

UNIVERSITÉ PARIS 6 — PIERRE et MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par M. Florian Ivorra

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Réalisation  $\ell$ -adique  
des  
motifs mixtes

*Soutenue le 13 décembre 2005 devant le jury composé de*

M. Yves ANDRÉ (ENS)	Invité
M. Jean-Benoit BOST (Université Paris 11)	
M. Uwe JANNSEN (Universität Regensburg)	
M. Bruno KAHN (Université Paris 7)	Directeur
M. Fabien MOREL (LMU)	Rapporteur
M. Jan NEKOVÁŘ (Université Paris 6)	
M. Pierre SCHAPIRA (Université Paris 6)	
M. Christophe SOULÉ (IHÉS)	



UNIVERSITÉ PARIS 6 — PIERRE et MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par M. Florian Ivorra

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Réalisation  $\ell$ -adique  
des  
motifs mixtes

*Soutenue le 13 décembre 2005 devant le jury composé de*

M. Yves ANDRÉ (ENS)	Invité
M. Jean-Benoit BOST (Université Paris 11)	
M. Uwe JANNSEN (Universität Regensburg)	
M. Bruno KAHN (Université Paris 7)	Directeur
M. Fabien MOREL (LMU)	Rapporteur
M. Jan NEKOVÁŘ (Université Paris 6)	
M. Pierre SCHAPIRA (Université Paris 6)	
M. Christophe SOULÉ (IHÉS)	



## AVANT PROPOS

Cette thèse réalisée sous la direction de Bruno Kahn a pour thème les réalisations  $\ell$ -adiques des motifs mixtes construits par V. Voevodsky. Nous lui avons joint sous forme de seconde partie un travail sur la microlocalisation des Ind-faisceaux effectué sous la direction de P. Schapira dans le prolongement du DEA.



## REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse Bruno Kahn pour les nombreuses discussions que nous avons eues et qui ont permis la maturation de ce travail et d'idées qui lui sont reliées. Il m'a initié à la théorie des motifs et m'a encadré tout en me laissant une grande liberté, cela a été pour moi une vraie chance. Je le remercie pour l'ouverture d'esprit qu'il a toujours manifestée en accueillant mes idées et mes erreurs et la solide confiance avec laquelle il m'a accompagné tout au long de cette thèse, y compris dans les moments les plus difficiles. Il m'a fait profiter de son grand savoir et de sa bienveillance.

Pierre Schapira m'a introduit à la recherche et a grandement contribué à ma formation. Je lui suis aussi reconnaissant pour son soutien constant.

Je tiens à remercier Marc Levine et Fabien Morel d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que Yves André, Jean-Benoit Bost, Uwe Jannsen, Jan Nekovář, Pierre Schapira et Christophe Soulé de m'avoir fait l'honneur d'accepter de participer au jury de celle-ci.

Mes remerciements vont aussi à Christian Peskine qui m'a donné de précieux conseils lorsque cela a été nécessaire et a su me communiquer son goût pour la géométrie.

Je souhaite également remercier les équipes de l'institut de mathématiques qui m'ont accueilli durant la préparation de ce travail, Georges Maltsiniotis et Bernhard Keller qui ont organisé le groupe de travail homotopique ainsi que Joël Riou pour les échanges réguliers que nous avons eus.





# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant propos</b> .....	v
<b>Remerciements</b> .....	vii
<b>Partie I. Réalisation <math>\ell</math>-adique des motifs mixtes</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
Présentation générale.....	3
Conventions.....	6
Enoncés des principaux résultats.....	6
Présentation détaillée.....	10
<b>1. Cycles algébriques relatifs</b> .....	17
1.1. Cycles relatifs.....	17
1.1.1. Dimension relative.....	17
1.1.2. Cycles relatifs.....	24
1.1.3. Cycles relatifs équidimensionnels.....	27
1.2. Le changement de base des cycles relatifs.....	31
1.2.1. Préfaisceaux de cycles relatifs.....	31
1.2.2. Points épais et éclatements abstraits.....	32
1.2.3. Existence et unicité du changement de base.....	43
1.2.4. Descente plate.....	50
1.3. Multiplicités.....	52
1.3.1. Cas géométriquement unibranche.....	52
1.3.2. Cas général.....	63
1.4. Opérations sur les cycles relatifs.....	64
1.4.1. Images inverses.....	64
1.4.2. Images directes.....	69
1.4.3. Produits externes.....	74
<b>2. Localisation des correspondances finies</b> .....	81
2.1. Correspondances finies.....	81
2.1.1. Correspondances finies.....	82
2.1.2. Changement de base.....	86
2.1.3. Commutation aux limites projectives.....	87

2.2. Localisation Nisnevich des correspondances finies.....	89
2.2.1. Une homotopie canonique.....	90
2.2.2. Décomposition locale pour la topologie de Nisnevich.....	97
2.2.3. Lien avec la structure tensorielle.....	101
2.3. Localisation étale des correspondances finies.....	104
2.3.1. Conventions.....	104
2.3.2. Énoncés des résultats.....	107
<b>3. Préfaisceaux et faisceaux avec transferts.....</b>	<b>111</b>
3.1. Topologie de Nisnevich.....	111
3.1.1. cd-structures.....	111
3.1.2. La topologie de Nisnevich.....	116
3.2. Faisceaux Nisnevich avec transferts.....	118
3.2.1. Préfaisceaux et faisceaux avec transferts.....	118
3.2.2. Structure monoïdale.....	125
3.2.3. Transferts et h-topologies.....	126
3.3. Catégorie dérivée.....	132
3.3.1. Un résultat de compacité.....	132
3.3.2. Structure monoïdale.....	134
3.4. Résolution de Godement des faisceaux avec transferts.....	143
3.4.1. Rappels sur la résolution de Godement.....	143
3.4.2. Résolution de Godement Nisnevich et transferts.....	149
3.4.3. Résolution de Godement étale et transferts.....	154
<b>4. Motifs mixtes de Voevodsky.....</b>	<b>157</b>
4.1. Catégories de motifs mixtes.....	158
4.1.1. Point de vue faisceautique.....	158
4.1.2. Point de vue géométrique.....	168
4.1.3. Commutation aux limites projectives.....	172
4.2. Cohomologie motivique et groupes de Chow supérieurs de Bloch.....	176
4.2.1. L'isomorphisme de E. Friedlander et A. Suslin.....	177
4.2.2. Comparaison des deux théories.....	178
4.3. Classes de Chern et de Thom.....	181
4.3.1. Classes de Chern.....	181
4.3.2. Classes de Thom.....	183
4.4. Morphismes de Gysin motiviques.....	188
4.4.1. Isomorphisme de pureté.....	188
4.4.2. Cas d'une immersion fermée.....	191
4.4.3. Cas d'un morphisme projectif.....	198
4.5. Un morphisme classe de cycles naïf.....	203
4.5.1. Classes fondamentales.....	204
4.5.2. Classes de cycles naïves.....	206
4.5.3. Compatibilité fondamentale.....	213
<b>5. Réalisation <math>\ell</math>-adique des motifs mixtes.....</b>	<b>215</b>
5.1. Réalisation $\ell$ -adique et motifs de Chow.....	215
5.1.1. Correspondances cohomologiques.....	216
5.1.2. Correspondances cohomologiques finies.....	217

5.1.3. Analogie $\ell$ -adique des motifs de Chow.....	219
5.1.4. Réalisation $\ell$ -adique des motifs de Chow.....	221
5.2. Réalisation $\ell$ -adique des motifs mixtes géométriques.....	222
5.2.1. Remarques préliminaires.....	223
5.2.2. Construction.....	223
5.2.3. Une variante modérée.....	228
5.3. Lien avec la construction de A. Huber.....	229
5.3.1. Transposition et préfaisceaux avec transferts.....	230
5.3.2. Transferts galoisiens.....	234
5.3.3. Comparaison.....	240
5.4. Lien avec les classes de cycles.....	244
5.4.1. Cas des groupes de Chow.....	244
5.4.2. Cas des groupes de Chow supérieurs.....	246
<b>A. Coefficients <math>\ell</math>-adiques.....</b>	<b>251</b>
A.1. Rappels sur les faisceaux $\ell$ -adiques.....	252
A.2. La catégorie de T. Ekedahl.....	254
A.3. $t$ -structure naturelle.....	257
A.4. Coefficients modérés.....	263
<b>B. Multiplicités de Samuel.....</b>	<b>265</b>
B.1. Multiplicités géométriques.....	265
B.2. Polynômes de Hilbert et de Samuel.....	267
B.3. Multiplicités de Samuel.....	268
<b>Glossaire des notations.....</b>	<b>273</b>
<b>Partie II. Microlocalisation des Ind-faisceaux.....</b>	<b>283</b>
<b>Motivation.....</b>	<b>285</b>
<b>1. Noyaux microlocaux.....</b>	<b>289</b>
1.1. Ind-faisceaux sur les variétés.....	289
1.2. Noyaux associés à certaines 1-formes.....	293
1.3. Propriétés fonctorielles.....	299
<b>2. Microlocalisation des ind-faisceaux.....</b>	<b>309</b>
2.1. Le noyau $K_{\mathfrak{X}}$ de l'ind-microlocalisation.....	309
2.2. Le lien entre $\mu hom$ et la microlocalisation classique.....	315
2.3. Micro-support et ind-faisceaux.....	317
2.4. Propriétés fonctorielles de la microlocalisation.....	323
2.5. Convolution microlocale des noyaux.....	328
2.6. Un théorème d'annulation pour les fonctions holomorphes microlocales.....	330
<b>Bibliographie.....</b>	<b>333</b>



# PARTIE I

## RÉALISATION $\ell$ -ADIQUE DES MOTIFS MIXTES



# INTRODUCTION

## Présentation générale

La théorie des motifs mixtes telle qu'elle a été imaginée par A. Grothendieck (d'aucuns diraient inventée ou découverte) doit offrir le cadre universel dans lequel traiter de la cohomologie des schémas. Suivant cette philosophie, les autres théories cohomologiques ne sont qu'autant d'incarnations, autant de réalisations, de la notion de motifs.

Le concept de motifs mixtes ainsi que les filtrations par le poids qui leur sont associées, ont été très tôt au coeur de grandes avancées en cohomologie des schémas. Nous ne pouvons manquer de citer à ce propos, notamment, les travaux de P. Deligne sur la théorie de Hodge mixte [25, 26, 28] culminant avec les travaux de M. Saïto [114, 115] en une théorie des coefficients de Hodge-De Rham, ainsi que les travaux de P. Deligne sur le poids en cohomologie  $\ell$ -adique [27, 30] aboutissant à la preuve des conjectures de Weil, ou encore les travaux de A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne sur les faisceaux pervers [12] — la notion de faisceaux pervers  $\ell$ -adiques mixtes devant être l'incarnation  $\ell$ -adique de la catégorie abélienne des motifs mixtes. Au contraire des motifs purs, pour lesquels des définitions ainsi qu'un vaste réseau de conjectures — les conjectures standard [57, 92] — ont été dégagés par A. Grothendieck dans la littérature, la théorie des motifs mixtes est demeurée longtemps largement conjecturale. Cela a conféré aux motifs mixtes un double aspect, en apparence paradoxal, celui d'une théorie dont la construction reste encore à faire et pourtant avérée par « une multitude d'intuitions de toutes sortes, nullement vagues mais formulables souvent avec une précision parfaite » pour reprendre l'expression de A. Grothendieck dans [58, II. pages 183-184].

La notion de motifs mixtes a été approchée initialement via la notion de réalisations mixtes, il s'agissait alors de considérer dans un premier temps un motif mixte comme la donnée simultanée de l'ensemble de ses réalisations ou d'une partie d'entre elles suivant la nature du problème considéré. C'est cette approche que l'on retrouve dans [31] et qui fait l'objet des travaux de U. Jannsen [72] et de A. Huber [66], ouvrage aboutissant à la construction d'une catégorie triangulée tensorielle des réalisations mixtes.

Les années 90 ont vu apparaître un renouveau dans l'approche motivique : les travaux de V. Voevodsky [133], de M. Levine [98] et de M. Hanamura [59, 62, 60] ont notamment donné naissance

à des catégories triangulées appelées à jouer le rôle de la catégorie triangulée des motifs mixtes. A ce titre ces catégories devraient toutes être équivalentes, mais le seul résultat qui semble être disponible à ce sujet dans la littérature, est le théorème de comparaison de M. Levine [98, Chapitre VI, theorem 2.5.5] qui assure que les catégories de [98] et [133] sont équivalentes pour un corps de caractéristique nulle.

Ces constructions étant « intrinsèquement motiviques », l'une des questions qui se pose alors naturellement consiste à réaliser ces catégories dans les théories cohomologiques connues. Le problème des réalisations fait partie intégrante de l'approche par M. Levine dans [98]. En effet, on peut dire que ses motifs mixtes triangulés sont construits pour se réaliser dans certaines catégories triangulées comme celles des coefficients  $\ell$ -adiques ou des modules de Hodge mixtes, avec pour contrainte de donner dans le cas des corps une cohomologie motivique canoniquement isomorphe aux groupes de Chow supérieurs [13]. L'approche de M. Hanamura est la plus voisine de la construction des motifs purs de Grothendieck via les groupes de cycles modulo une équivalence adéquate : ces derniers se voyant avantageusement substituer le formalisme DG-catégorique [21] et les complexes de Bloch [13, 96]. La réalisation cohomologique de Betti a été abordée, dans ce cadre, par M. Hanamura avec l'article [62, §5]. En revanche il ne semble pas que l'analogie  $\ell$ -adique soit traitée dans la littérature. Dans [68, 69], A. Huber a fait le lien, entre la théorie des motifs mixtes de V. Voevodsky et la théorie des réalisations mixtes en « réalisant ces motifs mixtes » dans la catégorie des réalisations mixtes. En prenant la composante  $\ell$ -adique, A. Huber obtient ainsi pour les motifs mixtes sur un corps de caractéristique nulle un foncteur de réalisation  $\ell$ -adique à coefficients rationnels. L'existence d'un tel foncteur, à coefficients entiers cette fois, découle des travaux de M. Levine sur les motifs mixtes de [98], à condition d'utiliser le théorème de comparaison que nous avons mentionné précédemment.

L'objet de cette thèse est la construction de foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques, à coefficients entiers, pour les motifs mixtes géométriques de V. Voevodsky sur un schéma noethérien séparé.

La construction de la catégorie triangulée des motifs mixtes proposée par V. Voevodsky s'appuie sur deux théories complémentaires mais de nature fort différente. La première est celle des cycles algébriques relatifs développée par A. Suslin et V. Voevodsky dans [125] qui met en évidence une classe très particulière de cycles algébriques sur lesquels il est possible d'effectuer un certain nombre d'opérations de théorie de l'intersection sans avoir recours au passage à l'équivalence rationnelle. Une certaine souplesse dans l'utilisation des cycles algébriques semble requise dans toute construction d'une catégorie de motifs mixtes. En effet le travail de M. Hanamura repose sur les complexes de Bloch et les lemmes de déplacement tandis que celui de M. Levine repose sur la théorie des cycles relatifs et une approche originale des lemmes de déplacement. On peut tenter de justifier cette remarque heuristique en rappelant que dans tout problème universel, qu'il s'agisse de constructions universelles « élémentaires », ou beaucoup plus sophistiquées — motifs, cobordisme algébrique [104, 100] — il est en général souhaitable de ne passer au quotient par les relations voulues qu'au dernier moment. La seconde, la topologie de Nisnevich [110, 90], confère aux motifs mixtes leur caractère local. Cette topologie se situe entre la topologie de Zariski, avec laquelle elle partage de nombreuses propriétés — dimension cohomologique, théorème de Brown-Gersten — et la topologie étale. La topologie de Nisnevich possède le mérite d'avoir en particulier



pour anneaux locaux, les anneaux locaux hénéliens : en cela elle s'apparente plus à la topologie étale qu'à la topologie de Zariski.

L'approche des réalisations que nous adoptons prend en compte les deux aspects de la théorie et le coeur en est une étude locale pour les topologies de Nisnevich et étale de certains cycles relatifs : les correspondances finies. Comme dans [98], la résolution de Godement est au coeur de la construction des réalisations. A l'inverse de *loc.cit.*, dans lequel M. Levine force les motifs mixtes à se plier à certaines propriétés de la résolution de Godement — nous renvoyons au chapitre V de [98] et en particulier à l'utilisation du « modèle à homotopie près »  $(-)^{\otimes, \text{sh}}$  qui impose la compatibilité de la formule de Künneth motivique avec la structure multiplicative de la résolution de Godement —, nous montrons que cette dernière se plie à la définition des motifs mixtes de Voevodsky.

Nous considérons un cadre où le schéma de base est noethérien séparé et pas seulement le spectre d'un corps. Bien que la théorie des motifs sur un corps présente nombre de problèmes ouverts d'une très grande complexité, cette généralité nous semble justifiée (indépendamment de la simple envie, que l'on éprouve souvent, de dégager les hypothèses fondamentales de celles qui sont superflues) par les deux considérations suivantes.

- La théorie des motifs mixtes est une théorie de coefficients au sens de Grothendieck et doit à terme s'insérer dans un formalisme de dualité des six opérations où les schémas généraux sont considérés [73, Conjecture 4.8]. Les foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques que nous construisons doivent prendre place dans ce cadre — il s'agit des foncteurs  $\ell$ -adiques du point (6) de la conjecture 4.8 de [73] — et il y a donc lieu de les construire dans la généralité la plus grande possible. A ce propos, il convient de remarquer que dans une théorie étroitement liée aux motifs mixtes — la théorie homotopique stable des schémas [108, 78] de F. Morel et V. Voevodsky — le formalisme des quatre opérations fait l'objet de [9].
- L'approche générale permet de mettre en évidence l'existence d'une variante « modérée » du foncteur de réalisation dans certaines situations arithmético-géométriques. Nous renvoyons notamment à [8, 116] pour des travaux prenant en compte cet aspect modéré dans le cadre de la théorie de Hodge. Même lorsque l'on s'intéresse uniquement au cas des corps, la considération de schémas plus généraux permet d'obtenir des résultats plus fins que ceux que l'on aurait obtenus en se restreignant au cadre initial. Ainsi dans le cas des corps de nombres, la possibilité de pouvoir considérer des ouverts du spectre de l'anneau des entiers permet d'obtenir des réalisations « modérées » à valeurs dans les catégories de [67].

Cela nous a conduit à donner une définition explicite des correspondances finies et des motifs de Voevodsky sur un schéma noethérien séparé. Il s'agit là d'une extension immédiate de [133] compte tenu des résultats de [125].

## Conventions

Tout au long de ce travail, nous adoptons la convention suivante.

**$S$  désigne un schéma noethérien séparé et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $S$ . Tous les schémas considérés sont supposés noethériens, séparés.**

Nous sortirons parfois, de manière anodine, de ce cadre en considérant des réunions disjointes, non nécessairement finies, de schémas pris au sens de la convention précédente. Cela sera notamment le cas dans les sections 2.2, 2.3 et 3.4. Sauf mention explicite du contraire, un  $S$ -schéma est la donnée d'un schéma au sens précédent  $X$  et d'un morphisme  $X \rightarrow S$  de schémas. Nous notons  $\text{Sch}_S$  la catégorie des  $S$ -schémas et nous désignons par  $\text{Sm}_S$  la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini.

La plupart des résultats de ce travail sont valables sans hypothèse supplémentaire sur  $S$ , mais nous aurons parfois à nous restreindre au cas où ce dernier est un corps parfait — il en sera ainsi dans les sections 4.2 à 4.5 et dans la section 5.4 — voire un corps de caractéristique nulle — section 5.3.

## Énoncés des principaux résultats

Nous rassemblons ci-après les énoncés précis des résultats principaux que nous avons obtenus dans cette thèse.

*Réalisations  $\ell$ -adiques.* — Nous avons consacré ce travail à la construction de foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques pour les motifs mixtes géométriques de V. Voevodsky. Notre résultat principal est donc le théorème 5.2.1 dont l'énoncé est le suivant.

**Théorème.** *Le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des  $S$ -schémas lisses de type fini*

$$\begin{aligned} R_\ell : \text{Sm}_S^{\text{op}} &\rightarrow \text{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ X &\mapsto R\pi_{X*}\pi_X^*\mathbb{Z}_S/\ell^*. \end{aligned}$$

*se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé tensoriel*

$$DM_{gm}(S)^{\text{op}} \longrightarrow \text{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \quad (1)$$

*Lorsque  $S$  est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le foncteur (1) induit un foncteur triangulé tensoriel*

$$DM_{gm}(S)^{\text{op}} \longrightarrow \text{D}_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell).$$

Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle. Dans [68, 69], A. Huber a construit un foncteur de réalisation prenant ses valeurs dans la catégorie triangulée tensorielle  $\text{D}_{\mathcal{MR}}$  des réalisations mixtes de [66]

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}} : DM_{gm}(k)^{\text{op}} \rightarrow \text{D}_{\mathcal{MR}}.$$

Notre construction coïncide avec la composante  $\ell$ -adique de ce foncteur et nous obtenons — proposition 5.3.1 — le résultat suivant.

**Proposition.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle. La composante  $\ell$ -adique du foncteur de réalisation mixte construit par A. Huber dans [68, 69] est canoniquement isomorphe au foncteur de réalisation obtenu au théorème précédent : il existe un isomorphisme canonique de foncteurs  $\phi$*

$$\begin{array}{ccc}
 DM_{gm}(k)^{op} & \xrightarrow{\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}} & D_{\mathcal{MR}} \\
 \downarrow R_\ell & \xrightarrow{\phi} & \downarrow \text{Projection sur la composante } \ell\text{-adique} \\
 & & D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell)
 \end{array}$$

*Réalisations  $\ell$ -adiques modérées.* — La méthode que nous avons utilisée, nous permet, dans certains cas, d’obtenir des résultats un peu plus fins. Ces derniers ont pour cadre la situation suivante :  $S$  est régulier et limite projective d’un système projectif filtrant  $\lambda \mapsto S_\lambda$  de schémas réguliers dont les morphismes de transition sont des morphismes plats affines. Nous avons vérifié — proposition 4.1.29 — une propriété de commutation aux limites projectives des motifs mixtes géométriques de Voevodsky. Cette assertion fait partie du yoga des motifs tel qu’il était envisagé par A. Grothendieck [47], l’énoncé en est le suivant :

**Proposition.** *Les catégories de motifs mixtes géométriques sont données sur  $S$  par*

$$DM_{gm}^{\text{eff}}(S) = 2\text{-colim}_\lambda DM_{gm}^{\text{eff}}(S_\lambda) \quad DM_{gm}(S) = 2\text{-colim}_\lambda DM_{gm}(S_\lambda).$$

Les catégories de coefficients  $\ell$ -adiques ne vérifient pas cette propriété de commutation aux limites projectives. Il y a donc lieu d’introduire les catégories triangulées tensorielles

$$D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-colim}_\lambda D^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \quad D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-colim}_\lambda D_c^b(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell).$$

Ces dernières sont de nature plus « modérée » ou plus « arithmétique » que les catégories originales. Lorsque l’on suppose en outre les morphismes de transition lisses, la conjonction de la proposition ci-dessus et du théorème précédent, nous permet d’obtenir le corollaire suivant — corollaire 5.2.7 — qui « raffine » la construction des réalisations  $\ell$ -adiques.

