) = F_1(1)$, $p(2) = F_1(2)$ et $p(3) = F_1(3)$ (on donnera le résultat sous forme développée).

(b) Étant donné $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer en fonction de k les différences divisées $F_1[k, k+1]$ et $F_1[k, k+1, k+2]$.

(c) En déduire que pour tous entier $r \geq 3$ et $k \geq 1$, on a $F_1[k, k+1, \ldots, k+r] = 0$.

(d) Soit $n \geq 3$ fixé. À partir des questions précédentes, compléter le tableau des différences divisées précédent afin de déterminer le polynôme $\tilde{p}$ de degré minimal tel que $\tilde{p}(k) = F_1(k)$ pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$.

(e) Retrouver ainsi le résultat classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}.$$

3) *Extension au cas $s = 2$:*

(a) Calculer successivement les différences divisées $F_2[k, k+1]$, $F_2[k, k+1, k+2]$ et $F_2[k, k+1, k+2, k+3]$ exprimées en fonction de k.

(b) En déduire que pour tous entier $r \geq 4$ et $k \geq 1$ on a $F_2[k, k+1, \ldots, k+r] = 0$.

(c) Obtenir ainsi un polynôme q de degré 3 qui interpole F_2 sur tous les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$, puis la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

4) *Détermination du comportement de $F_s(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$; s est désormais un entier quelconque.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^s$.

On utilise la formule des trapèzes pour approcher $\int_a^b f(t)\,dt$ en considérant précisément la quantité

$$T_{[a,b]}(f) = (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

On rappelle (et on ne demande pas de démontrer) que cette formule de quadrature s'obtient en considérant le polynôme d'interpolation de f en a et en b et qu'elle est alors d'ordre 1 exactement.

(a) Démontrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - T_{[a,b]}(f) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx.$$

(b) Montrer que pour tous $a < b$,

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

(c) Justifier successivement les propriétés suivantes, valables pour tout $n \geq 2$

$$\frac{F_s(n-1) + F_s(n)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} T_{[k,k+1]}(f),$$

$$\left| \frac{n^{s+1}}{s+1} - F_s(n) + \frac{n^s}{2} \right| \leq \frac{1}{6}\frac{s(s-1)}{2} F_{s-2}(n),$$

$$F_s(n) = \frac{n^{s+1}}{s+1} + \frac{n^s}{2} + O(n^{s-1}).$$

Fin du sujet