**Corollaire.** *Le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique modérée*

$$\text{Sm}_S^{\text{op}} = 2\text{-colim}_\lambda \text{Sm}_{S_\lambda}^{\text{op}} \xrightarrow{2\text{-colim}_\lambda R_\ell} 2\text{-colim}_\lambda D^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) = D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$$

*se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé tensoriel*

$$R_{md, \ell} : DM_{gm}(S)^{op} \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \quad (2)$$

*Lorsque  $\lambda \mapsto S_\lambda$  est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le foncteur (2) prend ses valeurs dans  $D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$ .*

Notre approche des réalisations utilise de manière essentielle les propriétés de la résolution de Godement des faisceaux Nisnevich avec transferts et des correspondances finies. Nous rassemblons maintenant les résultats obtenus à ce sujet.

*Correspondances finies, faisceaux avec transferts.* — Les énoncés que nous donnons maintenant ont tous un analogue pour la topologie étale, par souci de concision nous ne mentionons ici que les versions valables pour la topologie de Nisnevich. Les préfaisceaux considérés sont définis sur la catégorie des  $S$ -schémas.

Dans ce travail, nous donnons une preuve complète, valable sur une base quelconque, d'un résultat énoncé par P. Deligne [139, Exemple 6.20] concernant la résolution de Godement et ses propriétés relatives aux transferts :

**Proposition.** *Soit  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}$  la monade, de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S)$  des faisceaux Nisnevich de groupes abéliens, définissant la résolution de Godement — pour un faisceau Nisnevich de groupes abéliens  $F$ , on a*

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}}F(X) = \prod_{x \in X} F\left(\text{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,x}^h\right)\right)$$

pour tout  $S$ -schéma  $X$ .

1. (Proposition 3.4.6) Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)$  des faisceaux Nisnevich avec transferts rendant le carré suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}} \\ \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S). \end{array}$$

2. (Proposition 3.4.8) Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\text{Nis},\otimes}^{\text{tr}}$  de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\text{tr}}(S)$  des faisceaux Nisnevich avec transferts quasi-monoïdaux symétriques rendant les carrés suivants commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longleftarrow & \text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis},\otimes}^{\text{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis},\otimes} \\ \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longleftarrow & \text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S) \end{array}$$

où  $\mathcal{G}_{\text{Nis},\otimes}$  désigne la monade de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S)$  des faisceaux Nisnevich quasi-monoïdaux symétriques, induite par  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}$ .

La preuve de la proposition précédente repose sur l'existence de « transferts locaux ». Convenons, pour un  $S$ -schéma  $X$ , de noter  $X_{X,x}^h$  le spectre de l'hensélisé local de  $X$  au point  $x \in X$  et posons

$$X^h := \prod_{x \in X} X_{X,x}^h \quad (X^h)_X^n := \underbrace{X^h \times_X \cdots \times_X X^h}_{n \text{ termes}}.$$

Le résultat qui est à l'origine de l'existence de ces transferts locaux est une propriété d'acyclicité du complexe de Čech associé au  $X$ -schéma  $X^h$  — proposition 2.2.3 — qui s'inspire directement de la proposition 3.1.3 de [133]. Cette propriété s'énonce comme suit :

**Proposition.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un  $S$ -schéma local hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma_{\mathcal{O},X,n}^h : \mathbb{Z}_{\text{tr}}\left[(X^h)_X^n\right](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}\left[(X^h)_X^{n+1}\right](\mathcal{O}) \quad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

1. (Homotopie) On a pour tout  $n$  les relations

$$d_{n+1} \circ \sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\mathfrak{h}} + \sigma_{\mathcal{O}, X, n-1}^{\mathfrak{h}} \circ d_n = \text{id}.$$

2. (Fonctorialité) Étant donné un  $S$ -schéma local hensélien  $\mathcal{O}'$  et une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$  on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^n] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^n] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^n] (\mathcal{O}) \\ \downarrow \sigma_{\mathcal{O}', X, n}^{\mathfrak{h}} & & \downarrow \sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\mathfrak{h}} \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}] (\mathcal{O}). \end{array}$$

En s'aidant de la proposition précédente, nous obtenons alors l'existence d'une décomposition locale des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich, produisant les transferts locaux voulus. En notant  $\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}} : X_{X,x}^{\mathfrak{h}} \rightarrow X$  le morphisme canonique et

$$\mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} : (X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}} \rightarrow (X_x^{\mathfrak{h}}) \times_S (Y_y^{\mathfrak{h}})$$

le morphisme naturel —  $e$  étant un point du produit se projetant sur  $x$  et  $y$  —, nous obtenons la proposition :

**Proposition.** Soient  $X, Y, Z$  des  $S$ -schémas. On peut décomposer canoniquement une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  sous la forme

$$\alpha \circ [\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}}] = \sum_{y \in Y} [\iota_{Y,y}^{\mathfrak{h}}] \circ \alpha_{x,y}.$$

Ces décompositions possèdent les propriétés suivantes.

1. (Lemme 2.2.11) Étant données des correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$ , on a pour tout point  $x \in X$  et  $z \in Z$  l'égalité

$$(\beta \circ \alpha)_{x,z} = \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y}.$$

2. (Lemme 2.2.11) Soit  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. En désignant par  $g_x^{\mathfrak{h}} : X_x^{\mathfrak{h}} \rightarrow Y_{g(x)}^{\mathfrak{h}}$  le morphisme de schémas locaux henséliens déduit de  $g$ , on a

$$[g]_{x,y} = \begin{cases} [g_x^{\mathfrak{h}}] & \text{si } y = g(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. (Lemme 2.2.11) Étant donnée une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , on a l'égalité dans  $c_S(X_x^{\mathfrak{h}}, (Y_y^{\mathfrak{h}})_z^{\mathfrak{h}})$

$$(\alpha_{x,y})_{x,z} = \begin{cases} \alpha_{x,y} & \text{si } z = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout point  $x$  de  $X$  et tout point  $z$  du schéma local hensélien  $Y_y^{\mathfrak{h}}$ .

4. (Lemme 2.2.12) Soient  $X', Y'$  des  $S$ -schémas,  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  des correspondances finies. Pour tout point  $e$  de  $X \times_S Y$  et tout point  $x'$  de  $X'$  et  $y'$  de  $Y'$ , on a l'égalité

$$\left( \alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'} \right) \circ \left[ \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \right] = \sum_{\substack{e' \text{ point de } X' \times_S Y' \\ \text{se projetant sur } x' \text{ et } y'}} \left[ \mathfrak{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}} \right] \circ \left( \alpha \otimes \beta \right)_{e,e'}$$

dans  $c_S \left( (X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, (X')_{x'}^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')_{y'}^{\mathfrak{h}} \right)$ .

## Présentation détaillée

Nous donnons maintenant une description détaillée des différents chapitres composant la première partie de cette thèse.

*Chapitre 1.* — Dans ce chapitre nous rappelons de manière très détaillée la théorie des cycles algébriques relatifs développée par A. Suslin et V. Voevodsky dans [125]. Cette dernière est au coeur des travaux sur les motifs, tant ceux de V. Voevodsky [133] que ceux de M. Levine [98] et s'avère essentielle dans ce travail.

La première section de ce chapitre est introductive. Nous rappelons la définition et les propriétés essentielles des morphismes équidimensionnels ainsi que la définition des cycles relatifs. Pour cela nous précisons au début les notions de dimension relative que nous utilisons. La sous-section 1.1.3 est consacrée aux rappels des propriétés du changement de base naturel que l'on peut définir pour les « cycles plats équidimensionnels ».

Avec la section 1.2, nous revenons sur l'opération la plus fondamentale de la théorie : le changement de base des cycles relatifs. Cette opération, délicate en un certain sens, n'est pas définie pour tous les cycles et peut laisser aussi apparaître des coefficients rationnels — nous renvoyons à la remarque 1.2.27 à ce propos. Il s'agit pourtant là de la seule extension naturelle possible des changements de base plats, à savoir celui défini pour les morphismes plats et celui défini pour les « cycles plats équidimensionnels ». Afin d'éclairer cet aspect nous avons choisi d'introduire, dans la sous-section 1.2.1, la notion de préfaisceaux de cycles relatifs. Dans la section 1.2.2 nous rappelons les notions de points épais, d'épaississements et d'éclatements abstraits. Ces concepts sont centraux : on peut en effet montrer que pour qu'un cycle relatif appartienne à un préfaisceau de cycles relatifs, *i.e.* admette des changements de base éventuellement rationnels, il est nécessaire que le changement de base le long d'un point épais ne dépende pas de l'épaississement choisi — lemme 1.2.12 —, cette condition pouvant s'interpréter en terme d'éclatements abstraits. Nous avons appelé les cycles relatifs vérifiant cette condition des cycles universellement rationnels. La raison de ce choix, réside dans le résultat de [125] qui assure que cette condition est en fait suffisante pour qu'un cycle admette des changements de bases éventuellement rationnels — proposition 1.2.26. L'exposé de ce résultat et de ses conséquences fait l'objet de la sous-section 1.2.3, la suivante étant consacrée à certaines propriétés des cycles relatifs universellement rationnels ou entiers par changement de base fidèlement plat — les cycles universellement entiers étant les cycles relatifs universellement rationnels qui demeurent à coefficients entiers par tout changement de base.

Dans la section 1.3, nous reprenons le calcul, effectué dans [125], des multiplicités intervenant dans les changements de bases. Ces résultats permettent de faire le lien entre l'exposé original de la théorie donné dans *loc.cit.* et l'exposé donné par M. Levine dans les appendices de [98]. En outre ce calcul, permet de voir — corollaire 1.3.13 — que le changement de base des cycles relatifs est profondément lié à la théorie de l'intersection. En particulier il permet d'effectuer sur une classe de cycles particuliers, nombres d'opérations de la théorie de l'intersection [43] sans recourir au passage à l'équivalence rationnelle.

Ce chapitre se clôt par un exposé des principales opérations sur les cycles relatifs universellement rationnels. Il s'agit de l'image inverse, de l'image directe et des produits externes. La construction de ces derniers utilise l'opération « correspondance », dont nous rappelons la définition et les propriétés dans la sous-section 1.4.3, et qui joue un rôle fondamental dans la définition de la composition des correspondances finies. Par nature, cette opération est intimement liée à la théorie de l'intersection et constitue l'un des outils importants que nous utilisons au chapitre 2

*Chapitre 2.* — Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de correspondance finie sur une base quelconque. Hormis un survol dans [139, Appendix 1A] — l'objet de *loc.cit.* étant de développer les résultats de la théorie actuelle des motifs mixtes sur un corps — cette notion n'est disponible dans la littérature que dans le cas des corps. Naturellement l'extension aux schémas de base quelconques ne présente aucune difficulté et s'avère une simple application de la théorie générale des cycles relatifs de [125], que nous avons pris soin de rappeler dans le chapitre 1. Après avoir défini la composition des correspondances finies et donné ses propriétés élémentaires, nous abordons dans la sous-section 2.1.2, le changement de base des correspondances finies. Nous envisageons ensuite dans la section 2.1.3, le comportement par certaines limites projectives de la catégorie des schémas munis des correspondances finies. Ce résultat nous servira pour établir, au chapitre 4, la propriété analogue pour les motifs mixtes géométriques de Voevodsky — proposition 4.1.29. Cela nous permettra dans la sous-section 5.2.3 de raffiner la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique en une version de nature plus « modérée » — corollaire 5.2.7.

Avec la section 2.2, nous entrons dans le vif du sujet de cette thèse. En effet cette section est consacrée à l'étude des correspondances finies d'un point de vue local pour la topologie de Nisnevich, dont nous rappelons la définition et les principales propriétés en ouverture du chapitre 3. Les résultats obtenus demeurent valables pour la topologie étale, mais nous avons délibérément choisi de mettre l'accent sur la topologie de Nisnevich dans la mesure où les démonstrations sont analogues pour les deux topologies : les modifications à considérer dans le cadre de la topologie étale ainsi que les énoncés correspondants font l'objet de la section 2.3. Le résultat fondamental à ce sujet — la proposition 2.2.3 — est donné dans la sous-section 2.2.1. Il s'agit de l'existence d'une homotopie canonique pour certains complexes de Čech associés à la décomposition locale d'un schéma pour la topologie de Nisnevich. Ce résultat peut être vu comme un raffinement de la proposition 3.1.3 de [133] qui est à la base de beaucoup de propriétés des faisceaux Nisnevich avec transferts. Dans la sous-section 2.2.2 nous tirons les conséquences de l'existence de cette homotopie canonique, mettant ainsi en évidence une décomposition locale des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich — corollaire 2.2.7. Nous donnons les

propriétés de ces décompositions locales dont nous aurons besoin par la suite : cela comprend notamment le comportement par composition des correspondances finies — lemme 2.2.11 — ainsi que par double localisation — lemme 2.2.9. La sous-section 2.2.3 est quant à elle consacrée aux liens entre le produit tensoriel des correspondances finies et les décompositions locales obtenues précédemment.

Ces résultats sont valables pour une base quelconque ainsi que pour des schémas non lisses sur cette base. Cette généralité nous sera utile dans la suite même lorsque la base est un corps. Ainsi dans la section 5.3, notre comparaison — proposition 5.3.1 — avec le foncteur de réalisation construit par A. Huber dans [69, 68], fait intervenir des schémas non lisses.

*Chapitre 3.* — Ce chapitre s’ouvre — section 3.1 — par un rappel sur la topologie de Nisnevich [110]. La définition de cette topologie ressemble à celle de la topologie étale, mais au contraire de cette dernière, la topologie de Nisnevich possède de nombreuses propriétés en commun avec la topologie de Zariski. Ces propriétés communes ont été dégagées par différents auteurs [110, 90, 132] et se trouvent axiomatisées via le formalisme des cd-structures [132] de Voevodsky. La sous-section 3.1.1 est consacrée à un survol de ce formalisme dans le but d’éclairer les propriétés de la topologie de Nisnevich que nous utiliserons dans la suite — sous-section 3.1.2.

La section 3.2 est centrée autour des notions de préfaisceaux avec transferts et de faisceaux Nisnevich et étales avec transferts, dont nous rappelons la définition au début de la sous-section 3.2.1, avant de préciser la structure de préfaisceau avec transferts dont sont munis les préfaisceaux de cycles algébriques fournis par la théorie des cycles relatifs — lemme 3.2.2. Le reste de cette sous-section a pour objet de développer les propriétés de base de la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts qui demeurent valables pour un schéma de base quelconque. Bien que dans [133], les énoncés aient toujours pour schéma de base un corps, la plupart des démonstrations se généralisent sans problèmes. En particulier — corollaire 3.2.10 —, la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts est une catégorie abélienne de Grothendieck complète et cocomplète. Dans la sous-section 3.2.2, nous explicitons les structures monoïdales dont sont munies naturellement la catégorie des préfaisceaux avec transferts ainsi que les catégories des faisceaux Nisnevich et étales avec transferts. La sous-section 3.2.3 est consacrée à une exposition détaillée des résultats de A. Suslin et V. Voevodsky [123, 128] concernant les liens entre transferts et h-topologie. Dans le but de justifier pleinement notre construction du chapitre 5, nous avons détaillé certaines questions de fonctorialité qui permettent d’obtenir notamment l’assertion suivante qui est centrale dans *loc. cit.* : sur un schéma de base quelconque les h-faisceaux en groupes abéliens ont une structure canonique de préfaisceaux avec transferts — corollaire 3.2.19.

Avec la section 3.3, notre but est de détailler les principales propriétés de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts. Dans un premier temps — sous-section 3.3.1 —, nous rappelons les conséquences du théorème de finitude de la dimension cohomologique Nisnevich [90] de K. Kato et S. Saïto ainsi que les conséquences de la généralisation à la topologie de Nisnevich du théorème de Brown-Gersten [132]. En particulier, on voit au lemme 3.3.5 qu’il existe une « présentation » particulièrement agréable de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. Cette présentation, tout comme dans [133], permet de faire le lien — proposition 4.1.23 — entre l’approche faisceautique des motifs mixtes — sous-section 4.1.1 —



et l'approche géométrique — sous-section 4.1.2. Dans la sous-section 3.3.2, nous reprenons la construction du produit tensoriel dérivé des faisceaux Nisnevich avec transferts de [124] en remarquant qu'elle est valable pour un schéma de base quelconque. Nous détaillons ensuite les propriétés — implicites dans la littérature — de ce produit tensoriel ainsi que celles du Hom interne.

Dans la section 3.4, après un rappel sur la résolution de Godement et sa structure multiplicative, nous appliquons les résultats obtenus dans le chapitre 2 aux faisceaux Nisnevich avec transferts — sous-section 3.4.2 — ainsi qu'aux faisceaux étales avec transferts — sous-section 3.4.3. Nous obtenons ainsi que la résolution de Godement d'un faisceau Nisnevich ou étale avec transferts est canoniquement munie de transferts — propositions 3.4.6 et 3.4.11. Nous prouvons de plus que, structure multiplicative de la résolution de Godement, transferts canoniques et produit tensoriel des correspondances finies, sont compatibles — propositions 3.4.8 et 3.4.12. Ce résultat nous permettra au chapitre 5 de prouver que le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique construit est tensoriel — lemme 5.2.4.

*Chapitre 4.* — Nous tenons principalement dans la première section à préciser les définitions des catégories de motifs que nous utilisons. En effet dans le texte de référence [133], le schéma de base considéré est un corps et pour les besoins de la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato, les constructions sont étendues à des schémas simpliciaux lisses sur un corps dans [137]. Notre approche nous permettant notamment d'obtenir des foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques pour les motifs mixtes géométriques sur un schéma noethérien séparé, il nous a paru nécessaire, faute d'une définition explicite dans la littérature, de mettre en évidence les définitions des motifs que nous considérons. Bien entendu, la plupart des résultats de [133] sont valables plus généralement sur un schéma de base quelconque, bien qu'il y ait parfois lieu de faire certaines modifications mineures<sup>(1)</sup>. En particulier dans la définition des motifs mixtes géométriques, dont il ne semble pas y avoir de définition dans la littérature en dehors du cas des corps, on ne peut se contenter de localiser par rapport à la topologie de Zariski que l'on doit remplacer par la topologie de Nisnevich — la raison pour laquelle sur un corps parfait, le choix de l'une ou de l'autre, ne fait aucune différence, réside dans le théorème 3.1.12 de [133] qui assure que pour un faisceau Nisnevich avec transferts invariant par homotopie sur un corps parfait les cohomologies Zariski et Nisnevich coïncident. La sous-section 4.1.3 est consacrée au seul résultat original de ce début de chapitre. Il s'agit de l'extension aux catégories de motifs mixtes géométriques, des propriétés démontrées dans le chapitre 2 pour la catégorie des schémas lisses munis des correspondances finies. On obtient ainsi un résultat — proposition 4.1.29 — donnant le comportement des catégories de motifs mixtes géométriques par rapport à certaines limites projectives de schémas.

Dans le reste du chapitre 4, nous nous intéressons aux motifs sur le spectre d'un corps parfait : les résultats obtenus seront appliqués dans la section 5.4.

---

<sup>(1)</sup>Nous renvoyons à la note du bas de la page 157 pour un certain nombre de restrictions importantes mais qui n'interviennent pas dans cette thèse.

Dans la section 4.2, nous rappelons la construction de l'isomorphisme entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs de Bloch obtenu par V. Voevodsky dans [136]. Nous détaillons certaines propriétés — implicites dans la littérature — de cet isomorphisme et notamment la compatibilité entre le produit d'intersection et le cup-produit. Ces propriétés nous seront utiles pour donner dans la suite une description naïve de l'isomorphisme de Voevodsky — proposition 4.5.15.

Dans la section 4.4, nous donnons les propriétés des morphismes de Gysin en cohomologie motivique suivant en cela les constructions faites par M. Levine pour les motifs mixtes qu'il a construits dans [98]. Ces résultats ont été obtenus indépendamment par F. Déglise [33]. Ces constructions nous permettent, dans la section 4.5, de donner une construction naïve d'un morphisme classe de cycle en cohomologie motivique dont nous étudions les propriétés. Nous montrons — sous-section 4.5.3 — que ce morphisme coïncide avec l'isomorphisme de Voevodsky dont nous avons rappelé la construction dans la section 4.2. Cette description naïve nous sera utile pour vérifier la proposition 5.4.8.

*Chapitre 5.* — Dans ce chapitre, nous donnons la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique qui est le résultat principal de cette thèse. La section 5.1 n'est pas nécessaire à la construction de ce foncteur, nous l'avons incluse dans le seul but d'éclairer ou de justifier le point de vue que nous avons adopté. La sous-section 5.1.1 est consacrée à un rappel sur les correspondances cohomologiques [6]. Nous introduisons ensuite — sous-section 5.1.2 — un analogue en cohomologie  $\ell$ -adique des correspondances finies. L'avantage de ces correspondances cohomologiques finies est de pouvoir se composer, ce qui permet dans la sous-section 5.1.3 de définir un analogue  $\ell$ -adique des motifs de Chow (les schémas lisses non projectifs pouvant cependant être pris en compte via la cohomologie à support compact). Ces considérations permettent, lorsque le schéma de base est un corps, de prolonger le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des schémas lisses aux schémas lisses munis des correspondances finies et de donner un foncteur de réalisation pour les motifs de Chow — corollaire 5.1.9. Ce genre de construction ne permet pas d'étendre le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des motifs purs aux motifs mixtes, pour lesquels il s'avère nécessaire de pouvoir travailler avec un « bon modèle à homotopie près ». Ceci constitue la raison pour laquelle nous avons choisi de travailler avec la résolution de Godement et d'étudier ses propriétés relatives aux transferts. Ce besoin de considérer un « bon modèle à homotopie près » explique aussi la raison pour laquelle nous utilisons la catégorie de coefficients  $\ell$ -adiques construite par T. Ekedahl dans [35] plutôt que celle introduite par P. Deligne dans [30].

Avec la section 5.2 nous revenons à des schémas de base quelconques. Cette dernière contient les résultats principaux de cette thèse — théorème 5.2.1 et corollaire 5.2.7. Nous exposons dans la sous-section 5.2.2, la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique, le résultat principal étant le théorème 5.2.1. En utilisant les résultats sur les limites projectives de la sous-section 4.1.3, nous raffinons, dans la sous-section 5.2.3, la construction précédente pour obtenir un foncteur de réalisation de nature plus « arithmétique » — corollaire 5.2.7. On remarquera que pour ce corollaire, nous sommes contraint d'ajouter certaines hypothèses de régularité, conformément aux résultats du chapitre 4.

La comparaison — proposition 5.3.1 — entre le foncteur de réalisation que nous avons construit et la composante  $\ell$ -adique du foncteur de réalisation construit par A. Huber dans [69, 68], fait l'objet de la section 5.3. Nos hypothèses sont celles de *loc.cit.* et les schémas de base considérés dans cette section sont donc les spectres de corps de caractéristique nulle. Avec la sous-section 5.3.1, nous rappelons la définition et les propriétés élémentaires de la transposition des morphismes finis équidimensionnels. Nous avons besoin de ces rappels dans la sous-section 5.3.2, lorsque nous démontrons la proposition 5.3.18. Ce résultat nous permet, dans la sous-section 5.3.3, de ramener, après « dévissage », la comparaison cherchée à la vérification de certaines propriétés d'invariance sous Galois de la résolution de Godement — lemme 5.3.23.

Ce chapitre se termine par la section 5.4, dans laquelle nous montrons — proposition 5.4.8 — que le foncteur de réalisation que nous construisons s'avère, dans un certain sens, compatible avec les classes de cycles en cohomologie  $\ell$ -adique construites par A. Grothendieck [29, 6, 70] pour les groupes de Chow et étendues par S. Bloch, T. Geisser et M. Levine [14, 45] pour les groupes de Chow supérieurs. Cette compatibilité repose sur les résultats faisant l'objet du chapitre 4 et en particulier sur la description naïve que nous avons donnée — sous-section 4.5.3 — de l'isomorphisme dû à Voevodsky [136] entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs de Bloch.



# CHAPITRE 1

## CYCLES ALGÈBRIQUES RELATIFS

Nous consacrons ce chapitre introductif à un exposé de la théorie des cycles algébriques relatifs développée dans [125] par A. Suslin et V. Voevodsky. Cette théorie s'avère essentielle dans ce travail : elle se trouve au coeur de la construction des motifs mixtes de [133] et nous en utilisons la plupart des résultats aux chapitre 2 lorsque nous étudions les correspondances finies — une classe particulière de cycles relatifs — localement pour les topologies de Nisnevich et étale.

### 1.1. Cycles relatifs

Après un bref rappel précisant la notion de dimension relative que nous utilisons et les propriétés des morphismes équidimensionnels, nous introduisons dans cette section les cycles relatifs ainsi que le changement de base des cycles équidimensionnels plats.

**1.1.1. Dimension relative.** — Nous reprenons la définition utilisée par W. Fulton dans le chapitre 20 de [43] lorsqu'il esquisse une généralisation de la théorie de l'intersection sur une base régulière. Nous appellerons ainsi dimension relative d'un  $S$ -schéma intègre  $X$  l'entier

$$\dim_S(X) = \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(x) - \dim(\mathcal{O}_{S,s})$$

où  $x$  désigne le point générique de  $X$  et  $s$  son image dans  $S$ . Plus généralement nous prenons, pour définition de la dimension relative d'un  $S$ -schéma  $X$ , la borne supérieure des dimensions relatives de ses composantes irréductibles munies de leur structure réduite.

*Remarque 1.1.1.* Soit  $X$  est un  $S$ -schéma intègre de point générique  $x$ . Lorsque  $X$  domine une composante irréductible de  $S$  de point générique  $s$ , l'anneau  $\mathcal{O}_{S,s}$  est artinien donc de dimension nulle. On a donc

$$\dim_S(X) = \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(x)$$

et la dimension de  $X$  sur  $S$  est donc égale à la dimension de la fibre générique de  $X$ .

**Lemme 1.1.2.** *On suppose  $S$  universellement caténaire. Soient  $X$  un  $S$ -schéma de type fini intègre et  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$ , alors*

$$\dim_S(X) = \dim_S(Z) + \operatorname{codim}(Z, X).$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $x$  le point générique de  $X$  et  $z$  celui de  $Z$  ainsi que  $s, t$  leurs images respectives sur  $S$ . La proposition 5.6.5 de [54] nous donne alors

$$\deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(x) + \operatorname{codim}(\overline{\{t\}}, \overline{\{s\}}) = \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(t)} \kappa(z) + \operatorname{codim}(W, Z). \quad (3)$$

Sachant que  $S$  est universellement caténaire, on a  $\operatorname{codim}(\overline{\{t\}}, \overline{\{s\}}) = \dim(\mathcal{O}_{S,t}) - \dim(\mathcal{O}_{S,s})$  ce qui permet de réécrire l'égalité (3) sous la forme

$$\dim_S(X) = \dim_S(Z) + \operatorname{codim}(Z, X)$$

ce que nous souhaitons.  $\square$

**Lemme 1.1.3.** *On suppose  $S$  universellement caténaire. Soient  $T$  un  $S$ -schéma de type fini et  $X$  un  $T$ -schéma de type fini, alors*

$$\dim_S(X) = \dim_T(X) + \sup_W \dim_S(W) \quad (4)$$

la borne supérieure étant prise sur les composantes irréductibles de  $T$  contenant l'image d'un point maximal de  $X$ . En particulier

$$\dim_S(X) \leq \dim_T(X) + \dim_S(T).$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que  $W$  soit une composante irréductible de  $X$  de point générique  $w$  et choisissons une composante irréductible  $Z$  de  $T$  contenant l'image  $t$  de  $w$  dans  $T$ , alors le résultat précédent assure que

$$\operatorname{codim}(\overline{\{t\}}, Z) = \dim_S(Z) - \dim_S(\overline{\{t\}}) = \dim_S(Z) - \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(t) + \dim(\mathcal{O}_{S,s})$$

où  $s$  désigne l'image de  $t$  dans  $S$ . Cela donne

$$\begin{aligned} \dim_S(W) &= \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(w) - \dim(\mathcal{O}_{S,s}) = \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(t)} \kappa(w) + \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(s)} \kappa(t) - \dim(\mathcal{O}_{S,s}) \\ &= \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(t)} \kappa(w) - \operatorname{codim}(\overline{\{t\}}, Z) + \dim_S(Z) \end{aligned}$$

et il suffit de passer aux bornes supérieures pour obtenir (4).  $\square$

Dans ce travail nous utilisons la définition suivante. Nous espérons qu'elle n'entraîne aucune confusion par rapport à une terminologie déjà existante.

**Définition 1.1.4.** Un morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  est maximal lorsque toute composante irréductible de  $T$  domine une composante irréductible de  $S$

On remarquera que d'après la seconde assertion du corollaire 2.3.5 de [54], les morphismes ouverts, donc à fortiori plats, sont maximaux au sens de la définition précédente. D'autre part, la démonstration de la seconde assertion de la proposition 2.3.7 de *loc.cit.* nous donne plus généralement le résultat suivant.

**Lemme 1.1.5.** *On se donne un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\theta} & S \end{array} \quad (5)$$

et on suppose que les morphismes  $\pi$  et  $\theta$  sont maximaux. Alors toute composante irréductible de  $Y$  qui domine une composante irréductible de  $T$  domine aussi une composante irréductible de  $X$ .

DÉMONSTRATION. — Vu la nature de l'énoncé, on peut supposer que les schémas apparaissant dans le carré cartésien (5) sont réduits. Soient  $W$  une composante irréductible de  $Y$  dominant une composante irréductible de  $T$  et  $w$  son point générique. Notons respectivement  $x$  l'image de  $w$  dans  $X$ ,  $t$  l'image de  $w$  dans  $T$  et  $s$  leur image commune dans  $S$ . Considérons les schémas  $Y'$  et  $Y''$  définis par les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Y'' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ & \square & Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_{T,t}) & \longrightarrow & T & \longrightarrow & S \end{array}$$

Au niveau des espaces topologiques sous-jacents, on peut voir  $Y'$  comme un sous-espace de  $Y$  dont les points maximaux sont les points maximaux de  $Y$  dont l'image dans  $X$  est une générisation de  $x$  et  $Y''$  comme un sous-espace de  $Y$  dont les points maximaux sont les points maximaux de  $Y$  dont l'image dans  $X$  est une générisation de  $x$  et l'image dans  $T$  une générisation de  $t$ . En particulier  $w$  est un point maximal de  $Y''$  et on se trouve ramené à considérer le cas particulier du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y'' & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_{T,t}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}). \end{array}$$

Par hypothèse  $s$  est maximal dans  $S$  ce qui entraîne que  $\mathcal{O}_{S,s}$  est un corps et donc que le morphisme de  $Y''$  dans le spectre de  $\mathcal{O}_{X,x}$  est plat. Les morphismes plats étant maximaux, cela nous assure finalement que  $x$  est un point maximal du spectre de  $\mathcal{O}_{X,x}$  et le lemme se trouve ainsi prouvé.  $\square$

**Lemme 1.1.6.** *Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme maximal et  $X$  un  $S$ -schéma intègre de dimension  $n$  sur  $S$ . Alors les composantes irréductibles de  $X_T$  dominant une composante irréductible de  $T$  sont de dimension  $n$  sur  $T$ .*

DÉMONSTRATION. — Fixons une composante irréductible  $Z$  de  $X_T$  dominant une composante irréductible de  $T$  et notons  $z$  son point générique. On sait par le lemme 1.1.5 que  $Z$  domine  $X$ . En particulier le point générique  $t$  de la composante irréductible dominée par  $Z$  s'envoie sur l'image  $s$  du point générique de  $X$ . Nos hypothèses entraînent alors que  $X_s$  est un schéma intègre de dimension  $n$  et donc que

$$(X_T)_t = \text{Spec}(\kappa(t)) \times_{\text{Spec}(\kappa(s))} X_s$$

est un schéma équidimensionnel de dimension  $n$ . La dimension de  $Z$  sur  $T$  étant égale à la dimension de la composante irréductible de  $(X_T)_t$  de point générique  $z$ , cela assure que  $Z$  est de dimension  $n$  sur  $T$ .  $\square$

*Remarque 1.1.7.* Lorsque  $\theta : T \rightarrow S$  est un morphisme surjectif, on peut remarquer que toute composante irréductible de  $S$  est dominée par une composante irréductible de  $T$ . De manière plus

précise une composante irréductible de  $S$  de point générique  $s$  est dominée par les composantes irréductibles de  $T$  qui rencontrent la fibre  $X_s$ . En effet si  $t$  une généralisation d'un point de la fibre  $X_s$  le fermé irréductible  $\overline{\{\theta(t)\}}$  contient  $s$ . Ce dernier étant maximal  $\overline{\{\theta(t)\}} = \overline{\{s\}}$  ce qui donne bien  $\theta(t) = s$ .

Nous allons maintenant rappeler la notion d'équidimensionalité des morphismes de schémas due à Grothendieck [55, §13]. Étant donné un  $S$ -schéma de type fini  $X$ , on peut considérer la fonction sur  $X$  à valeurs entières  $\dim(X/S)$  qui à un point  $x$  de  $X$  ayant pour image  $s$  dans  $S$  associe

$$\dim(X/S)(x) = \dim_x(X_s)$$

le second membre étant la dimension en  $x$  de la fibre  $X_s$  [53, déf. 14.1.2]. L'un des résultats fondamentaux concernant cette fonction est le théorème de semi-continuité de Chevalley [55, thm 13.1.3] qui assure que cette fonction est semi-continue supérieurement.

*Notation 1.1.8.* Supposons que  $X$  soit un  $S$  schéma de type fini et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas. Dans la suite, il sera commode de désigner par  $\theta_X$  le morphisme de  $S$ -schémas s'insérant dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{\theta_X} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\theta} & S. \end{array}$$

**Lemme 1.1.9.** Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas, alors on a

$$\dim(T \times_S X/T) = \dim(X/S) \circ \theta_X.$$

DÉMONSTRATION. — Notons pour simplifier  $Y$  le schéma  $T \times_S X$  et fixons un point  $y$  de  $Y$ . Désignons par  $x$  l'image de  $y$  dans  $X$  et par  $t, s$  les images de  $y, x$  sur  $T$  et  $S$ . On dispose du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y_t & \xrightarrow{\tau} & X_s \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec}(\kappa(s)) & \longrightarrow & \text{Spec}(\kappa(t)). \end{array}$$

Le morphisme  $\tau$  étant plat, il est à fortiori maximal et d'après le corollaire 4.2.8 de [54], chaque composante irréductible de  $Y_t$  a la même dimension que la composante irréductible de  $X_s$  qu'elle domine. On en déduit que

$$\dim_y(Y_t) = \dim_x(X_s). \quad (6)$$

En effet, dire qu'une composante irréductible  $W$  de  $Y_t$  intercepte un ouvert  $V$  contenant  $y$  revient à dire que son point générique appartient à  $V$ , donc que le point générique de la composante irréductible de  $X_s$  dominée par  $Z$  intercepte l'ouvert image de  $V$ , autrement dit que  $Z$  intercepte ce même ouvert. On a donc

$$\dim(V) = \dim(\tau(V))$$

et pour un ouvert  $U$  de  $X_s$

$$\dim(U) = \dim(\tau^{-1}(U))$$



En passant aux bornes inférieures on obtient l'égalité (6) que l'on peut réécrire par définition sous la forme

$$\dim(X/S)(x) = \dim(Y/T)(y)$$

ce qui prouve notre assertion.  $\square$

**Définition 1.1.10.** Un  $S$ -schéma  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  (resp. équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ ) lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites

1.  $X$  est de type fini sur  $S$ .
2. Toute composante irréductible de  $X$  domine une composante irréductible de  $S$  autrement dit le morphisme structural de  $X$  est maximal,
3. La fonction  $\dim(X/S)$  est localement constante (resp. constante égale à  $n$ ).

La proposition 13.3.1 de [55] fournit une caractérisation classique des morphismes équidimensionnels. L'énoncé en est le suivant.

**Lemme 1.1.11.** Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ ,
2. pour tout point  $x$  de  $X$  il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et une factorisation de la forme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{q} & \mathbb{A}_S^r \\ & \searrow \pi_{U/S} & \downarrow \text{projection} \\ & & S \end{array}$$

où  $q$  est un morphisme quasi-fini maximal.

3.  $X$  est maximal sur  $S$  à fibres équidimensionnelles de dimension  $n$ .

*Remarque 1.1.12.* Pour qu'un  $S$ -schéma  $X$  soit équidimensionnel de dimension  $n$  sur  $S$ , il faut et il suffit que ses composantes irréductibles munies de la structure réduite le soient. En outre un tel schéma est alors de dimension relative  $n$  sur  $S$ .

En général la notion d'équidimensionalité n'est pas stable par changement de base. D'après le lemme 1.1.9, la raison en est que les morphismes maximaux ne sont eux mêmes pas stables par changement de base. A cet égard, on dispose tout de même du critère de Chevalley [55, cor 14.4.4] qui assure que les schémas équidimensionnels sur les schémas géométriquement unibranches sont universellement ouverts donc universellement maximaux. Ce dernier est spécifique aux morphismes équidimensionnels au sens où il fait intervenir de manière cruciale le fait que la fonction  $\dim(X/S)$  soit localement constante. Les morphismes maximaux sur les schémas géométriquement unibranches ne sont pas nécessairement ouverts.

Pour les besoins du lemme suivant, nous considérons le schéma vide comme équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  pour tout entier  $n$ . On dispose ainsi du résultat suivant :

**Lemme 1.1.13.** Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas.

1. Si  $\theta$  est plat et que toute composante irréductible de  $X$  domine une composante irréductible de  $S$ , alors toute composante irréductible de  $T \times_S X$  domine une composante irréductible de  $T$ . La réciproque est vraie lorsque  $\theta$  est plat et surjectif.

2. Si  $\theta$  est plat et que  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  (resp. équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ ) alors  $T \times_S X$  est équidimensionnel sur  $T$  (resp. équidimensionnel sur  $T$  de dimension  $n$ ). La réciproque est vraie lorsque  $\theta$  est plat surjectif.
3. Si  $S$  est géométriquement unibranche et que  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  (resp. équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ ) alors  $T \times_S X$  est équidimensionnel sur  $T$  (resp. équidimensionnel sur  $T$  de dimension  $n$ ).

DÉMONSTRATION. — (1). La première implication n'est autre qu'une conséquence du lemme 1.1.5 et du corollaire 2.3.5 de [54] qui assure que les morphismes plats sont maximaux donc universellement maximaux. Supposons maintenant  $\theta$  plat surjectif. Donnons nous une composante irréductible de  $X$  et notons  $x$  son point générique. D'après la remarque 1.1.7, il existe un point maximal  $y$  de  $X_T$  ayant  $x$  pour image. Or par hypothèse l'image de  $y$  dans  $T$  est le point générique d'une composante irréductible de  $T$  et l'image de ce dernier par le morphisme plat  $\theta$  est aussi le point générique d'une composante irréductible de  $S$ . On voit ainsi que l'image de  $x$  dans  $S$  est le point générique d'une composante irréductible de  $S$ , autrement dit que toute composante irréductible de  $X$  domine une composante irréductible de  $S$ .

(2). La première implication n'est autre que la proposition 13.3.8 de [55]. Réciproquement supposons  $\theta$  plat et surjectif. On sait déjà par la proposition 2.7.1 de [54] que  $X$  est de type fini sur  $S$ . Par ailleurs ce qui précède entraîne que chaque composante irréductible de  $X$  domine une composante irréductible de  $S$ . Le reste de l'assertion découle alors du lemme 1.1.9.

(3). Comme  $S$  est géométriquement unibranche, le critère de Chevalley assure que  $X$  est universellement ouvert sur  $S$ , en particulier universellement maximal et l'assertion résulte de la formule du lemme 1.1.9.  $\square$

**Lemme 1.1.14.** *Soit  $X$  un schéma plat sur  $S$  équidimensionnel de dimension  $n$ . Pour tout point  $w$  de  $X$  maximal dans sa fibre et toute factorisation*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{q} & \mathbb{A}_S^n \\ & \searrow & \downarrow \text{projection} \\ & & S \end{array}$$

$\pi_{U/S}$

où  $q$  est un morphisme quasi-fini maximal et  $U$  un voisinage ouvert de  $w$ , il existe un voisinage ouvert de  $w$  sur lequel le morphisme  $q$  soit plat.

DÉMONSTRATION. — Notons  $v$  l'image de  $w$  dans  $\mathbb{A}_S^n$  et  $s$  sa projection sur  $S$ . Désignons par  $W$  l'adhérence de  $w$  dans sa fibre ainsi que  $V$  l'adhérence de  $v$  dans sa fibre. Par hypothèse  $\mathcal{O}_{X,w}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module plat, en appliquant le corollaire 5.9 de l'exposé IV de [1] aux morphismes d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, v} \rightarrow \mathcal{O}_{X,w}$$

il suffit de voir que  $\mathcal{O}_{X,w}/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{X,w}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, v}/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, v}$ -module plat. Ce dernier étant l'anneau local de la fibre  $\mathbb{A}_k^n(s)$  au point  $v$ , il suffit de voir que  $v$  est le point générique de cette fibre. En utilisant le corollaire 5.6.5 de [54] et le fait que  $q$  est quasi-fini, on obtient

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Comme  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  et que  $w$  est maximal dans sa fibre,  $W$  est de dimension  $n$ . Sachant que la fibre  $\mathbb{A}_{\kappa(s)}^n$  est équidimensionnelle de dimension  $n$ , l'inégalité précédente entraîne que  $V$  est aussi de dimension  $n$  et donc que  $v$  est le point générique de cette fibre.  $\square$

**Lemme 1.1.15.** *Soient  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme ouvert de  $S$ -schémas et  $d$  un entier positif. On suppose  $S$  universellement caténaire et  $Y$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le schéma  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n + d$ .*
2. *Le morphisme  $p$  est équidimensionnel de dimension  $d$ .*

DÉMONSTRATION. — Les morphismes équidimensionnels étant stables par composition, la seconde assertion entraîne la première. Réciproquement supposons que la première assertion soit satisfaite. Comme  $p$  est ouvert donc à fortiori maximal, il suffit de voir que les fibres non vides du morphisme  $p$  sont équidimensionnelles de dimension  $d$ . Fixons un point  $y$  de  $Y$  tel que la fibre  $X_y$  soit non vide ainsi qu'une composante irréductible  $Z$  de cette dernière. Choisissons un point fermé  $x$  de  $Z$  n'appartenant à aucune autre composante irréductible de  $X_y$ . Par la formule des dimensions du théorème 14.2.1 de [55] on a

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)).$$

Le choix du point  $x$  assure que

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)) = \dim(Z).$$

Par ailleurs le lemme 1.1.2 assure que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) &= n - \dim_S(\overline{\{y\}}) \\ \dim(\mathcal{O}_{X,x}) &= n + d - \dim_S(\overline{\{x\}}). \end{aligned}$$

Comme  $x$  est un point fermé dans sa fibre, l'extension  $\kappa(x)/\kappa(y)$  est finie donc de degré de transcendance nul, ce qui entraîne que

$$\dim_S(\overline{\{x\}}) = \dim_S(\overline{\{y\}}).$$

On en déduit finalement que  $Z$  est de dimension  $d$  et donc que la seconde assertion est satisfaite.  $\square$

*Remarque 1.1.16.* Soient  $X$  un  $S$ -schéma équidimensionnel de dimension  $n$  sur  $S$ . On suppose que le morphisme structural de  $X$  admet une factorisation de la forme

$$X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} S$$

où  $p$  est un morphisme propre et surjectif et  $q$  un morphisme ayant au moins une fibre de dimension  $n$ . Alors  $q$  est équidimensionnel de dimension  $n$  et le morphisme  $p$  est fini au point générique de  $Y$

**1.1.2. Cycles relatifs.** — Un cycle algébrique sur un  $S$ -schéma  $X$  est une combinaison linéaire formelle

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i] \quad (7)$$

de sous-schémas fermés intègres  $Z_i$  de  $X$ . Nous notons  $Z(X)$  le groupe abélien formé par les cycles algébriques sur  $X$ .

*Notation 1.1.17.* Soient  $\alpha$  un cycle algébrique sur un  $S$ -schéma  $X$  et  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Nous désignons par  $m(Z, \alpha)$  la multiplicité de  $Z$  dans  $\alpha$ , autrement dit le coefficient de  $[Z]$  dans  $\alpha$ .

Les cycles algébriques sont naturellement fonctoriels par rapport aux morphismes plats : l'image inverse du cycle (7) par un morphisme plat de  $S$ -schémas  $p : Y \rightarrow X$  étant donnée par

$$p^* \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Y \times_X Z_i].$$

Nous utiliserons dans la suite sans cesse la remarque suivante.

*Remarque 1.1.18.* L'image inverse des cycles algébriques par un morphisme plat et surjectif est un monomorphisme.

Rappelons que l'image inverse par un morphisme étale est particulièrement simple. On dispose en effet du résultat suivant.

*Remarque 1.1.19.* Supposons que  $p : Y \rightarrow X$  soit un morphisme étale de  $S$ -schémas et considérons le cycle (7). Comme le morphisme  $p$  est étale, les schémas  $W_i = Y \times_X Z_i$  sont réduits et les points génériques de  $W_i$  sont les points dont l'image par  $p$  coïncide avec le point générique de  $Z_i$ . En particulier en notant  $z_i$  le point générique de  $Z_i$ , on voit que l'image inverse de  $\alpha$  est donnée par la formule

$$p^* \alpha = \sum_{i=1}^r \sum_{y \in p^{-1}(z_i)} \alpha_i [\overline{\{y\}}].$$

Le schéma  $X$  n'étant pas de type fini sur  $S$ , nous aurons besoin en pratique de considérer une classe plus restreinte de cycles. Nous adoptons ainsi la

**Définition 1.1.20.** Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Nous dirons qu'un cycle algébrique de la forme (7) est de type fini sur  $S$  lorsque les sous-schémas fermés  $Z_i$  sont de type fini sur  $S$ . Nous notons  $Z_S(X)$  le groupe abélien formé par les cycles algébriques de type fini sur  $S$ .

Un tel cycle sera dit de dimension  $n$  sur  $S$  lorsque les  $Z_i$  sont tous de dimension relative  $n$  sur  $S$ . Cela munit le groupe des cycles algébriques  $Z_S(X)$  d'un  $S$ -schéma  $X$  d'une graduation relative

$$Z_S(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Z_S(X, n)$$

où  $Z_S(X, n)$  est le sous-groupe formé par les cycles de dimension  $n$  sur  $S$ .

**Définition 1.1.21.** Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Le groupe  $Z(X/S)$  des cycles relatifs sur  $X$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  qui sont de type fini sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ .

Lorsque  $\alpha$  est un cycle relatif, nous omettrons parfois de mentionner dans la suite que les sous-schémas fermés intègres de  $X$  dont il est combinaison linéaire sous tous supposés de type fini conformément à la définition précédente.

La graduation relative précédente induit sur  $Z(X/S)$  une structure de groupe abélien gradué

$$Z(X/S) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Z(X/S, n).$$

Dans la suite, nous notons  $C(X/S, n)$  le sous-groupe de  $Z(X/S, n)$  formé des cycles dont le support est propre sur  $S$ .

**Définition 1.1.22.** Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas,  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha \in Z(X/S, n)$ . Nous dirons que le changement de base à la Serre de  $\alpha$  le long de  $\theta$  est défini lorsque pour tout sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  dont la multiplicité dans  $\alpha$  est non nulle, les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1.  $Z$  est de Tor-dimension finie sur  $S$ .
2. Chaque composante irréductible de  $Z_T$  domine une composante irréductible de  $T$  et est de dimension  $n$  sur  $T$ .

Supposons que  $Z$  soit un sous-schéma fermé intègre de  $X$  qui soit de type fini sur  $S$  et de dimension  $n$  sur  $S$ . Lorsque  $Z$  satisfait les deux conditions de la définition précédente, il devient possible définir un élément  $\theta^\circledast[Z]$  de  $Z(X_T/T, n)$  en posant

$$\begin{aligned} \theta^\circledast[Z] &= \sum_W \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_T, w}} \left( (L\theta_X^*(\mathcal{O}_Z))_w \right) [W] \\ &= \sum_W \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_T, w}} \left( (L^i\theta_X^*(\mathcal{O}_Z))_w \right) \right) [W] \end{aligned}$$

la somme étant prise sur les composantes irréductibles  $W$  de  $Z_T$  de point générique  $w$ . Plus généralement si  $\alpha$  est un cycle relatif sur  $X$  de dimension  $n$  vérifiant les conditions de la définition 1.1.22, on peut définir par linéarité un élément  $\theta^\circledast\alpha$  de  $Z(X_T/T, n)$  en posant

$$\theta^\circledast\alpha = \sum_Z m(Z, \alpha) \theta^\circledast[Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$ . On voit donc par définition que la multiplicité dans  $\theta^\circledast\alpha$  d'un sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $X_T$  de dimension  $n$  sur  $T$  et de point générique  $w$  est donnée par la somme

$$m(W, \theta^\circledast\alpha) = \sum_Z m(Z, \alpha) \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_T, w}} \left[ (L\theta_X^*(\mathcal{O}_Z))_w \right]$$

prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$  pour lesquels  $W$  est une composante irréductible de  $Z_T$ .

*Remarque 1.1.23.* Nous pouvons aussi définir aussi le changement de base d'un élément  $\alpha$  de  $Z(X/S, n)$  par un morphisme plat  $\theta : T \rightarrow S$  en posant

$$\theta^\circledast\alpha = \theta_X^*\alpha = \sum_Z m(Z, \alpha) [Z_T].$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$ . On remarquera qu'il s'agit simplement du cycle obtenu par image inverse le long du morphisme plat  $\theta_X$ . Les morphismes plats étant maximaux, les lemmes 1.1.5 et 1.1.6 nous assurent que l'on obtient ainsi un cycle relatif  $\theta^\circ\alpha \in Z(X_T/T, n)$ . Naturellement lorsque  $\alpha$  satisfait les conditions de la définition 1.1.22, le changement de base plat coïncide avec la formule donnée précédemment.

L'associativité des « multiplicités d'intersection » de Serre garantit la functorialité de cette définition. Autrement dit lorsque  $\vartheta : T' \rightarrow T$  et  $\theta : T \rightarrow S$  sont des morphismes de schémas et  $\alpha \in Z(X/S, n)$  est un cycle relatif tel que  $\theta^\circ\alpha$  et  $\vartheta^\circ(\theta^\circ\alpha)$  soient définis, alors  $(\theta \circ \vartheta)^\circ\alpha$  est défini et

$$(\theta \circ \vartheta)^\circ\alpha = \vartheta^\circ(\theta^\circ\alpha).$$

*Remarque 1.1.24.* Lorsque  $S$  est un schéma régulier la première condition de la définition 1.1.22 se trouve satisfaite pour tout les cycles relatifs, mais il n'en va pas de même de la seconde puisque en général les morphismes maximaux ne sont pas stables par changement de base.

Les cycles algébriques relatifs ont l'avantage sur les cycles quelconques d'être entièrement déterminés par leurs valeurs aux points génériques de  $S$ . Cette propriété intervient dans la plupart des démonstrations et fait l'objet de la remarque suivante.

*Remarque 1.1.25.* Les éléments de  $Z(X/S, n)$  sont entièrement déterminés par leurs valeurs aux points génériques de  $S$ . En effet notons  $S_1, \dots, S_r$  les composantes irréductibles de  $S$  munies de leur structure réduite. On peut considérer les sous-schémas fermés  $X_1, \dots, X_r$  de  $X$  donnés par les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S_i & \longrightarrow & S \end{array}$$

Les immersions fermées des  $X_i$  dans  $X$  nous donnent pour tout entier positif  $n$ , un isomorphisme canonique

$$Z(X/S, n) = Z(S_{\text{red}} \times_S X/S_{\text{red}}, n) = \bigoplus_{i=1}^r Z(X_i/S_i, n).$$

Cet isomorphisme associe à un cycle  $\alpha \in Z(X/S, n)$  de la forme

$$\alpha = \sum_Z \alpha_Z [Z] \tag{8}$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ , l'élément dont la composante d'indice  $i$  est donnée par la somme (8) restreinte cette fois aux seuls sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  qui dominant la composante irréductible  $S_i$ .

En particulier lorsque  $s_i$  désigne le point générique de  $S_i$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{Z}(X_i/S_i, n) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^r s_i^\circ} & \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{Z}(X_{s_i}/\kappa(s_i), n) \\ \parallel & \nearrow_{(s_1^\circ, \dots, s_r^\circ)} & \\ \mathcal{Z}(X/S, n) & & \end{array}$$

On peut donc supposer que  $S$  est intègre de point générique  $s$ . Dans ce cas deux sous-schémas fermés intègres de  $X$  dominant  $S$  et génériquement isomorphes sont nécessairement isomorphes, le morphisme de la fibre générique  $X_s$  dans  $X$  étant plat cela signifie que  $s^\circledast$  est bien injectif.

On voit d'ailleurs que la multiplicité d'un sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  de dimension  $n$  et dominant une composante irréductible de  $S$  de point générique  $s$  est donnée par

$$m(Z, \alpha) = m(Z_s, s^\circledast \alpha).$$

**1.1.3. Cycles relatifs équidimensionnels.** — Dans cette sous-section nous introduisons les cycles relatifs équidimensionnels et nous rappelons la construction du morphisme de changement de base pour les cycles équidimensionnels plats.

*Définition 1.1.26.* Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Le groupe  $Z_{\text{equi}}(X/S, n)$  des cycles relatifs de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ .

Lorsque l'on considère les cycles relatifs équidimensionnels, il s'avère possible de préciser la remarque 1.1.24. On constate alors que les multiplicités d'intersection de Serre fournissent un morphisme de changement de base pour les morphismes de schémas réguliers.

*Remarque 1.1.27.* Soit  $S$  un schéma régulier. La troisième assertion du lemme 1.1.13 assure en particulier que le changement de base  $\theta^\circledast \alpha$  est défini pour tout cycle relatif  $\alpha$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  et tout morphisme de schéma  $\theta : T \rightarrow S$ . En convenant de noter  $\text{Srg}_S$  la sous-catégorie de  $\text{Sch}_S$  formée par les schémas réguliers, on voit donc qu'en posant

$$\underline{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)(T) = Z_{\text{equi}}(X_T/T, n)$$

pour un  $S$ -schéma régulier  $T$ , le changement de base à la Serre nous donne un préfaisceau de groupes abéliens  $\underline{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)$  sur  $\text{Srg}_S$ .

Dans la suite nous noterons  $\text{Hilb}(X/S, n)$  l'ensemble des sous-schémas fermés de  $X$  plats et équidimensionnels de dimension  $n$  sur  $S$ . En prenant le cycle associé on obtient un morphisme

$$[-] : \mathbb{Z}\text{Hilb}(X/S, n) \longrightarrow Z(X/S, n)$$

puisque les morphismes plats sont maximaux.

*Définition 1.1.28.* On note  $Z_{\text{Hilb}}(X/S, n)$  l'image du morphisme précédent. Un élément de cette image est appelé un cycle plat équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ .

Les morphismes plats et équidimensionnels étant stables par changement de base, un morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  nous donne un morphisme

$$T \times_S - : \mathbb{Z}\text{Hilb}(X/S, n) \longrightarrow \mathbb{Z}\text{Hilb}(X_T/T, n). \quad (9)$$

Nous allons voir ce morphisme induit un changement de base naturel pour les cycles plats équidimensionnels sur  $S$ .

*Notation 1.1.29.* Étant donné un schéma  $X$ , nous désignons par  $G_0(X)$  le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents.

Soient  $X$  un  $S$ -schéma propre et  $s$  un point maximal de  $S$ . Comme  $\mathcal{O}_{S,s}$  est un anneau artинien local, on a  $G_0(\mathcal{O}_{S,s}) = \mathbb{Z}$  et en considérant l'image de  $\mathcal{O}_X$  par la composée

$$G_0(X) \xrightarrow{\pi_{X/S*}} G_0(S) \longrightarrow G_0(\mathcal{O}_{S,s}) = \mathbb{Z}$$

on obtient un entier  $\deg_s(X)$  que nous appellerons le degré de  $X$  en  $s$ .

**Lemme 1.1.30.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma plat et fini.*

1. *Pour tout point maximal  $s$  de  $S$ , on a l'égalité*

$$\deg_s(X/S) \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{O}_{S,s}) = \sum_{x \in X_s} \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})[\kappa(x) : \kappa(s)].$$

2. *Étant donné un morphisme de schéma  $\theta : T \rightarrow S$ , un point maximal  $t$  de  $T$  et une généralisation maximale  $s$  de l'image de  $t$  dans  $S$ , on a*

$$\deg_s(X/S) = \deg_t(X_T/T).$$

DÉMONSTRATION. — (1). Par définition

$$\left[ \pi_{X/S*}(\mathcal{O}_X) \right]_s = \bigoplus_{x \in X_s} \mathcal{O}_{X,x}.$$

En prenant la longueur sur  $\mathcal{O}_{S,s}$  des deux membres on obtient

$$\deg_s(X/S) \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{O}_{S,s}) = \sum_{x \in X_s} \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \sum_{x \in X_s} \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x})[\kappa(x) : \kappa(s)]$$

ce qui constitue l'égalité voulue.

(2). Les hypothèses entraînent que  $\pi_{X/S*}(\mathcal{O}_X)$  et  $\pi_{X_T/T*}(\mathcal{O}_{X_T})$  sont respectivement des  $\mathcal{O}_S$ ,  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de rang fini. On voit par ailleurs que le rang de  $\pi_{X/S*}(\mathcal{O}_X)$  au voisinage de l'image de  $t$  est égal à  $\deg_s(X/S)$  tandis que le rang de  $\pi_{X_T/T*}(\mathcal{O}_{X_T})$  est égal à  $\deg_t(X_T/T)$ . Il suffit donc de remarquer que

$$\theta^*(\pi_{X/S*}(\mathcal{O}_X)) = \pi_{X_T/T*}(\mathcal{O}_{X_T}).$$

□

*Remarque 1.1.31.* Un hensélisé strict d'un schéma local artинien en son point fermé est un schéma artинien. En effet fixons un anneau local artинien  $\mathcal{O}$  et désignons par  $k$  son corps résiduel. Par construction l'hensélisé strict de  $\mathcal{O}$  par rapport à une clôture séparable fixée  $k^s$  de  $k$  est donné par

$$\mathcal{O}^{sh} = \operatorname{colim} A$$

la colimite étant prise sur la famille des morphismes locaux  $A \rightarrow k^s$  où  $A$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre essentiellement étale. Comme  $\mathcal{O}$  est artинien, les  $\mathcal{O}$ -algèbres essentiellement étales sont artинiennes et la remarque découle alors de la conjonction du lemme 18.6.9.1 de [56] et de l'assertion 18.8.8 de *loc.cit.*

**Proposition 1.1.32.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas. Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments de  $\mathbb{Z}\operatorname{Hilb}(X/S, n)$  tels que  $[\alpha] = [\beta]$ , alors on a aussi  $[T \times_S \alpha] = [T \times_S \beta]$ .*



DÉMONSTRATION. — Remarquons tout d'abord que le résultat est vrai lorsque le morphisme  $\theta$  est plat puisque dans ce cas  $[T \times_S \alpha] = \theta_X^* \alpha$ , le morphisme  $\theta_X^*$  étant le morphisme déduit de la functorialité des cycles par rapport aux morphismes plats. Considérons maintenant le cas général. Par linéarité il suffit de voir que lorsque  $[\alpha] = 0$  on a aussi  $[T \times_S \alpha] = 0$ . Écrivons l'élément  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés de  $X$  plats et équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ . Quitte à remplacer  $X$  par la réunion des  $Z_i$  on peut supposer que  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Soit  $W$  un sous-schéma fermé intègre de  $X_T$ . Il s'agit de montrer que

$$m(W, [T \times_S \alpha]) = 0.$$

Pour cela on peut supposer  $W$  de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant une composante irréductible de  $T$ . Notons  $w$  le point générique de  $W$  et  $z$  son image dans  $X$ . Étant donné un voisinage ouvert  $U$  de  $z$ , on peut remarquer d'une part que  $[\alpha|_U] = 0$  et d'autre part que

$$m(W, [T \times_S \alpha]) = m(W \cap U_T, [T \times_S \alpha|_U]).$$

Sans perdre en généralité, on peut donc se restreindre dans la suite à ne considérer que des voisinages ouverts suffisamment petits du point  $z$ . Le point  $w$  étant maximal dans sa fibre, il en est de même du point  $z$ . Ceci permet de supposer, grâce au lemme 1.1.14, que la projection de  $X$  sur  $S$  s'écrit sous la forme d'une composition  $X \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  dans laquelle  $q$  est un morphisme quasi-fini et plat. Sachant que  $T \times_S \alpha = \mathbb{A}_T^n \times_{\mathbb{A}_S^n} \alpha$ , on voit en définitive que l'on peut supposer que  $n = 0$ .

Notons  $t$  le point générique de la composante irréductible de  $T$  dominée par  $W$ . L'anneau local  $\mathcal{O}_{T,t}$  est alors artinien et

$$m(W, [T \times_S \alpha]) = m(\overline{W}, [\text{Spec}(\mathcal{O}_{T,t}) \times_S \alpha])$$

où  $\overline{W}$  désigne l'adhérence de  $w$  dans  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{T,t}) \times_S X$ . On peut donc supposer que  $T$  est un schéma artinien local de point fermé  $t$ . Considérons alors un hensélisé strict  $u : T' \rightarrow T$  de  $T$  en son point fermé. Nous savons par la remarque 1.1.31 que ce dernier est artinien. Le morphisme  $u$  étant fidèlement plat

$$[T' \times_S \alpha] = [T' \times_T (T \times_S \alpha)] = u_X^* [T \times_S \alpha]$$

et la remarque 1.1.18 permet de supposer que  $T$  est un schéma artinien local strictement hensélien. Désignons alors par  $\bar{s}$  le point géométrique de  $S$  défini par  $\theta$ . Il existe alors un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & S_{\bar{s}}^{\text{sh}} \\ & \nearrow \vartheta & \downarrow \iota_{S, \bar{s}}^{\text{sh}} \\ T & \xrightarrow{\theta} & S, \end{array}$$

où  $S_{\bar{s}}^{\text{sh}}$  désigne, conformément aux notations de la sous-section 2.3.1, le spectre de l'hensélisé strict de  $S$  au point géométrique  $\bar{s}$ . Le morphisme canonique  $\iota_{S,\bar{s}}^{\text{sh}}$  étant plat, l'égalité

$$[T \times_S \alpha] = \left[ T \times_{S_{S,\bar{s}}^{\text{sh}}} \left( S_{S,\bar{s}}^{\text{sh}} \times_S \alpha \right) \right]$$

permet de supposer que  $S$  est un schéma local strictement hensélien. Dans ce cas la condition c) du théorème 18.5.11 de [56] permet de supposer que  $X$  est un  $S$ -schéma local plat et fini sur  $S$ . De plus quitte à prendre un voisinage de  $z$  on peut supposer que ce dernier est le seul point de  $X$  au dessus de  $s$ . Cette hypothèse entraîne que  $(X_s)_{\text{red}} = \text{Spec}(\kappa(z))$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (X_T)_{\text{red}} &= ((X_T)_t)_{\text{red}} = (\text{Spec}(\kappa(t)) \times_{\text{Spec}(\kappa(s))} X_s)_{\text{red}} \\ &= (\text{Spec}(\kappa(t)) \times_{\text{Spec}(\kappa(s))} (X_s)_{\text{red}})_{\text{red}} \\ &= (\text{Spec}(\kappa(t)) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(z))_{\text{red}} \end{aligned}$$

Comme  $S$  est strictement hensélien,  $\kappa(z)/\kappa(s)$  est une extension purement inséparable ce qui entraîne que l'anneau artinien  $\kappa(t) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(z)$  est local et donc que  $X_T$  est un schéma artinien local réduit au seul point  $w$ . Fixons une généralisation maximale  $\eta$  de  $s$ , on voit alors en utilisant le lemme 1.1.30 que

$$\begin{aligned} m(W, [T \times_S \alpha]) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{lg}(\mathcal{O}_{T \times_S Z_i, w}) = \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{deg}_t((Z_i)_T/T) \right] \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{deg}_{\eta}(Z_i/S) \right] \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i \left( \sum_{x \in X_{\eta}} \text{lg}(\mathcal{O}_{Z_i, x}) \frac{[\kappa(x) : \kappa(\eta)]}{\text{lg}(\mathcal{O}_{S, \eta})} \right) \right] \end{aligned}$$

ce qui donne en définitive

$$m(W, [T \times_S \alpha]) = \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)] \text{lg}(\mathcal{O}_{S, \eta})} \left[ \sum_{x \in X_{\eta}} [\kappa(x) : \kappa(\eta)] \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{lg}(\mathcal{O}_{Z_i, x}) \right) \right]. \quad (10)$$

Or pour tout point  $x$  au dessus de  $\eta$ , on sait par hypothèse que

$$m(\overline{\{x\}}, [\alpha]) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{lg}(\mathcal{O}_{Z_i, x}) = 0$$

et le lemme résulte donc de l'égalité (10). □

La proposition 1.1.32 assure l'existence d'un morphisme de changement de base pour les cycles plats équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ . Par définition, ce dernier est compatible aux morphismes de changement de base pour les morphismes plats de la remarque 1.1.23 et est donné par le corollaire suivant.

**Corollaire 1.1.33.** *Le morphisme de changement de base (9) se factorise canoniquement sous la forme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathrm{Hilb}(X/S, n) & \xrightarrow{[-]} & Z_{\mathrm{Hilb}}(X/S, n) \\ \downarrow T \times_S - & & \downarrow T \times_S - \\ \mathbb{Z}\mathrm{Hilb}(X_T/T, n) & \xrightarrow{[-]} & Z_{\mathrm{Hilb}}(X_T/T, n). \end{array}$$

## 1.2. Le changement de base des cycles relatifs

Dans cette section nous revenons sur l'opération la plus fondamentale de la théorie : le changement de base des cycles relatifs. Cette opération, délicate dans un certain sens, n'est pas définie pour tous les cycles et peut aussi faire intervenir des coefficients rationnels — nous renvoyons à la remarque 1.2.27 pour la description des dénominateurs pouvant apparaître lors d'un changement de base. Il s'agit pourtant là de la seule extension naturelle possible des changements de base plats, à savoir celui défini pour les morphismes plats dans la remarque 1.1.23 et celui obtenu pour les cycles plats équidimensionnels au corollaire 1.1.33.

**1.2.1. Préfaisceaux de cycles relatifs.** — Dans le but de pouvoir justifier précisément avec le corollaire 1.2.28 notre assertion précédente selon laquelle le changement de base des cycles relatifs construit par A. Suslin et V. Voevodsky est l'extension naturelle des changements de base plats, nous avons choisi d'introduire la définition suivante.

**Définition 1.2.1.** Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Nous appellerons préfaisceau de cycles algébriques relatifs à coefficients rationnels sur  $X$  la donnée pour tout  $S$ -schéma  $T$  d'un sous- $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{Z}(X_T/T, n)$  de  $Z(X_T/T, n)_{\mathbb{Q}}$  et pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $T' \rightarrow T$  d'un morphisme de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} : \mathfrak{Z}(X_T/T, n) \rightarrow \mathfrak{Z}(X_{T'}/T', n)$$

satisfaisant aux conditions suivantes.

1. Lorsque  $\theta$  est plat le morphisme  $\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes}$  est donné par le changement de base plat  $\theta^{\otimes}$  de la remarque 1.1.23.
2. Lorsque  $\alpha$  appartient à  $Z_{\mathrm{Hilb}}(X/S, n)$  le morphisme  $\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes}$  est donné par

$$\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha = T \times_S \alpha$$

où  $T \times_S -$  est le changement de base obtenu au corollaire 1.1.33.

3. Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $\vartheta : T'' \rightarrow T'$ ,  $\theta : T' \rightarrow T$  et tout élément  $\alpha$  de  $\mathfrak{Z}(X_T/T, n)$ , on a

$$(\theta \circ \vartheta)_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha = \vartheta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} (\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha).$$

Ainsi on peut voir un préfaisceau de cycles relatifs comme une manière de définir pour une certaine famille de cycles relatifs à coefficients rationnels des changements de base fonctoriels et compatibles aux deux types de changement de base plats que nous avons évoqué précédemment. En particulier pour un morphisme plat  $\theta : T' \rightarrow T$  et un élément  $\alpha \in \mathfrak{Z}(X_T/T, n)$ , on a l'égalité

$$\theta_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha = \sum_Z \alpha_Z \left( \sum_W m(W, Z_{T'}) [W] \right)$$

où la seconde somme est prise sur les composantes irréductibles  $W$  de  $Z_{T'}$ . Puisque l'on travaille avec des cycles relatifs, ce résultat s'avère valable plus généralement pour tous les morphismes maximaux sans restriction de platitude. On dispose en effet du résultat suivant.

**Lemme 1.2.2.** *Soient  $\mathfrak{Z}$  un préfaisceau de cycles relatifs à coefficients rationnels sur un  $S$ -schéma  $X$ ,  $\theta : T' \rightarrow T$  un morphisme maximal de  $S$ -schémas et  $\alpha$  un élément de  $\mathfrak{Z}(X_T/T, n)$ . On a l'égalité*

$$\theta_3^{\otimes} \alpha = \sum_Z \alpha_Z \left( \sum_W m(W, Z_{T'})[W] \right)$$

où la seconde somme est prise sur les composantes irréductibles  $W$  de  $Z_{T'}$  qui dominent une composante irréductible de  $T'$ .

DÉMONSTRATION. — Notons  $\beta$  le cycle

$$\sum_Z \alpha_Z \left( \sum_W m(W, Z_{T'})[W] \right).$$

Le lemme 1.1.6 nous garantit que  $\beta$  est un cycle relatif appartenant à  $Z(X_{T'}/T', n)$ . Il suffit donc d'après la remarque 1.1.25 de montrer que pour tout point maximal  $t'$  de  $T'$  les cycles  $\theta_3^{\otimes} \alpha$  et  $\beta$  coïncident après application du changement de base plat  $(t')^{\circledast}$ . Par hypothèse l'image  $t$  du point  $t'$  est un point maximal de  $T$ , il suffit alors de remarquer que par functorialité la première condition de la définition 1.2.1 nous impose les égalités

$$(t')^{\circledast} \theta_3^{\otimes} \alpha = \sum_Z \alpha_Z [(Z_t)_{\kappa(t')}] = \sum_Z \alpha_Z [(Z_{T'})_{t'}] = (t')^{\circledast} \beta.$$

□

Nous allons maintenant rappeler les notions de points épais, d'épaississements et d'éclatements abstraits. Ces concepts sont centraux : on peut en effet montrer que pour qu'un cycle relatif appartienne à un préfaisceau de cycles relatifs, autrement dit admette des changements de base éventuellement rationnels, il est nécessaire que le changement de base le long d'un point épais donné par (14) ne dépende pas de l'épaississement choisi — lemme 1.2.12. Cette condition peut s'interpréter en terme d'éclatements abstraits — lemme 1.2.23 — et constitue la condition nécessaire et suffisante pour que le changement de base de A. Suslin et V. Voevodsky soit défini.

**1.2.2. Points épais et éclatements abstraits.** — Supposons donnée une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  et un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ . On peut considérer la catégorie colocale  $A \setminus \mathcal{A}$  dont les objets sont les couples  $(A', e')$  formés d'un objet  $A'$  de  $\mathcal{A}$  et d'un morphisme  $e : A \rightarrow A'$ , les morphismes d'un couple  $(A', e')$  dans un couple  $(A'', e'')$  étant donnés par les morphismes  $A' \rightarrow A''$  d'objets de  $\mathcal{A}$  rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & A' \\ & \searrow e'' & \downarrow \\ & & A'' \end{array}$$

commutatif. Convenons de noter  $\mathcal{A}_A$  la sous-catégorie pleine de cette dernière formée par les couples  $(A', e')$  pour lesquels  $e'$  est un épimorphisme.

En associant à un morphisme  $e' : A \rightarrow A'$  d'objet de  $\mathcal{A}$  l'épimorphisme défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & e' & \\ & \curvearrowright & \\ A & \twoheadrightarrow Q_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\mathcal{N}) \twoheadrightarrow & A' \end{array}$$

on obtient un adjoint à droite  $Q_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$  de l'inclusion de  $\mathcal{A}_A$  dans  $A \setminus \mathcal{A}$ . Lorsque l'on se donne une catégorie abélienne  $\mathcal{B}$ , des foncteurs adjoints  $G \vdash F$  de sources respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  ainsi qu'un objet  $B$  de  $\mathcal{B}$ , l'adjonction  $G \vdash F$  induit une adjonction  $\underline{G} \vdash \underline{F}$

$$G(B) \setminus \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} B \setminus \mathcal{B}$$

Les foncteurs  $\underline{F}$  et  $\underline{G}$  sont obtenus en posant

$$\underline{F}(A, e') = (F(A), F(e) \circ \eta_A) \quad \underline{G}(B', e') = (G(B), G(e)).$$

où  $\eta$  est l'unité de l'adjonction  $G \vdash F$ . En combinant les deux adjonctions précédentes, on obtient une adjonction naturelle

$$\underline{G} \vdash Q_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \circ \underline{F} \tag{11}$$

entre les catégories  $\mathcal{A}_{G(B)}$  et  $\mathcal{B}_B$ .

Supposons  $S$  intègre de point générique  $s$  et donnons nous un  $S$ -schéma  $X$ . Notons  $\iota$  le morphisme de la fibre générique  $X_s$  dans  $X$  et fixons un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ . En appliquant ce qui précède aux catégories de  $\mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{O}_{X_s}$ -modules quasi-cohérents, l'adjonction (11) nous donne une adjonction

$$(-)_s \vdash \overline{(-)}_{\mathcal{M}} \tag{12}$$

entre la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents quotients de  $\mathcal{M}$  et la catégorie des  $\mathcal{O}_{X_s}$ -modules quasi-cohérents quotients de  $\mathcal{M}_s$ . On dispose alors de la proposition 2.8.1 de [54]

**Lemme 1.2.3.** *Supposons  $S$  intègre de point générique  $s$ , et donnons nous un  $S$ -schéma  $X$  ainsi qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ .*

1. *Le foncteur  $\overline{(-)}_{\mathcal{M}}$  est pleinement fidèle autrement dit la counité de l'adjonction est un isomorphisme*

$$(-)_s \circ \overline{(-)}_{\mathcal{M}} = \text{id}.$$

2. *Lorsque  $S$  est régulier de dimension un, l'image essentielle de  $\overline{(-)}_{\mathcal{M}}$  est formée des  $\mathcal{O}_X$ -modules quotients de  $\mathcal{M}$  plats sur  $S$ .*

DÉMONSTRATION. — (1). Par définition l'image d'un objet  $(\mathcal{N}, e)$  de  $\text{Mod}_{\mathcal{M}_s}(\mathcal{O}_{X_s})$  par le foncteur  $\overline{(-)}_{\mathcal{M}}$  est le couple  $(\overline{(\mathcal{N})}_{\mathcal{M}}, \bar{e})$  défini par le diagramme de  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents

$$\begin{array}{ccccc} & & \overline{(\mathcal{N})}_{\mathcal{M}} & & \\ & \nearrow \bar{e} & & \searrow & \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{M}}} & \iota_*(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\iota_*e} & \iota_*\mathcal{N}. \end{array}$$

Comme  $\iota$  est un morphisme plat, la counité  $\bar{\varepsilon}$  de l'adjonction (12) s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_s} & \left[ \overline{(\mathcal{N})}_{\mathcal{M}} \right]_s \\ & \searrow & \nearrow \bar{\varepsilon}_{\mathcal{N}} \\ & & (\iota_* \mathcal{N})_s \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{N}}} \mathcal{N} \\ & \nearrow e & \nwarrow \\ & & \end{array}$$

et il suffit de remarquer que  $\varepsilon_{\mathcal{N}}$  est un isomorphisme pour voir que cette counité est bien un isomorphisme.

(2). Supposons que  $S$  soit régulier de dimension un. Il s'agit de montrer que  $\overline{(\mathcal{N})}_{\mathcal{M}}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module plat sur  $S$  pour tout  $\mathcal{O}_{X_s}$ -module  $\mathcal{N}$  quotient de  $\mathcal{M}_s$  et que pour tout objet  $\mathcal{O}_X$ -module quotient de  $\mathcal{M}$  plat sur  $S$  de la forme  $(\mathcal{N}', e')$  l'unité

$$\bar{\eta}_{\mathcal{N}'} : \mathcal{N}' \rightarrow \overline{(\mathcal{N}')}_{\mathcal{M}}$$

est un isomorphisme. Les deux assertions étant locales sur  $S$  et  $X$ , on peut supposer que  $S$  est le spectre d'un anneau régulier intègre  $A$  de dimension un et que  $X$  est le spectre d'une  $A$ -algèbre  $B$ . Notons  $K$  le corps des fractions de  $A$ . Les anneaux locaux de  $A$  sont des anneaux de valuation discrète ce qui entraîne que pour qu'un  $A$ -module  $N$  soit plat il faut il suffit qu'il soit sans torsion. Notons  $M$  le  $B$ -module correspondant à  $\mathcal{M}$  et  $N$  le  $B \otimes_A K$ -module correspondant à  $\mathcal{N}$ . On voit que  $\overline{(\mathcal{N})}_{\mathcal{M}}$  est donné par le  $B$ -module image du morphisme

$$M \rightarrow M \otimes_A K \rightarrow N.$$

Ce dernier étant contenu dans un  $K$ -module, est sans torsion donc plat sur  $A$ . D'autre part  $\mathcal{N}'$  est donné par un  $A$ -module plat  $N'$ . Par platitude  $N'$  est contenu dans  $N' \otimes_A K$  et le résultat découle du fait que l'on a le carré commutatif de  $B$ -modules

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \otimes_A K \\ \downarrow & & \downarrow \\ N' & \longrightarrow & N' \otimes_A K. \end{array}$$

□

Lorsque  $Z$  est un sous-schéma fermé de la fibre générique  $X_s$  défini par un idéal quasi-cohérent  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_{X_s}$  on peut lui associer son image fermée  $\bar{Z}$  dans  $X$  qui n'est autre que le sous-schéma fermé de  $X$  défini par l'idéal quasi-cohérent

$$\ker \left[ \mathcal{O}_X \rightarrow \overline{(\mathcal{O}_{X_s}/\mathcal{J})}_{\mathcal{O}_X} \right].$$

Le lemme 1.2.3 nous donne alors

**Corollaire 1.2.4.** *Supposons  $S$  intègre de point générique  $s$  et donnons nous un  $S$ -schéma  $X$ .*

1. *Le foncteur  $(-)_s$  est adjoint à gauche du foncteur  $\overline{(-)}$ . Ce dernier est en outre pleinement fidèle autrement dit la counité de l'adjonction est un isomorphisme*

$$(-)_s \circ \overline{(-)} = \text{id}.$$

2. *Lorsque  $S$  est régulier de dimension un, l'image essentielle de  $\overline{(-)}$  est formée des sous-schémas fermés de  $X$  plats sur  $S$ .*

3. Un sous-schéma fermé  $Z$  de  $X_s$  est réduit (resp. irréductible) si et seulement si  $\overline{Z}$  est réduit (resp. irréductible). Les composantes irréductibles de  $\overline{Z}$  sont les  $\overline{W}$  où  $W$  est une composante irréductible de  $Z$  et

$$m(W, Z) = m(\overline{W}, \overline{Z}).$$

DÉMONSTRATION. — Les deux premières assertions sont des conséquences immédiates du lemme 1.2.3. Soit  $Z$  un sous-schéma fermé de la fibre générique  $X_s$ . La proposition 9.5.4 de [50] assure que l'espace sous-jacent à l'image fermée  $\overline{Z}$  n'est autre que l'adhérence de  $Z$  dans  $X$  en particulier  $\overline{Z}$  est irréductible si et seulement si  $Z$  est irréductible. D'autre part on sait d'après la proposition 9.5.9 de [50] que lorsque  $Z$  est réduit son image fermée est réduite, la réciproque étant vraie d'après la proposition 8.7.2 de [55]. Cela entraîne que les composantes irréductibles de  $\overline{Z}$  sont les  $\overline{W}$  où  $W$  est une composante irréductible de  $Z$ . Pour les multiplicités, il suffit de remarquer que le morphisme  $\iota$  étant plat

$$\begin{aligned} \iota^*[\overline{Z}] &= \iota^* \left( \sum_W m(\overline{W}, \overline{Z})[\overline{W}] \right) = \sum_W m(\overline{W}, \overline{Z})\iota^*[\overline{W}] = \sum_W m(\overline{W}, \overline{Z})[W] \\ &= [Z] = \sum_W m(W, Z)[W] \end{aligned}$$

la somme étant prise sur les composantes irréductibles de  $W$  de  $Z$  et d'identifier termes à termes.  $\square$

*Remarque 1.2.5.* Supposons que  $S$  soit intègre régulier de dimension un et que  $X$  soit un  $S$ -schéma de type fini intègre de dimension  $n$  sur  $S$ . Le corollaire 1.2.4 entraîne que pour que  $X$  soit plat sur  $S$  il s'avère nécessaire et suffisant que  $X$  domine  $S$ . Dans ce cas le corollaire 14.2.2 de [55] assure que  $X$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ .

La remarque précédente nous donne en particulier le lemme suivant

**Lemme 1.2.6.** *Supposons  $S$  intègre régulier de dimension un. Alors pour un  $S$ -schéma  $X$*

$$Z(X/S, n) = Z_{\text{Hilb}}(X/S, n).$$

*Remarque 1.2.7.* Soient  $s$  un point maximal de  $S$  et  $X$  un  $S$ -schéma. Les points maximaux de  $X_s$  sont les points maximaux de  $X$  se projetant sur  $s$ . Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schéma et  $t$  un point maximal de  $T$  dont l'image dans  $S$  coïncide avec  $s$ . Supposons que le morphisme  $\kappa(t) \rightarrow \kappa(s)$  induit au niveau des corps résiduels soit un isomorphisme. Alors d'après le corollaire 1.2.4, le nombre de composantes irréductibles de  $X_T$  dominant  $\overline{\{t\}}$  est égale au nombre de composantes irréductibles de  $X$  dominant  $\overline{\{s\}}$ . Toute composante irréductible  $Z$  de  $X$  dominant  $\overline{\{s\}}$  est dominée par une unique composante irréductible  $W$  de  $X_T$  dominant  $\overline{\{t\}}$  et l'on a

$$m(Z, X) = m(W, X_T).$$

**Définition 1.2.8.** Soit  $\underline{s}$  un  $K$ -point de  $S$ . Un épaissement de  $\underline{s}$  est la donnée d'un trait  $\mathcal{O}$  et d'une factorisation de  $\underline{s}$  sous la forme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathcal{O} & \xrightarrow{\tau} & S \\ \sigma \uparrow & \nearrow \underline{s} & \\ \text{Spec } K & & \end{array}$$

où  $\sigma$  est le point fermé de  $\mathcal{O}$  et  $\tau$  un morphisme birationnel de  $\mathcal{O}$  sur une composante irréductible de  $S$  contenant le lieu  $s$  de  $\underline{s}$ . Nous dirons que  $\underline{s}$  est épais lorsqu'il admet un épaissement.

*Remarque 1.2.9.* Dans la définition 1.2.8 nous n'imposons pas que  $K$  soit le corps résiduel du trait  $\mathcal{O}$  mais simplement une extension de ce dernier. Autrement dit  $\sigma$  est simplement un  $K$ -point du trait  $\mathcal{O}$  de lieu le point fermé.

*Remarque 1.2.10.* Le lieu  $s$  d'un  $K$ -point épais  $\underline{s}$  ne peut pas être un point maximal de  $S$ . Un  $K$ -point arbitraire  $\underline{s}$  de  $S$  n'est pas nécessairement épais en général. En revanche si son lieu n'est pas un point maximal de  $S$ , il existe toujours une extension  $E$  de  $K$  telle que le  $E$ -point  $\underline{s}_E$  obtenu par extension à  $E$  soit épais. En effet on sait d'après la proposition 7.1.9 de [51] que pour toute généralisation maximale  $\eta$  du lieu  $s$  de  $\underline{s}$ , il existe un trait  $\mathcal{O}$  et un morphisme

$$\tau : \mathcal{O} \rightarrow S$$

envoyant le point fermé de  $\mathcal{O}$  sur  $s$  et qui soit un morphisme birationnel de  $\mathcal{O}$  sur la composante irréductible  $\overline{\{\eta\}}$ . Le corps résiduel  $k$  de  $\mathcal{O}$  est une extension de  $\kappa(s)$  et en choisissant une extension  $E$  telle que

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ K & \swarrow \quad \searrow & k \\ & \kappa(s) & \end{array}$$

on obtient un épaissement

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } k & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{\tau} & S \\ \uparrow & & & \nearrow \underline{s} & \\ \text{Spec } E & \longrightarrow & \text{Spec } K & & \end{array}$$

du  $E$ -point  $\underline{s}_E$ .

Dans la suite, lorsque l'on se donne un épaissement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  pour un  $K$ -point épais de  $S$ , nous noterons  $\rho$  le point générique de la composante irréductible de  $S$  dominée par  $\mathcal{O}$ .

**Lemme 1.2.11.** Soient  $\underline{s}$  un  $K$ -point épais et  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  un épaissement de ce dernier. Alors pour tout  $S$ -schéma de type fini intègre  $Z$ , de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant  $\overline{\{\rho\}}$ , le schéma  $Z_{\mathcal{O}}$  possède une unique composante irréductible  $\mathcal{Z}$  dominant  $\mathcal{O}$ . Cette dernière possède les propriétés suivantes.

1.  $\mathcal{Z}$  est l'unique sous-schéma fermé de  $Z_{\mathcal{O}}$  plat sur  $\mathcal{O}$  et génériquement isomorphe à ce dernier.
2.  $\mathcal{Z}$  est un  $\mathcal{O}$ -schéma plat et équidimensionnel de dimension  $n$ .



3.  $\mathcal{Z}$  est de multiplicité un dans  $Z_{\mathcal{O}}$ .

DÉMONSTRATION. — D'après la remarque 1.2.7, le schéma  $Z_{\mathcal{O}}$  possède une unique composante irréductible  $\mathcal{Z}$  dominant  $\mathcal{O}$  et cette dernière est de multiplicité un. En utilisant le lemme 1.1.6 on sait en outre que  $\mathcal{Z}$  est de dimension  $n$  sur  $\mathcal{O}$  et en utilisant la remarque 1.2.5 que  $\mathcal{Z}$  est plat et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$  de dimension  $n$ . Le résultat d'unicité énoncé découle du corollaire 1.2.4.  $\square$

Donnons nous un  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$  et fixons un épaissement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  de  $\underline{s}$ . Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha \in Z(X/S, n)$  un cycle relatif. Grâce au lemme 1.2.11, on peut associer à  $\alpha$  le cycle

$$\sum_Z \alpha_Z[\mathcal{Z}] \quad (13)$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant  $\overline{\{\rho\}}$ . Le lemme 1.2.11 assure en outre que le cycle (13) appartient à  $Z_{\text{Hilb}}(X_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}, n)$  ce qui permet finalement de poser

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha := \text{Spec}(K) \times_{\mathcal{O}} \left( \sum_Z \alpha_Z[\mathcal{Z}] \right) = \sum_Z \alpha_Z[\text{Spec}(K) \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}]. \quad (14)$$

Cependant, pour un  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$ , le choix de l'épaissement n'est pas unique et en toute généralité rien n'assure que les cycles (14) pour des épaissements distincts soient égaux. En revanche on dispose du lemme

**Lemme 1.2.12.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathfrak{Z}$  un préfaisceau de cycles relatifs à coefficients rationnels sur  $X$ . Alors pour tout  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$  et tout épaissement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  on a*

$$\underline{s}_{\mathfrak{Z}}^{\otimes}(\alpha) = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha.$$

DÉMONSTRATION. — En utilisant le lemme 1.2.2 ainsi que le lemme 1.2.11, on voit que

$$\tau_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha = \sum_Z \alpha_Z[\mathcal{Z}]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant  $\overline{\{\rho\}}$ . Il suffit alors d'utiliser la fonctorialité et la seconde condition de la définition 1.2.1 pour obtenir que

$$\underline{s}_{\mathfrak{Z}}^{\otimes} \alpha = [\mathcal{Z} \times_{\mathcal{O}} \text{Spec}(K)] = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha. \quad \square$$

Le lemme 1.2.12 assure en particulier que pour qu'un cycle relatif  $\alpha \in Z(X/S, n)$  admette des changements de base d'une quelconque manière raisonnable que ce soit, il est nécessaire que les cycles (14) pour des épaissements distincts soient égaux.

**Définition 1.2.13.** Un cycle relatif  $\alpha \in Z(X/S, n)$  sera dit universellement rationnel lorsque pour tout  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$  les cycles

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha$$

ne dépendent pas de l'épaississement choisi  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ . On note  $\mathcal{Z}(X/S, n)$  le sous-groupe de  $Z(X/S, n)$  formé des cycles universellement rationnels.

Dans la suite lorsque  $\alpha$  est un cycle relatif universellement rationnel, la valeur commune des cycles (14) sera notée  $\underline{s}^{\otimes} \alpha$ .

*Remarque 1.2.14.* Supposons qu'un  $S$ -schéma  $X$  soit une réunion disjointe quelconque de  $S$ -schémas  $X_i$ , on a alors un isomorphisme

$$Z(X/S, n) = \bigoplus_i Z(X_i/S, n)$$

puisque le support d'un cycle relatif est par définition quasi-compact donc contenu dans une réunion finie des  $X_i$ . Cette décomposition nous donne un isomorphisme

$$\mathcal{Z}(X/S, n) = \bigoplus_i \mathcal{Z}(X_i/S, n).$$

En effet si  $\underline{s}$  est un  $K$ -point épais de  $S$  et  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  un épaississement de ce dernier on voit par définition que

$$((\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha)_i = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha_i$$

en notant  $\alpha_i$  la composante sur le  $i$ -ème facteur d'un cycle relatif  $\alpha$ . En particulier cela entraîne bien qu'un cycle est universellement rationnel si et seulement si ses composantes le sont aussi.

**Définition 1.2.15.** Suivant la définition 2.2.4 de [125], nous appellerons éclatement abstrait tout morphisme de schéma  $\theta : T \rightarrow S$  possédant les deux propriétés suivantes.

- $\theta$  est un morphisme maximal et propre,
- il existe un ouvert  $U$  de  $S$  tel que le morphisme  $(U_T)_{\text{red}} \rightarrow U_{\text{red}}$  soit un isomorphisme.

Nous dirons dans la suite qu'un éclatement abstrait est générique lorsqu'il existe un ouvert dense de  $S$  vérifiant la troisième condition de la définition 1.2.15.

*Remarque 1.2.16.* La première condition de la définition 1.2.15 assure que les éclatements abstraits sont des morphismes surjectifs puisque en fait chaque composante irréductible de  $T$  se surjecte sur une composante irréductible de  $S$ . En outre la troisième condition de la définition 1.2.15 implique que les éclatements abstraits génériques sont des morphismes birationnels.

*Remarque 1.2.17.* Si  $\theta : T \rightarrow S$  est un éclatement abstrait le lemme 9.5.9 de [50] assure que  $T$  est irréductible (resp. réduit) lorsque  $S$  est irréductible (resp. réduit).

Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un éclatement abstrait. Notons  $U$  le plus grand sous-schéma ouvert de  $S$  vérifiant la troisième condition de la définition 1.2.15 et  $V$  l'ouvert de  $X$  donné par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Étant donné un sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$  de type fini sur  $S$ , nous appellerons transformé strict de  $Z$  par  $\theta$  le sous-schéma fermé de  $Z_T$  adhérence schématique de l'ouvert  $Z_T \cap V_T$ . Dans la suite nous noterons  $Z_T^{\text{st}}$  le transformé strict de  $Z$  par  $\theta$ .

*Remarque 1.2.18.* Supposons que l'éclatement  $\theta$  soit générique et que  $Z$  soit un sous-schéma fermé intègre de  $X$  de type fini sur  $S$ , de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Alors le transformé strict  $Z_T^{\text{st}}$  est un schéma irréductible de  $X_T$  de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant une composante irréductible de  $T$ . En effet comme  $Z_T \cap V_T$  est un ouvert dense dans  $Z_T^{\text{st}}$  les points maximaux de  $Z_T^{\text{st}}$  appartiennent à cet ouvert. Par ailleurs la troisième condition de la définition 1.2.15 nous donne un isomorphisme

$$(Z_T \cap V_T)_{\text{red}} = (Z \cap V)_{\text{red}}$$

Comme  $Z$  domine une composante irréductible de  $S$  et que  $U$  est dense, le point générique de  $Z$  appartient à  $V$  ce qui assure que  $(Z \cap V)_{\text{red}}$  est un schéma irréductible de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Le morphisme  $\theta$  étant birationnel cela entraîne que  $(Z_T \cap V_T)_{\text{red}}$  est un schéma irréductible de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant une composante irréductible de  $T$  et donc qu'il en est de même de  $Z_T^{\text{st}}$  par adhérence schématique.

Étant donné un cycle relatif

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ , on peut définir le transformé strict de  $\alpha$  en posant

$$\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha := \sum_{i=1}^r \alpha_i [(Z_i)_T^{\text{st}}]. \quad (15)$$

La remarque 1.2.18 assure que l'on obtient ainsi un cycle relatif appartenant à  $Z(X_T/T, n)$ .

Nous dirons qu'un éclatement abstrait  $\theta : T \rightarrow S$  platifie le cycle relatif  $\alpha \in Z(X/S, n)$  lorsque les transformés stricts des  $(Z_i)_T^{\text{st}}$  sont des schémas plats sur  $T$ . Supposons qu'en outre l'éclatement  $\theta$  soit générique. On sait par la remarque 1.2.18 que les  $(Z_i)_T^{\text{st}}$  sont irréductibles de dimension  $n$  sur  $T$ . Le corollaire 14.2.2 de [55] assure alors que les schémas  $(Z_i)_T^{\text{st}}$  sont équidimensionnels de dimension  $n$  sur  $T$ . On voit donc que pour un éclatement abstrait générique platifiant  $\alpha$ , le cycle (15) appartient à  $Z_{\text{Hilb}}(X_T/T, n)$ .

Leur définition force les éclatements abstraits à vérifier le lemme suivant

**Lemme 1.2.19.** *Les éclatements abstraits (resp. les éclatements abstraits génériques) sont stables par composition. De plus si*

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\vartheta'} & T \\ \downarrow \theta' & & \downarrow \theta \\ S' & \xrightarrow{\vartheta} & S \end{array}$$

est un carré dans lequel  $\vartheta$  est un éclatement abstrait et  $\theta$  un morphisme plat, alors

1.  $\vartheta'$  est un éclatement abstrait qui est générique lorsqu'il en est de même de  $\vartheta$ ,
2. lorsque  $\vartheta$  platifie un cycle  $\alpha$ , l'éclatement  $\vartheta'$  platifie le cycle  $\theta^{\otimes} \alpha$ .

DÉMONSTRATION. — En vertu du lemme 1.1.13, on sait que le morphisme  $\vartheta'$  est propre et maximal. Fixons un ouvert  $U$  de  $S$  pour lequel le morphisme  $(U_T)_{\text{red}} \rightarrow U_{\text{red}}$  soit un isomorphisme et notons  $U' = S' \times_S U$  l'image réciproque de  $U$  par  $\theta$ . On a par ailleurs le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} [(U_T)_{\text{red}}] \times_{U_{\text{red}}} [S' \times_S U_{\text{red}}] & \xrightarrow{(16)} & S' \times_S U_{\text{red}} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (U_T)_{\text{red}} & \xrightarrow{(\theta_U)_{\text{red}}} & U_{\text{red}}. \end{array}$$

Comme le morphisme

$$[T' \times_{S'} U']_{\text{red}} \rightarrow (U')_{\text{red}}$$

est obtenu à partir de (16) en passant aux structures réduites, on voit qu'il s'agit d'un isomorphisme et donc que  $\theta'$  est un éclatement abstrait. Lorsque  $U$  est dense dans  $S$ , le morphisme  $\theta$  étant ouvert on voit qu'il en est de même de  $U'$ .

Supposons maintenant que  $\tau : T' \rightarrow T$  et  $\theta : T \rightarrow S$  soient des éclatements abstraits. Fixons un ouvert (resp. un ouvert dense)  $U$  de  $S$  tel que le morphisme  $(U_T)_{\text{red}} \rightarrow U_{\text{red}}$  soit un isomorphisme. Par ce qui précède  $T' \times_S U \rightarrow T \times_S U$  est un éclatement abstrait donc il existe un ouvert (resp. un ouvert dense)  $V$  de  $T \times_S U$  pour lequel le morphisme  $(T' \times_T V)_{\text{red}} \rightarrow V_{\text{red}}$  est un isomorphisme. Notons  $W$  l'ouvert (resp. l'ouvert dense) de  $S$  contenu dans  $U$  image de  $V$  par l'isomorphisme  $(\theta_U)_{\text{red}}$ . On a alors

$$\begin{array}{ccccc} (T' \times_T V)_{\text{red}} & \xrightarrow{\text{iso.}} & V_{\text{red}} & \xrightarrow{\text{iso.}} & W_{\text{red}} \\ \parallel & \nearrow & & & \\ (T \times_S W)_{\text{red}} & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ (\theta_W)_{\text{red}} \end{array}$$

ce qui assure que  $\tau \circ \theta$  est un éclatement abstrait (resp. un éclatement abstrait générique) puisque les deux premières propriétés de la définition 1.2.19 sont stables par composition.

Supposons que l'éclatement abstrait  $\vartheta$  platifie le cycle  $\alpha$ , il suffit de remarquer que le morphisme  $\theta$  étant plat on a

$$T' \times_{S'} (Z_i)_{S'}^{\text{st}} = (T \times_S Z_i)_{T'}^{\text{st}}$$

pour conclure que  $\vartheta'$  platifie le cycle  $\theta^{\circledast} \alpha$ . □

*Remarque 1.2.20.* Supposons que  $\theta : T \rightarrow S$  soit un éclatement abstrait générique. Les schémas  $(Z_i)_T^{\text{st}}$  et  $(Z_i)_T$  sont génériquement isomorphes, autrement dit pour tout point maximal  $t$  de  $T$  on a l'égalité des fibres génériques

$$\left[ (Z_i)_T^{\text{st}} \right]_t = \left[ (Z_i)_T \right]_t.$$

Il suffit pour cela de remarquer que le point  $t$  appartient nécessairement à  $U_T$  et d'utiliser la définition du transformé strict.

**Lemme 1.2.21.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha \in Z(X/S, n)$  un cycle relatif. Il existe un éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifiant le cycle  $\alpha$ .*

DÉMONSTRATION. — Notons  $\vartheta : S_{\text{red}} \rightarrow S$  le morphisme canonique. Remarquons tout d'abord que ce morphisme est un éclatement abstrait générique et que l'isomorphisme naturel

$$Z(S_{\text{red}} \times_S X/S_{\text{red}}, n) = Z(X/S, n)$$

de la remarque 1.1.25 coïncide avec  $\vartheta_{\text{st}}^{\otimes}$ . En particulier on peut supposer  $S$  réduit. Écrivons le cycle  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Comme  $S$  est réduit, le théorème de platitude générique 6.9.1 de [51] assure par récurrence qu'il existe un ouvert dense  $U$  de  $S$  tel que les schémas  $U \times_S Z_i$  soit plats sur  $U$ . Le lemme découle alors du théorème de platification par éclatement démontré par M. Raynaud et L. Gruson dans [112, théorème 5.2.2].  $\square$

*Remarque 1.2.22.* Dans le lemme 1.2.21 on peut en fait platifier  $\alpha$  par un véritable éclatement du schéma  $S$ .

**Lemme 1.2.23.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha$  un élément de  $Z(X/S, n)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout  $K$ -point épais de  $S$ , les cycles  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha$  ne dépendent pas de l'épaississement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  choisi,*
2. *Pour tout éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifiant  $\alpha$  et pour tout  $K$ -point  $\underline{t}_1, \underline{t}_2$  de  $T$  tels que  $\theta \circ \underline{t}_1 = \theta \circ \underline{t}_2$  les cycles*

$$\underline{t}_1^{\otimes} \theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha = \underline{t}_2^{\otimes} \theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha$$

*coïncident.*

DÉMONSTRATION. — Écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ .

Supposons la première condition satisfaite et donnons nous un éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifiant  $\alpha$ . Notons  $t_1, t_2$  le lieu des  $K$ -points  $\underline{t}_1$  et  $\underline{t}_2$  et  $s$  le lieu du  $K$ -point  $\underline{s}$  image de  $\underline{t}_1, \underline{t}_2$  par  $\theta$ . L'éclatement  $\theta$  étant un morphisme birationnel d'après la remarque 1.2.16, si  $s$  est un point maximal de  $S$  on a nécessairement  $\underline{t}_1 = \underline{t}_2$  et l'égalité recherchée est immédiate. Supposons que  $s$  ne soit pas maximal. Dans ce cas en utilisant la remarque 1.2.10, on sait qu'il existe une extension  $E/K$  telle que les  $E$ -points  $(\underline{t}_1)_E, (\underline{t}_2)_E$  de  $T$  soient épais. Choisissons pour chacun d'eux des épaississements  $(\mathcal{O}_1, \tau_1, \sigma_1)$  et  $(\mathcal{O}_2, \tau_2, \sigma_2)$  de sorte que l'on ait le diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{\tau_1} & T \\
 & \nearrow^{\sigma_1} & & \searrow^{t_1} & \nearrow^{\theta} \\
 \text{Spec}(E) & \longrightarrow & \text{Spec}(K) & & S \\
 & \searrow^{\sigma_2} & & \nearrow^{t_2} & \searrow^{\theta} \\
 & & \mathcal{O}_2 & \xrightarrow{\tau_2} & T
 \end{array}$$

Comme  $\theta$  est birationnel, les triplets  $(\mathcal{O}_1, \theta \circ \tau_1, \sigma_1)$  et  $(\mathcal{O}_2, \theta \circ \tau_2, \sigma_2)$  sont deux épaissements d'un même  $E$ -point et notre hypothèse nous assure que

$$(\mathcal{O}_1, \theta \circ \tau_1, \sigma_1)^{\otimes} \alpha = (\mathcal{O}_2, \theta \circ \tau_2, \sigma_2)^{\otimes} \alpha.$$

Le transformé strict de  $\alpha$  par  $\theta$  est alors donné par

$$\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [(Z_i)_T^{\text{st}}]$$

où par hypothèse  $(Z_i)_T^{\text{st}}$  est un sous-schéma fermé de  $X_T$  plat sur  $T$  que l'on sait être génériquement isomorphe à  $(Z_i)_T$  d'après la remarque 1.2.20. Cela entraîne que  $\mathcal{O}_1 \times_T (Z_i)_T^{\text{st}}$  est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{O}_1 \times_S X$  plat sur  $\mathcal{O}_1$  génériquement isomorphe à  $\mathcal{O}_1 \times_S Z_i$  et donc par définition que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{O}_1, \theta \circ \tau_1, \sigma_1)^{\otimes} \alpha &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec}(E) \times_{\mathcal{O}_1} (\mathcal{O}_1 \times_T (Z_i)_T^{\text{st}}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec}(E) \times_{\text{Spec}(K)} (\text{Spec}(K) \times_T (Z_i)_T^{\text{st}}) \right] = \left( t_1^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha] \right)_E
 \end{aligned}$$

En procédant de même on obtient l'égalité

$$(\mathcal{O}_1, \theta \circ \tau_1, \sigma_1)^{\otimes} \alpha = \left( t_2^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha] \right)_E$$

et la seconde assertion est alors une conséquence de la remarque 1.1.18.

Réciproquement supposons la seconde condition satisfaite et donnons nous deux épaissements  $(\mathcal{O}_1, \tau_1, \sigma_1)$  et  $(\mathcal{O}_1, \tau_1, \sigma_1)$  d'un même  $K$ -point  $\underline{s}$ . D'après le lemme 1.2.21 il existe un éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifant le cycle  $\alpha$ . L'image du point générique du trait  $\mathcal{O}_1$  étant un point maximal et sachant d'après la remarque 1.2.16 que l'éclatement  $\theta$  est un morphisme birationnel, le critère valuatif de propreté [51, thm 7.3.8] appliqué au morphisme propre  $\theta$  nous donne un relèvement canonique

$$\begin{array}{ccc}
 & & T \\
 & \nearrow^{t_1} & \downarrow^{\theta} \\
 \text{Spec } K & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\tau_1} S \\
 & \searrow^{\underline{s}} & \nearrow^{\tau_1'}
 \end{array}$$

Le sous-schéma  $\mathcal{O}_1 \times_T (Z_i)_{\mathcal{O}_1}^{\text{st}}$  étant plat et génériquement isomorphe à  $\mathcal{O}_1 \times_S (Z_i)$  on a

$$(\mathcal{O}_1, \tau_1, \sigma_1)^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec } K \times_{\mathcal{O}_1} (\mathcal{O}_1 \times_T (Z_i)_{\mathcal{O}_1}^{\text{st}}) \right] = \underline{t}_1^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha].$$

De même on obtient

$$(\mathcal{O}_2, \tau_2, \sigma_2)^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec } K \times_{\mathcal{O}_2} (\mathcal{O}_2 \times_T (Z_i)_{\mathcal{O}_2}^{\text{st}}) \right] = \underline{t}_2^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha]$$

et le lemme en découle.  $\square$

**1.2.3. Existence et unicité du changement de base.** — Nous abordons maintenant la question de l'existence et de l'unicité du changement de base. À cet égard le résultat essentiel est la proposition 1.2.26 dont la démonstration utilise lemme suivant.

**Lemme 1.2.24.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma,  $s$  un point de  $S$  non maximal et  $\alpha$  un élément de  $\mathcal{Z}(X/S, n)$ . Alors en notant  $p$  l'exposant caractéristique du corps résiduel  $\kappa(s)$ , il existe un unique cycle*

$$s^{\otimes} \alpha \in \mathcal{Z}(X_s/\kappa(s), n)[1/p]$$

vérifiant pour tout  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de lieu  $s$

$$\underline{s}^{\otimes} \alpha = (s^{\otimes} \alpha)_K.$$

DÉMONSTRATION. — L'unicité d'un tel cycle résulte de la remarque 1.1.18. On sait par le lemme 1.2.21 qu'il existe un éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifiant  $\alpha$ . Le morphisme  $\theta$  étant surjectif de type fini, il existe une extension normale finie  $E/\kappa(s)$  et un  $E$ -point  $\underline{t}$  de  $T$  tel que

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(E) & \xrightarrow{\underline{t}} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\kappa(s)) & \xrightarrow{s} & S. \end{array}$$

On peut considérer le cycle relatif

$$\beta = \underline{t}^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha].$$

Il suffit de voir que ce cycle provient d'un cycle  $\gamma$  sur  $X_s$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}[1/p]$ , ce dernier étant nécessairement unique d'après la remarque 1.1.18. En effet écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Donnons nous un épaississement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  d'un  $K$ -point épais  $\underline{s}$ . L'image du point générique du trait  $\mathcal{O}$  étant un point maximal et sachant d'après la remarque 1.2.16 que l'éclatement  $\theta$  est un morphisme birationnel, le critère valuatif de propreté [51, thm

7.3.8] appliqué au morphisme propre  $\theta$  nous donne un relèvement canonique

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\underline{t}'} & T \\
 & \nearrow \tau' & \downarrow \theta \\
 \text{Spec } K & \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O} \xrightarrow{\tau} & S. \\
 & \searrow \underline{s} & \\
 & & 
 \end{array}$$

Le sous-schéma  $\mathcal{O} \times_T (Z_i)_{\mathcal{O}}^{\text{st}}$  étant plat et génériquement isomorphe à  $\mathcal{O} \times_S Z_i$  on a

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec } K \times_{\mathcal{O}} (\mathcal{O} \times_T (Z_i)_{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \right] = (\underline{t}')^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha].$$

Fixons une extension composée  $F$  de  $K$  et  $E$  par rapport à  $\kappa(s)$ , les  $F$ -points  $(\underline{t}')_F$  et  $(\underline{t})_F$  coïncidant après composition par  $\theta$  le lemme 1.2.23 nous assure que

$$\begin{aligned}
 [(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha]_F &= (\underline{t})_F^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha] = (\underline{t}')_F^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha] \\
 &= (\beta)_F = \gamma_F.
 \end{aligned}$$

La remarque 1.1.18 nous donne donc  $\gamma_K = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha$  et  $\gamma$  est donc le cycle  $s^{\otimes} \alpha$  recherché.

Nous allons maintenant voir que  $\beta$  provient bien d'un cycle sur  $X_s$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}[1/p]$ . Notons pour simplifier  $G$  le groupe de Galois de  $E/\kappa(s)$ . Chaque élément  $g$  du groupe de Galois nous donne deux  $E$ -points  $\underline{t}$  et  $\underline{t} \circ g$  de  $T$  vérifiant  $\theta \circ \underline{t} = \theta \circ (\underline{t} \circ g)$ . Le lemme 1.2.23 nous assure alors que  $\beta = g^{\otimes} \beta$  autrement dit que le cycle  $\beta$  est invariant par Galois. Il suffit donc de voir que l'extension  $E/\kappa(s)$  induit un isomorphisme

$$Z(X)[1/p] = \left( Z(X_E)[1/p] \right)^G.$$

En utilisant la remarque 1.1.18, il s'agit de voir que les cycles invariants par Galois sur  $X_E$  proviennent après changement de base de cycles sur  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}[1/p]$  sur  $X$ . Pour qu'un cycle algébrique sur  $X_E$  soit invariant par Galois, il faut et il suffit qu'il soit combinaison linéaire de cycles de la forme

$$\sum_{g \in G/H} \overline{\{g(w)\}} \quad (16)$$

où  $w$  est un point de  $X_E$  de stabilisateur  $H$  dans  $G$ . Il suffit donc de montrer que chaque cycle de cette forme provient d'un cycle algébrique sur  $X$  par changement de base. Notons  $Z$  le sous-schéma fermé intègre de  $X$  dont le point générique est l'image de  $w$ . Les points  $g(w)$  lorsque  $g$  parcourt  $G/H$  sont les points maximaux du schéma  $Z_E$ . Par ailleurs les multiplicités des composantes irréductibles de  $Z_E$  sont toutes égales

$$m(\overline{\{g(w)\}}, Z_E) = m(\overline{\{w\}}, Z_E) = \text{lg}_{\mathcal{O}_{Z_E, w}}(\mathcal{O}_{Z_E, w}).$$

D'après la seconde assertion de la proposition 4.7.3 de [54] cette longueur est une puissance de  $p$ . En notant  $e$  l'exposant de  $p$  dans cette longueur, on voit que le cycle  $1/p^e [Z]$  admet le cycle (16) pour image après changement de base.  $\square$



**Corollaire 1.2.25.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma,  $\alpha$  un élément de  $\mathcal{Z}(X/S, n)$  et  $\theta : T \rightarrow S$  un éclatement abstrait générique platifiant  $\alpha$ . Alors pour tout  $K$ -point  $\underline{t}$  de  $T$  de lieu  $s$  dans  $S$  on a*

$$\underline{t}^{\odot} \left[ \theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha \right] = (s^{\otimes} \alpha)_K.$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que le lieu  $t$  de  $\underline{t}$  soit un point maximal. Alors comme  $\theta$  est un morphisme birationnel d'après la remarque 1.2.16, le point  $s$  est un point maximal. L'égalité voulue découle alors de la remarque 1.2.20.

Supposons maintenant que  $t$  ne soit pas un point maximal. La démonstration du lemme 1.2.24 assure qu'il existe une extension  $E/\kappa(s)$  et un  $E$ -point  $\underline{t}'$  tels que

$$(s^{\otimes} \alpha)_K = (\underline{t}')^{\odot} \theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha.$$

Fixons une extension composée  $F$  de  $K$  et  $E$  sur  $\kappa(s)$ . Les  $F$ -points  $(\underline{t})_F$  et  $(\underline{t}')_F$  coïncidant après composition par  $\theta$ , l'égalité voulue découle du lemme 1.2.23 et de la remarque 1.1.18.  $\square$

**Proposition 1.2.26.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma,  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de  $S$ -schémas et  $\alpha$  un élément de  $\mathcal{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ . Il existe un unique cycle*

$$\theta^{\otimes} \alpha \in \mathcal{Z}(X \times_S T/T, n)_{\mathbb{Q}}$$

*tel que pour tout  $K$ -point épais ou maximal  $\underline{t}$  de  $T$  dont l'image  $\underline{s}$  par  $\theta$  soit un  $K$ -point épais ou maximal de  $S$ , on a*

$$\underline{t}^{\otimes} (\theta^{\otimes} \alpha) = \underline{s}^{\otimes} \alpha. \quad (17)$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $T_1, \dots, T_r$  les composantes irréductibles de  $T$ ,  $t_i$  le point générique de  $T_i$  et  $s_i$  son image dans  $S$ . Pour simplifier nous noterons  $K_i$  le corps résiduel de  $T$  au point  $t_i$ . Supposons qu'un tel cycle  $\beta$  existe. La condition imposée prescrit les valeurs du cycle recherché  $\beta$  aux points maximaux  $t_1, \dots, t_r$  de  $T$  et l'unicité résulte donc de la remarque 1.1.25. On sait en outre qu'en notant  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \sum_Z \beta_Z [Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X_T$  de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant une composante irréductible de  $T$ , la multiplicité  $\beta_Z$  de  $Z$  dans  $\beta$  est donnée par

$$\beta_Z = m(Z_{t_i}, (s_i^{\otimes} \alpha)_{K_i})$$

où  $T_i$  est la composante irréductible de  $T$  dominée par  $Z$ .

Tout revient donc à prouver que ce cycle satisfait bien les conditions imposées. Sachant qu'il a été défini de manière à vérifier (17) lorsque  $\underline{t}$  est maximal, on peut supposer que  $\underline{t}$  est un  $K$ -point épais. Fixons un épaississement  $(\mathcal{O}', \tau', \sigma')$  de ce dernier ainsi qu'un éclatement abstrait générique  $\vartheta : S' \rightarrow S$  platifiant  $\alpha$ . L'image du point générique de  $\mathcal{O}'$  étant un point maximal de  $T$ , on peut supposer quitte à réordonner les composantes irréductibles qu'il s'agit de  $T_1$ . Le corps des fonctions de  $\mathcal{O}_1$  est alors l'extension de type fini  $K_1$  de  $\kappa(s)$ . Le morphisme  $\vartheta$  étant surjectif de type fini, il existe une extension de type fini  $E$  de  $\kappa(s)$  tel que le  $E$ -point  $(s_1)_E$  se relève à  $S'$ , quitte à prendre une extension composée de  $K_1$  et  $E$  sur  $\kappa(s)$  on peut supposer que

$E$  est une extension de type fini de  $K_1$ . Il existe d'après la proposition 7.1.7 de [54] un trait  $\mathcal{O}''$  de corps des fonctions  $E$  et un morphisme dominant de trait

$$\varrho : \mathcal{O}'' \rightarrow \mathcal{O}'$$

envoyant le point fermé sur le point fermé et induisant aux niveaux des corps de fonctions l'extension  $E/K_1$ . En utilisant le critère valuatif de propreté [51, thm 7.3.8] on obtient de la sorte un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spec}(E) & \xrightarrow{\eta''} & \mathcal{O}'' & \xrightarrow{\tau''} & S' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \varrho & & \downarrow \vartheta & & \\ \text{Spec}(K_1) & \xrightarrow{\eta'} & \mathcal{O}' & \xrightarrow{\tau'} & T & \xrightarrow{\theta} & S & & \end{array}$$

dans lequel  $\eta'$  et  $\eta''$  sont les points génériques de  $\mathcal{O}'$  et  $\mathcal{O}''$ . Le corps  $K$  et le corps résiduel de  $\mathcal{O}''$  en son point fermé étant deux extensions du corps résiduel de  $\mathcal{O}'$  en son point fermé on peut fixer une extension composée  $F$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spec}(F) & \xrightarrow{\sigma''} & \mathcal{O}'' & \xrightarrow{\tau''} & S' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \varrho & & \downarrow \vartheta & & \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\sigma'} & \mathcal{O}' & \xrightarrow{\tau'} & T & \xrightarrow{\theta} & S & & \\ & & \uparrow \iota & & & & & & \end{array}$$

Pour chaque sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X_T$  de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant  $T_1$ , le schéma  $\mathcal{O}' \times_T Z$  possède d'après le lemme 1.2.11 une unique composante irréductible  $\mathcal{Z}$  dominant  $\mathcal{O}'$ . Notons  $\gamma$  le cycle relatif

$$\gamma = \sum_Z \beta_Z[\mathcal{Z}]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X_T$  de dimension  $n$  sur  $T$  et dominant  $T_1$ . La construction du cycle  $\beta$  nous assure que  $(s^{\otimes} \alpha)_{K_1} = \eta^{\otimes} \gamma$ , en utilisant le corollaire 1.2.25 on voit donc que

$$\begin{aligned} (\eta'')^{\otimes} \left[ (\tau'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) \right] &= (\tau'' \circ \eta'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (s^{\otimes} \alpha)_E \\ &= (\eta^{\otimes} \gamma)_E = (\eta'')^{\otimes} (\varrho^{\otimes} \gamma) \end{aligned}$$

ce qui entraîne d'après la remarque 1.1.25 que

$$(\tau'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = \varrho^{\otimes} \gamma.$$

En utilisant la proposition 1.1.32 et la définition de l'image inverse le long d'un point épais, on voit donc que

$$\begin{aligned} (\underline{s}'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) &= (\sigma'')^{\otimes} (\varrho^{\otimes} \gamma) = [(\sigma')^{\otimes} \gamma]_F \\ &= (\mathcal{O}'', \tau'', \sigma'')^{\otimes} \beta = (\underline{t}^{\otimes} \beta)_F. \end{aligned}$$

Supposons que  $\underline{s}$  soit maximal. Le morphisme  $\vartheta$  étant birationnel d'après la remarque 1.2.16, on peut voir  $\underline{s}$  comme un  $K$ -point maximal  $\underline{s}'$  de  $S'$ . Les  $F$ -points  $\underline{s}''$  et  $\underline{s}'_F$  induisent alors le même  $F$ -point de  $S$  et le lemme 1.2.23 nous donne

$$(\underline{s}^{\otimes} \alpha)_F = (\underline{s}'_F)^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (\underline{s}'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (\underline{t}^{\otimes} \beta)_F.$$

La remarque 1.1.18 nous assure finalement que  $\underline{t}^{\otimes}(\beta) = \underline{s}^{\otimes} \alpha$ , ce que nous voulions.

Supposons maintenant que  $\underline{s}$  soit un  $K$ -point épais et choisissons lui un épaississement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ . L'image du point générique du trait  $\mathcal{O}$  étant un point maximal et sachant d'après la remarque 1.2.16 que l'éclatement  $\vartheta$  est un morphisme birationnel, le critère valuatif de propreté [51, thm 7.3.8] appliqué au morphisme propre  $\vartheta$  nous donne un relèvement canonique

$$\begin{array}{ccc} & \underline{s}' & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Spec } K & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{O} \xrightarrow{\tau} S' \\ & \searrow & \downarrow \vartheta \\ & & S. \\ & \curvearrowleft & \\ & \underline{s} & \end{array}$$

Écrivons le cycle  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Le sous-schéma  $\mathcal{O} \times_T (Z_i)_{\text{T}}^{\text{st}}$  étant plat et génériquement isomorphe à  $\mathcal{O} \times_S Z_i$  on a

$$\underline{s}^{\otimes} \alpha = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left[ \text{Spec } K \times_{\mathcal{O}} (\mathcal{O} \times_T (Z_i)_{\text{T}}^{\text{st}}) \right] = (\underline{s}')^{\otimes} [\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha].$$

Comme précédemment les  $F$ -points  $\underline{s}''$  et  $\underline{s}'_F$  induisent alors le même  $F$ -point de  $S$  et le lemme 1.2.23 nous donne

$$\underline{s}'_F{}^{\otimes} \alpha = (\underline{s}'_F)^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (\underline{s}'')^{\otimes} (\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (\underline{t}^{\otimes} \beta)_F$$

et la remarque 1.1.18 suffit pour conclure la démonstration.  $\square$

*Remarque 1.2.27.* En général pour un élément  $\alpha \in \mathcal{Z}(X/S, n)$  et un morphisme  $\theta : T \rightarrow S$  quelconque le cycle  $\theta^{\otimes} \alpha$  n'est pas nécessairement à coefficients entiers, en revanche la construction de ce cycle implique que les dénominateurs pouvant apparaître ne peuvent avoir comme facteurs premiers que les caractéristiques résiduelles de  $S$  aux points images des points maximaux de  $T$ . En particulier lorsque  $S$  est de caractéristique nulle, le cycle  $\theta^{\otimes} \alpha$  est à coefficients entiers.

La proposition 1.2.26 donne un préfaisceau  $\underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  de cycles relatifs à coefficients rationnels sur  $X$ . Ce dernier associe à un  $S$ -schéma  $T$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel

$$\underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}(T) = \mathcal{Z}(X \times_S T/T, n)_{\mathbb{Q}}$$

et à un morphisme de  $T' \rightarrow T$  de  $S$ -schémas le morphisme de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$\theta^{\otimes} : \mathcal{Z}(X \times_S T/T, n)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{Z}(X \times_S T'/T', n)_{\mathbb{Q}}.$$

Le lemme 1.2.12 nous donne immédiatement le résultat suivant qui prouve que le changement de base défini par A. Suslin et V. Voevodsky est la seule extension naturelle des changements de base plats.

**Corollaire 1.2.28.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma.*

1.  $\underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  est un préfaisceau de cycles relatifs.
2. Tout préfaisceau de cycles algébriques relatifs à coefficients rationnels sur  $X$  est un sous-préfaisceau de  $\underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ .

Dans la suite nous dirons qu'un cycle  $\alpha$  est universellement entier lorsqu'il est universellement rationnel et que d'autre part pour tout morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  le changement de base  $\theta^{\otimes} \alpha$  est un cycle relatif à coefficients entiers. Nous noterons  $z(X/S, n)$  le sous-groupe formé des cycles universellement entiers.

**Lemme 1.2.29.** *Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas,  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha \in \underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)$  un cycle relatif. On a l'inclusion*

$$\text{supp}(\theta^{\otimes} \alpha) \subset \theta_X^{-1}(\text{supp}(\alpha)).$$

DÉMONSTRATION. — Comme  $\theta^{\otimes} \alpha$  est un cycle relatif, on peut se ramener à supposer que le morphisme  $\theta$  est en fait le morphisme associé à un point  $s$  de  $S$ . En outre l'inclusion étant immédiate lorsque  $s$  est maximal, on peut supposer que ce n'est pas le cas et par la remarque 1.2.10 prendre une extension  $K/\kappa(s)$  de sorte que le  $K$ -point

$$\begin{array}{ccc} & \underline{s} & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Spec}(K) & \longrightarrow & \text{Spec}(\kappa(s)) \xrightarrow{s} S \end{array}$$

soit épais. Il suffit alors de voir que le résultat est vrai pour le morphisme  $\underline{s}$ . Fixons un épaississement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  et écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Quitte à réordonner les  $Z_i$  on peut supposer que les  $k$  premiers sont ceux dominant la composante irréductible de  $S$  ayant pour point générique l'image par  $\tau$  du point générique de  $\mathcal{O}$ . On a alors

$$\underline{s}^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^k [\text{Spec}(K) \times_{\mathcal{O}} Z_i]$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est l'unique composante irréductible de  $\mathcal{O} \times_S Z_i$  dominant  $\mathcal{O}$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{supp}(\underline{s}^{\otimes} \alpha) &\subset \sigma_X^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Z}_i \right) \subset \sigma_X^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^k (\mathcal{O} \times_S Z_i)_{\text{red}} \right) \\ &\subset \theta_X^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^r Z_i \right) = \theta_X^{-1} \text{supp}(\alpha) \end{aligned}$$

et prouve le lemme. □

Notons  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)$  le groupe des cycles relatifs équidimensionnels universellement rationnels,  $z_{\text{equi}}(X/S, n)$  le sous-groupe formé des cycles universellement entiers et posons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X/S, n) &= C(X/S, n) \cap \mathcal{Z}(X/S, n) & \mathcal{C}_{\text{equi}}(X/S, n) &= C(X/S, n) \cap \mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n) \\ c(X/S, n) &= C(X/S, n) \cap z(X/S, n) & c_{\text{equi}}(X/S, n) &= C(X/S, n) \cap z_{\text{equi}}(X/S, n). \end{aligned}$$

Le lemme 1.2.29 nous donne alors le

**Corollaire 1.2.30.** *Les groupes abéliens  $\mathcal{C}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ ,  $c(X/S, n)$ ,  $\mathcal{C}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ ,  $c_{\text{equi}}(X/S, n)$  ainsi que les groupes  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  et  $z_{\text{equi}}(X/S, n)$  sont stables par changement de base.*

DÉMONSTRATION. — Fixons un morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$ . Par construction le support de  $\theta^{\otimes} \alpha$  est maximal sur  $T$  et de dimension  $n$  sur  $T$ . Les lemmes 1.1.9 et 1.2.29 nous donnent l'inégalité

$$\dim(\text{supp}(\theta^{\otimes} \alpha)/T) \leq \dim(\text{supp}(\alpha)/S) = n$$

le théorème de semi-continuité de Chevalley implique par ailleurs l'inégalité inverse

$$\dim(\text{supp}(\theta^{\otimes} \alpha)/T) \geq n.$$

Cela assure que la fonction  $\dim(\text{supp}(\theta^{\otimes} \alpha)/T)$  est constante et prouve que  $\theta^{\otimes} \alpha$  est bien un cycle équidimensionnel. Le cas à support propre découle lui aussi du lemme 1.2.29.  $\square$

*Notation 1.2.31.* Dans la suite, on pose pour tout  $S$ -schéma  $T$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}(T) &= \mathcal{Z}(T \times_S X/T)_{\mathbb{Q}} & \underline{\mathcal{Z}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} &= \mathcal{Z}_{\text{equi}}(T \times_S X/T, n)_{\mathbb{Q}} \\ \underline{z}(X/S, n) &= z(T \times_S X/T, n) & \underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n)(T) &= z_{\text{equi}}(T \times_S X/T, n) \\ \underline{\mathcal{C}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}(T) &= \mathcal{C}(T \times_S X/T)_{\mathbb{Q}} & \underline{\mathcal{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} &= \mathcal{C}_{\text{equi}}(T \times_S X/T, n)_{\mathbb{Q}} \\ \underline{c}(X/S, n) &= c(T \times_S X/T, n) & \underline{c}_{\text{equi}}(X/S, n)(T) &= c_{\text{equi}}(T \times_S X/T, n). \end{aligned}$$

Le corollaire 1.2.30, nous assure que l'on obtient ainsi des préfaisceaux sur  $\text{Sch}_S$ .

**Lemme 1.2.32.** *Supposons  $S$  géométriquement unibranche et donnons nous un  $S$ -schéma  $X$ . Pour tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ , le cycle relatif  $[Z]$  associé à  $Z$  appartient à  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)$ .*

DÉMONSTRATION. — Quitte à remplacer  $Z$  par une de ses composantes irréductibles on peut supposer que  $Z$  est intègre. D'après le lemme 1.2.21, il existe un éclatement abstrait générique  $\theta : T \rightarrow S$  platifiant le cycle  $[Z]$  autrement dit tel que le transformé strict  $Z_T^{\text{st}}$  soit plat sur  $T$ . Fixons deux  $K$ -points  $\underline{t}_1$  et  $\underline{t}_2$  de  $T$  tels que  $\theta \circ \underline{t}_1 = \theta \circ \underline{t}_2$ . Le lemme 1.2.23 nous assure qu'il s'agit de voir que

$$\underline{t}_1^{\otimes} [Z_T^{\text{st}}] = \underline{t}_2^{\otimes} [Z_T^{\text{st}}]$$

autrement dit que l'on a bien l'égalité des cycles

$$[\text{Spec}(K) \times_{\underline{t}_1} Z_T^{\text{st}}] = [\text{Spec}(K) \times_{\underline{t}_2} Z_T^{\text{st}}].$$

Comme  $S$  est géométriquement unibranche et que  $Z$  est équidimensionnel, le schéma  $T \times_S Z$  est lui aussi équidimensionnel. L'immersion fermée de  $Z_T^{\text{st}}$  dans  $T \times_S Z$  étant un isomorphisme au

dessus des points génériques de  $T$ , on voit que cette immersion est définie par un idéal nilpotent. Il s'ensuit que le sous-schéma fermé  $\mathrm{Spec}(K) \times_S Z_T^{\mathrm{st}}$  de

$$\mathrm{Spec}(K) \times_S (T \times_S Z) = [\mathrm{Spec}(K) \times_S T] \times_{\mathrm{Spec}(K)} [\mathrm{Spec}(K) \times_S Z]$$

est défini par un idéal nilpotent.

Par ailleurs le morphisme  $\theta$  étant propre et dominant, la proposition 4.3.5 de [52] et la proposition 18.8.15 de [56] nous assurent que le schéma  $\mathrm{Spec}(K) \times_S T$  est géométriquement connexe. Cependant quitte à prendre une extension de  $K$ , la remarque 1.1.18 nous permet de supposer que  $K$  est algébriquement clos. Le schéma  $\mathrm{Spec}(K) \times_S T$  est donc connexe ce qui permet de se ramener au cas où il est intègre. Notons alors  $Z_1, \dots, Z_r$  les composantes irréductibles de  $\mathrm{Spec}(K) \times_S Z$  munies de leur structure réduite. Comme  $K$  est algébriquement clos et  $\mathrm{Spec}(K) \times_S T$  est intègre, le corollaire 4.5.8 de [54] nous assure que les

$$Z_i \times_{\mathrm{Spec}(K)} (\mathrm{Spec}(K) \times_S T) \tag{18}$$

sont irréductibles et donc d'après la proposition 4.6.5 de *loc.cit.* qu'ils sont intègres. Les composantes irréductibles de  $\mathrm{Spec}(K) \times_S (T \times_S Z)$  sont donc précisément les schémas (18) et le cycle associé à  $\mathrm{Spec}(E) \times_S Z_T^{\mathrm{st}}$  est donné par une unique combinaison linéaire

$$[\mathrm{Spec}(K) \times_S Z_T^{\mathrm{st}}] = \sum_{i=1}^r n_i [Z_i \times_{\mathrm{Spec}(K)} (\mathrm{Spec}(K) \times_S T)].$$

Le résultat recherché est alors une conséquence de la proposition 1.1.32. □

Ce lemme nous donne immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.33.** *Supposons  $S$  géométriquement unibranche. Soit  $X$  un  $S$ -schéma.*

1. *Le groupe abélien  $\mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ .*
2. *Le groupe  $\mathcal{C}_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  propres sur  $S$  et équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ .*

En supposant en outre  $S$  régulier, le corollaire précédent nous donne le résultat suivant.

**Corollaire 1.2.34.** *Supposons  $S$  régulier. Soit un  $S$ -schéma  $X$ .*

1. *Le groupe  $z_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ .*
2. *Le groupe  $c_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X$  propres sur  $S$  et équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ .*

**1.2.4. Descente plate.** — Les groupes de cycles algébriques relatifs introduits précédemment se comportent particulièrement bien par rapport aux changements de base par des morphismes surjectifs et plats.

**Lemme 1.2.35.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme surjectif et plat.*

1. *Les carrés de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccccc} z(X/S, n) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(X/S, n) & \longrightarrow & Z(X/S, n) \\ \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ z(X \times_S T/T, n) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(X \times_S T/T, n) & \longrightarrow & Z(X \times_S T/T, n). \end{array}$$

sont cartésiens.

2. *De même les carrés de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccccc} c(X/S, n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X/S, n) & \longrightarrow & C(X/S, n) \\ \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ c(X \times_S T/T, n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X \times_S T/T, n) & \longrightarrow & C(X \times_S T/T, n). \end{array}$$

sont cartésiens.

DÉMONSTRATION. — La seconde assertion se déduit de la première puisque les carrés

$$\begin{array}{ccccc} c(X/S, n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X/S, n) & \longrightarrow & C(X/S, n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ z(X/S, n) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(X/S, n) & \longrightarrow & Z(X/S, n) \end{array}$$

sont cartésiens par définition. Supposons que  $\alpha$  soit un élément de  $Z(X/S, n)$  dont l'image par  $\theta^{\otimes}$  appartient au groupe  $\mathcal{Z}(X/S, n)$ . Fixons un éclatement abstrait générique  $\vartheta : S' \rightarrow S$  platifiant  $\alpha$  ainsi que des  $K$ -points  $\underline{s}_1, \underline{s}_2$  de  $S'$  vérifiant  $\vartheta \circ \underline{s}_1 = \vartheta \circ \underline{s}_2$ . Il s'agit de vérifier d'après le lemme 1.2.23 que les cycles  $\underline{s}_1^*(\vartheta_{\text{st}}^* \alpha)$  et  $\underline{s}_2^*(\vartheta_{\text{st}}^* \alpha)$  coïncident. On sait en utilisant le lemme 1.2.19 que dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\vartheta'} & T \\ \text{plat surj.} \downarrow \theta' & \square & \theta \downarrow \text{plat surj.} \\ S' & \xrightarrow{\vartheta} & S \end{array} \quad (19)$$

le morphisme  $\vartheta'$  est un éclatement abstrait générique platifiant  $\alpha$  et que

$$(\theta')^{\otimes}(\vartheta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha) = (\vartheta')_{\text{st}}^{\otimes}(\theta^{\otimes} \alpha).$$

Puisque  $\theta'$  est surjectif, il existe une extension  $F/K$  et des  $F$ -points  $t_1, t_2$  de  $T'$  rendant les carrés

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(F) & \xrightarrow{t_1} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \theta' \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\underline{s}_1} & S' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}(F) & \xrightarrow{t_2} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \theta' \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\underline{s}_2} & S' \end{array}$$

commutatifs. Par hypothèse  $\theta^{\otimes} \alpha$  appartient à  $\mathcal{Z}(X/S, n)$ , en utilisant le lemme 1.2.23, cela donne l'égalité

$$t_1^{\otimes} \left( (\vartheta')_{\text{st}}^{\otimes}(\theta^{\otimes} \alpha) \right) = t_2^{\otimes} \left( (\vartheta')_{\text{st}}^{\otimes}(\theta^{\otimes} \alpha) \right)$$

ce qui assure que les cycles  $\underline{s}_1^*(\vartheta_{\text{st}}^* \alpha)$  et  $\underline{s}_2^*(\vartheta_{\text{st}}^* \alpha)$  coïncident après extension à  $F$ . La remarque 1.1.18 permet alors de conclure.

Supposons maintenant que  $\theta^{\otimes} \alpha$  appartienne à  $z(X \times_S T/T, n)$  et donnons nous un morphisme de schémas  $\vartheta : S' \rightarrow S$ . Nous utilisons dans la suite les notations du carré (19). Par ce qui précède on sait que  $\alpha$  appartient à  $\mathcal{Z}(X/S, n)$  ce qui permet d'écrire via la functorialité des changements de base que

$$(\theta')^{\otimes} \vartheta^{\otimes} \alpha = (\tau')^{\otimes} \theta^{\otimes} \alpha$$

dans  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X \times_S T'/T', n)_{\mathbb{Q}}$ . En utilisant le corollaire 1.2.28 et le fait que le cycle  $\theta^{\otimes} \alpha$  soit supposé universellement à coefficients entiers, on voit que les cycles apparaissant dans l'égalité précédente sont à coefficients entiers. La platitude de  $\theta'$  nous assure alors que  $\vartheta^{\otimes} \alpha$  est à coefficients entiers et donc que  $\alpha$  est universellement à coefficients entiers.  $\square$

### 1.3. Multiplicités

Le calcul explicite des multiplicités intervenant dans les changements de base permet de voir — corollaire 1.3.13 — que le changement de base des cycles relatifs est profondément lié à la théorie de l'intersection. En particulier il permet d'effectuer sur une classe de cycles particuliers, nombres d'opérations de la théorie de l'intersection [43] sans recourir au passage à l'équivalence rationnelle et à ce titre est fondamental dans la construction des motifs mixtes de V. Voevodsky. On remarquera que dans l'exposé de la théorie des cycles relatifs donné par M. Levine dans les appendices de [98], le calcul explicite des multiplicités est au centre de toutes les définitions et démonstrations.

Dans la suite pour tout ce qui concerne les multiplicités de Samuel nous renvoyons le lecteur à l'appendice B.

**1.3.1. Cas géométriquement unibranche.** — Rappelons que pour le schéma  $S$ , les composantes connexes ne coïncident avec les composantes irréductibles qu'à la condition que ces dernières soient deux à deux disjointes ce qui revient à supposer que les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{S,s}$  sont irréductibles pour tout point de  $S$ . Cette condition est en particulier satisfaite par les schémas géométriquement unibranches d'après les définitions 23.2.1 de [53] et 6.15.1 de [54].

Supposons  $S$  géométriquement unibranche et notons  $S_1, \dots, S_r$  ses composantes irréductibles. D'après ce qui précède tout point  $s$  de  $S$  appartient à une unique composante irréductible  $S_k$  de  $S$ . Cette dernière munie de sa structure réduite est un schéma géométriquement unibranche intègre et en utilisant l'isomorphisme de la remarque 1.1.25, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X/S, n) & \xlongequal{\quad} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{Z}(X_i/S_i, n) & \longrightarrow \mathcal{Z}(X_k/S_k, n) \\ & \searrow & \downarrow s^{\otimes} \\ & & \mathcal{Z}(X_s, \kappa(s), n)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

$s^{\otimes}$

ce qui permet de se restreindre pour le calcul de  $s^{\otimes}$  au cas où  $S$  est un schéma intègre géométriquement unibranche.

**Dans la suite de cette sous-section nous supposons  $S$  géométriquement unibranche intègre.**



En anticipant un peu, nous utilisons les notations introduites dans la section 2.2 et la sous-section 2.3.1. En particulier  $S_s^h$  désigne le schéma local hensélien de  $S$  en un point  $s$  et pour un point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ , la notation  $S_{\bar{s}}^{sh}$  désigne le schéma strictement local de  $S$  au point  $\bar{s}$ .

Dans les démonstrations il est utile de constater que la notion de schémas géométriquement unibranches intègres est stable lorsque l'on passe à la droite affine ou aux hensélisés stricts ou non. Le lemme essentiel à cet égard est le suivant.

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $i \mapsto X_i$  un système projectif filtrant de schémas unibranches (resp. géométriquement unibranches) dont les morphismes de transition sont affines et maximaux. Alors la limite projective des  $X_i$  est un schéma unibranche (resp. géométriquement unibranche).*

DÉMONSTRATION. — La définition des schémas unibranches (resp. géométriquement unibranches) étant locale, nous pouvons supposer que  $X_i$  est le spectre d'un anneau  $A_i$  dont les anneaux locaux sont unibranches (resp. géométriquement unibranches). On dispose donc d'un système inductif filtrant d'anneaux  $i \mapsto A_i$  dont on note la colimite  $A$ . Dans la suite nous désignons les morphismes structuraux de ce système par

$$\phi_{ij} : A_i \rightarrow A_j \quad i \leq j \quad \phi_i : A_i \rightarrow A.$$

Fixons un idéal premier de  $\mathfrak{p}$  de  $A$ . Tout revient à vérifier que  $A_{\mathfrak{p}}$  est unibranche (resp. géométriquement unibranche). Notons  $\mathfrak{p}_i = \phi_i^{-1}(\mathfrak{p})$ . Comme le spectre de  $A_i$  est géométriquement unibranche, ses composantes irréductibles coïncident avec ses composantes connexes ce qui entraîne que  $\mathfrak{p}_i$  contient un unique idéal premier minimal  $\mathfrak{a}_i$ . Par ailleurs les morphismes de transition étant maximaux, on sait que  $\phi_{ij}^{-1}(\mathfrak{a}_j) = \mathfrak{a}_i$ . Considérons alors les systèmes inductifs filtrants

$$i \mapsto B_i = A_i/\mathfrak{a}_i \quad i \mapsto \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{a}_i$$

et notons  $B$  et  $\mathfrak{q}$  leur colimite respective. Nos hypothèses assurent que les

$$(B_i)_{\mathfrak{q}_i} = (A_i)_{\mathfrak{p}_i}$$

sont des anneaux locaux unibranches (géométriquement unibranches). D'après la proposition 5.13.3 de [54], l'idéal  $\mathfrak{q}$  est premier dans  $B$  et

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{p}} &= \operatorname{colim}_i (A_i)_{\mathfrak{p}_i} \\ &= \operatorname{colim}_i (B_i)_{\mathfrak{q}_i} = B_{\mathfrak{q}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Les  $(B_i)_{\mathfrak{q}_i}$  formant un système inductif filtrant d'anneaux locaux unibranches (resp. géométriquement unibranches) à morphismes de transition locaux et injectifs, le corollaire 5.13.4 de *loc.cit.* prouve que  $B_{\mathfrak{q}}$  est unibranche (resp. géométriquement unibranche) et l'assertion découle donc de (20).  $\square$

On déduit alors du lemme ci-dessus la propriété de stabilité que nous avons mentionnée précédemment.

**Corollaire 1.3.2.** *Soit  $s$  un point de  $S$  et  $\bar{s}$  un point géométrique de  $S$  de lieu  $s$ .*

1. *L'espace affine  $\mathbb{A}_S^n$  est géométriquement unibranche intègre.*
2. *Le schéma local hensélien  $S_s^h$  est géométriquement unibranche intègre.*
3. *Le schéma local strictement hensélien  $S_{\bar{s}}^{sh}$  est géométriquement unibranche intègre.*

DÉMONSTRATION. — L'espace affine  $\mathbb{A}_S^n$  étant intègre et la projection  $\mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  étant un morphisme normal, la première assertion est une conséquence immédiate du corollaire 11.3.14 de [55]. Par ailleurs on peut décrire les hensélisés stricts ou non via les limites projectives

$$S_s^{\text{h}} = \lim_{U \in (\mathcal{V}_s^{h,a})^{\text{op}}} U \quad S_{\bar{s}}^{\text{sh}} = \lim_{U \in (\mathcal{V}_{\bar{s}}^{\text{sh},a})^{\text{op}}} U$$

$\mathcal{V}_s^{h,a}$  désignant la catégorie des voisinages Nisnevich affines de  $s$  et  $\mathcal{V}_{\bar{s}}^{\text{sh},a}$  celle des voisinages étales affines de  $\bar{s}$ . Comme  $S$  est géométriquement unibranche, il résulte aussi du corollaire cité précédemment que ces systèmes projectifs sont formés de schémas géométriquement unibranches. Leurs morphismes de transition étant étales donc maximaux, le lemme 1.3.1 nous assure donc que les schémas  $S_s^{\text{h}}$  et  $S_{\bar{s}}^{\text{sh}}$  sont géométriquement unibranches. Comme  $S$  est géométriquement unibranche intègre, l'anneau local  $\mathcal{O}_{S,s}$  est géométriquement unibranche réduit. La proposition 18.6.12 de [56] montre finalement que le schéma local hensélien  $S_s^{\text{h}}$  est intègre et la proposition 18.8.15 de *loc. cit.* que le schéma local strictement hensélien  $S_{\bar{s}}^{\text{sh}}$  est géométriquement unibranche intègre.  $\square$

La stratégie adoptée dans [125] pour le calcul explicite des multiplicités intervenant dans le changement de base, consiste à introduire explicitement ces multiplicités — obtenues par une « extension » des multiplicités de Serre aux schémas géométriquement unibranches — et à vérifier ensuite que les cycles qu'elles définissent coïncident avec le changement de base via la caractérisation de ce dernier apparaissant dans la proposition 1.2.26. Avant d'introduire ces multiplicités dans la définition 1.3.4 nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 1.3.3.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma équidimensionnel et  $s$  un point de  $S$ . Alors pour tout point générique  $w$  d'une composante irréductible de la fibre  $X_s$  l'idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{X,w}$  est un idéal  $\mathfrak{m}_{X,w}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{X,w}$ .*

DÉMONSTRATION. — On peut supposer que  $S$  est affine spectre d'un anneau  $A$  intègre et noter  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier de  $A$  correspondant à  $s$ . D'après le lemme 1.1.11 on peut en outre supposer, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de  $w$  suffisamment petit, que le morphisme structural de  $X$  dans  $S$  est donné par une composition

$$X \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \longrightarrow S$$

dans laquelle  $n$  est un entier positif et  $q$  un morphisme quasi-fini maximal. Comme  $q$  est quasi-fini on sait d'après le paragraphe 7.4.4 de [50] que  $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}\mathcal{O}_{X,w}$  est un idéal  $\mathfrak{m}_{X,w}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{X,w}$ . Il suffit donc de voir que

$$\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)} = \mathfrak{m}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}. \quad (21)$$

D'après le corollaire 1.3.2 le schéma  $\mathbb{A}_S^n$  est géométriquement unibranche. Le morphisme  $q$  étant équidimensionnel de dimension 0, cela entraîne que le morphisme  $p$  apparaissant dans les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{q} & \mathbb{A}_S^n & \longrightarrow & S \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X_s & \xrightarrow{p} & \mathbb{A}_{\kappa(s)}^n & \longrightarrow & \text{Spec}(\kappa(s)) \end{array}$$

est lui aussi équidimensionnel de dimension 0. En particulier  $p(w)$  est le point générique de  $\mathbb{A}_{\kappa(s)}^n$ . Cela signifie que l'idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $A[x_1, \dots, x_n]$  correspondant à  $q(w)$  est minimal parmi les idéaux premiers  $\mathfrak{r}$  de  $A[x_1, \dots, x_n]$  vérifiant  $\mathfrak{r} \cap A = \mathfrak{p}$ . On a donc

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A[x_1, \dots, x_n]$$

et l'égalité (21) s'en déduit.  $\square$

Le lemme 1.3.3 assure en particulier que pour tout idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$  l'idéal  $I\mathcal{O}_{X,w}$  est un idéal  $\mathfrak{m}_{X,w}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{X,w}$  ce qui donne un sens aux multiplicités introduite dans la

**Définition 1.3.4.** Soient  $s$  un point de  $S$  et  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Étant donné un  $S$ -schéma équidimensionnel intègre  $X$  et une composante irréductible  $W$  de  $X_s$  de point générique  $w$ , on définit un nombre rationnel strictement positif en posant

$$m_I(W, [X]_s) = \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})}.$$

Les multiplicités introduites ci-dessus dépendent à priori du choix de l'idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$  — le corollaire 1.3.9 montrera qu'il n'en est rien. Ces dernières définissent naturellement des cycles via la définition suivante.

**Définition 1.3.5.** Soient  $s$  un point de  $S$  et  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Étant donné un  $S$ -schéma  $X$  et un cycle  $\alpha \in Z_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ , on définit un élément de  $Z_{\text{equi}}(X_s/\kappa(s), n)_{\mathbb{Q}}$  en posant

$$\alpha_{I,s} = \sum_W m_I(W, \alpha_{I,s})[W] \quad (22)$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $W$  de  $X_s$  de dimension  $n$  sur  $\kappa(s)$ . Dans l'égalité (22) l'entier rationnel  $m_I(W, \alpha_{I,s})$  est donné par la somme

$$m_I(W, \alpha_{I,s}) = \sum_Z m(Z, \alpha) m_I(W, [Z]_s) \quad (23)$$

prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$  tels que  $W$  soit une composante irréductible de  $Z_s$ .

Les multiplicités données par (23) satisfont la propriété d'additivité usuelle donnée par le

**Lemme 1.3.6.** Soient  $X$  un  $S$ -schéma équidimensionnel et  $s$  un point de  $S$ . Pour toute composante irréductible  $W$  de  $X_s$  de point générique  $w$

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})}.$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $X_1, \dots, X_r$  les composantes irréductibles de  $X$  contenant  $w$  et  $x_i$  le point générique de  $X_i$ . Par définition

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = \sum_{i=1}^r \text{lg}_{\mathcal{O}_{X,x_i}}(\mathcal{O}_{X,x_i}) \left[ \frac{e_{I\mathcal{O}_{X_i,w}}(\mathcal{O}_{X_i,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} \right].$$

En notant  $\mathfrak{p}_i$  l'idéal premier minimal de  $\mathcal{O}_{X,w}$  correspondant à la composante  $X_i$ , on a

$$\mathcal{O}_{X_i,w} = \mathcal{O}_{X,w}/\mathfrak{p}_i \quad \mathcal{O}_{X,x_i} = (\mathcal{O}_{X,w})_{\mathfrak{p}_i}$$

ce qui donne en vertu du lemme B.3.2

$$\begin{aligned} m_I(W, [X]_{I,s}) &= \sum_{i=1}^r \operatorname{lg}_{(\mathcal{O}_{X,w})_{\mathfrak{p}_i}} ((\mathcal{O}_{X,x_i})_{\mathfrak{p}_i}) \left[ \frac{e_I(\mathcal{O}_{X,w}/\mathfrak{p}_i)(\mathcal{O}_{X,w}/\mathfrak{p}_i)}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \operatorname{lg}_{(\mathcal{O}_{X,w})_{\mathfrak{p}_i}} ((\mathcal{O}_{X,x_i})_{\mathfrak{p}_i}) \left[ \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w}/\mathfrak{p}_i)}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} \right] \\ &= \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} \end{aligned}$$

ce que nous voulions.  $\square$

Le lemme suivant montre que les multiplicités introduites dans la définition 1.3.4 coïncident avec celle intervenant dans le changement de base pour les cycles plats équidimensionnels du corollaire 1.1.33 et dans le changement de base issu des multiplicités de Serre de la remarque 1.1.27.

**Lemme 1.3.7.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma,  $s$  un point de  $S$  et  $\alpha$  un élément de  $Z_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ .*

1. *Pour tout un idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$  on a*

$$\alpha_{I,s} = s^{\otimes} \alpha$$

*lorsque  $\alpha$  appartient à  $Z_{\text{Hilb}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ .*

2. *Lorsque  $S$  est régulier*

$$\alpha_{\mathfrak{m}_{S,s},s} = s^{\odot} \alpha$$

*où  $s^{\odot} \alpha$  est le changement de base de la remarque 1.1.27.*

DÉMONSTRATION. — (1). Par linéarité on peut supposer que  $\alpha = [Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  plat et équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Soit  $W$  une composante irréductible de  $Z_s$  et  $w$  son point générique. Comme  $\mathcal{O}_{Z,w}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module plat et que

$$\mathcal{O}_{Z_s,w} = \mathcal{O}_{Z,w}/\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{Z,w}$$

le lemme B.3.3 nous assure que

$$m_I(W, [\alpha]_{I,s}) = \frac{e_{I\mathcal{O}_{Z,w}}(\mathcal{O}_{Z,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} = \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_s,w}}(\mathcal{O}_{Z_s,w}) = m(W, s^{\otimes} \alpha).$$

(2). Notons  $d$  la dimension de l'anneau local  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Ce dernier étant régulier son idéal maximal  $\mathfrak{m}_{S,s}$  est engendré par un système de paramètres  $s_1, \dots, s_d$ . Par linéarité on peut supposer que  $\alpha = [Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Soit  $W$  une composante irréductible de  $Z_s$  et  $w$  son point générique. On sait d'après le théorème 14.10 de [105] que la multiplicité de  $\mathfrak{m}_{S,s}$  dans  $\mathcal{O}_{S,s}$  est égale à 1. En utilisant le théorème IV.1 de [121] on voit que

$$m_{\mathfrak{m}_{S,s}}(W, \alpha_{\mathfrak{m}_{S,s},s}) = e_{\mathfrak{m}_{S,s}\mathcal{O}_{Z,w}}(\mathcal{O}_{Z,w}) = \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z,w}}(\mathbf{K}(\underline{s}; \mathcal{O}_{Z,w}))$$

où  $\underline{s}$  désigne la suite  $(s_1, \dots, s_d)$ . Comme  $\mathbf{K}(\underline{s}; \mathcal{O}_{S,s})$  est un complexe de  $\mathcal{O}_{S,s}$ -modules libres on voit que

$$\mathbf{K}(\underline{s}; \mathcal{O}_{Z,w}) = \mathbf{K}(\underline{s}; \mathcal{O}_{S,s}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{Z,w} = \mathbf{K}(\underline{s}; \mathcal{O}_{S,s}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}^L \mathcal{O}_{Z,w}.$$

Par ailleurs la suite  $\underline{s}$  étant régulière, le complexe de Koszul  $K(\underline{s}; \mathcal{O}_{S,s})$  est quasi-isomorphe à  $\kappa(s)$  ce qui donne

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{m}_{S,s}}(W, \alpha_{\mathfrak{m}_{S,s},s}) &= \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z,w}} \left[ \kappa(s) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}^L \mathcal{O}_{Z,w} \right] \\ &= \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_s,w}} \left[ \kappa(s) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}^L \mathcal{O}_{Z,w} \right] = m(W, s^\circledast \alpha). \end{aligned}$$

et le lemme se trouve démontré.  $\square$

Le lemme suivant rassemble certaines propriétés utiles des multiplicités introduites dans les définitions 1.3.4 et 1.3.5. On remarquera qu'il utilise les résultats du corollaire 1.3.2.

**Lemme 1.3.8.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma équidimensionnel,  $s$  un point de  $S$  et  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . On fixe une composante irréductible  $W$  de  $X_s$  de point générique  $w$ .*

1. *Lorsque le morphisme structural de  $X$  est de la forme  $X \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  où  $q$  est un morphisme quasi-fini maximal, on a*

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = m_{I\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}}(W', [X]_{I, q(w)})$$

où  $W'$  est la composante irréductible de  $X_{q(w)}$  de point générique  $w$ .

2. *Soit  $\bar{s}$  un point géométrique de  $S$  de lieu  $s$ . On a les égalités entre multiplicités*

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = m_I(W, [S_s^{\text{sh}} \times_S X]_{I,s}) = m_I(W, [S_{\bar{s}}^{\text{sh}} \times_S X]_{I,\bar{s}}).$$

3. *Lorsque  $\mathcal{O}_{X,w}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module de type fini on a*

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = \frac{\dim_{F(S)}(\mathcal{O}_{X,w} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} F(S))}{[\kappa(w) : \kappa(s)]}$$

où  $F(S)$  est le corps des fonctions de  $S$ .

DÉMONSTRATION. — (1). La première assertion du lemme 1.3.7 nous assure que

$$m_I(\mathbb{A}_{\kappa(s)}^n, [\mathbb{A}_S^n]_{I,s}) = 1. \quad (24)$$

D'après le corollaire 1.3.2 le schéma  $\mathbb{A}_S^n$  est géométriquement unibranche. Le morphisme  $q$  étant équidimensionnel de dimension 0, cela entraîne que le morphisme  $p$  apparaissant dans les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{q} & \mathbb{A}_S^n & \longrightarrow & S \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X_s & \xrightarrow{p} & \mathbb{A}_{\kappa(s)}^n & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(\kappa(s)) \end{array}$$

est lui aussi équidimensionnel de dimension 0. En particulier  $q(w)$  est le point générique de  $\mathbb{A}_{\kappa(s)}^n$  et l'égalité (24) se traduit sous la forme

$$e_{I\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}) = e_I(\mathcal{O}_{S,s})$$

ce qui nous donne

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w})}{e_{I\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)})} = m_{I\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, q(w)}}(W', [X]_{I, q(w)}).$$

(2). Supposons que  $A$  soit un anneau local et  $B$  une ind- $A$ -algèbre locale strictement essentiellement étale, *i.e.* une  $B$  algèbre de la forme

$$\operatorname{colim}_{i \in I} A_i$$

où  $I$  est une catégorie filtrante essentiellement petite, les  $A_i$  des  $A$ -algèbres locales strictement essentiellement étales et les morphismes de transition des morphismes locaux. A fortiori  $B$  est un  $A$ -module plat et

$$\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B.$$

Le lemme B.3.3 nous donne donc que

$$e_I(A) = e_{IB}(B).$$

Les arguments étant les mêmes pour le cas strictement hensélien, nous nous contentons d'examiner le cas hensélien. Notons pour simplifier  $Y$  le schéma donné par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S_s^h & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Par construction  $\mathcal{O}_{S,s}^h$  est la ind- $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbre locale strictement essentiellement étale obtenue par

$$\mathcal{O}_{S,s}^h = \operatorname{colim}_A A$$

la colimite étant prise sur la catégorie des  $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbres locales strictement essentiellement étales munies des morphismes locaux. Cela entraîne que  $\mathcal{O}_{Y,w}$  est une ind- $\mathcal{O}_{X,w}$ -algèbre strictement essentiellement étale et donc d'après ce qui précède que

$$e_I(\mathcal{O}_{S,s}) = e_{I\mathcal{O}_{S,s}^h}(\mathcal{O}_{S,s}^h) \quad e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w}) = e_{I\mathcal{O}_{Y,w}}(\mathcal{O}_{Y,w}).$$

Ce qui donne bien

$$m_I(W, [X]_{I,s}) = m_I(W, [S_s^h \times_S X]_{I,s}).$$

(3). Comme  $\mathcal{O}_{X,w}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module de type fini, en utilisant la troisième assertion du lemme B.3.3 et le corollaire B.3.4, on obtient

$$\begin{aligned} m_I(W, [X]_{I,s}) &= \frac{e_{I\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{X,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} = \frac{e_I(\mathcal{O}_{X,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})[\kappa(w) : \kappa(s)]} \\ &= \frac{\dim_{F(S)}(\mathcal{O}_{X,w} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} F(S))}{[\kappa(w) : \kappa(s)]}. \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier l'indépendance par rapport à l'idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$  des multiplicités données par (23).

**Corollaire 1.3.9.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $s$  un point de  $S$ . Pour cycle algébrique  $\alpha$  appartenant à  $Z_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$ , les cycles  $\alpha_{I,s}$  ne dépendent pas de l'idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$  choisi.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de constater que pour tout sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  équidimensionnel de dimension  $n$  sur  $S$  et toute composante irréductible de  $Z_s$ , les entiers  $m_I(W, [Z]_{I,s})$  ne dépendent pas de  $I$ . Notons  $w$  le point générique de  $W$ . La seconde assertion du lemme 1.3.8 permet de supposer que  $S$  est un schéma local hensélien de point fermé  $s$ . Comme pour tout voisinage ouvert  $U$  de  $w$  dans  $X$

$$m_I(W, [Z]_{I,s}) = m_I(W \cap U_s, [Z \cap U]_{I,s})$$

on peut supposer que le morphisme structural de  $Z$  sur  $S$  est de la forme  $X \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  où  $q$  est un morphisme quasi-fini maximal et donc, en utilisant la première assertion du lemme 1.3.8, que  $n = 0$ . Le schéma  $Z$  est alors quasi-fini sur  $S$  ce qui entraîne, via le théorème 18.5.11 de [56], que  $\mathcal{O}_{X,w}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module de type fini auquel cas le lemme est une conséquence de la troisième assertion du lemme 1.3.8.  $\square$

D'après le corollaire 1.3.9, il n'y a plus lieu de préciser le choix de l'idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$ . Dans la suite nous noterons simplement  $\alpha_s$  la valeur commune des cycles  $\alpha_{I,s}$  et  $m(W, \alpha_s)$  la multiplicité d'un sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $X_s$  de dimension  $n$  sur  $\kappa(s)$  dans le cycle  $\alpha_s$ .

**Lemme 1.3.10.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma,  $s$  un point de  $S$  et  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Alors tout sous-schéma fermé  $Z'$  de  $Z$  génériquement isomorphe à  $Z$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  et les cycles algébriques  $[Z]_s$  et  $[Z']_s$  coïncident.*

DÉMONSTRATION. — Remarquons tout d'abord que le sous-schéma fermé  $Z'$  de  $Z$  est défini par un idéal nilpotent de  $\mathcal{O}_Z$  autrement dit que  $Z$  et  $Z'$  ont même fermé sous-jacent. En effet comme  $Z'$  est génériquement isomorphe à  $Z$ , il existe d'après le théorème 8.10.5 de [55] un voisinage  $U$  du point générique de  $Z$  tel que l'immersion de  $Z'_U$  dans  $Z_U$  soit un isomorphisme. Comme  $Z$  est équidimensionnel sur  $S$ , les points génériques  $z_1, \dots, z_k$  de  $Z$  ont pour image  $s$  donc appartiennent à  $Z_U$  et en définitive à  $Z'_U$  ce qui entraîne que  $Z$  et  $Z'$  ont même fermé sous-jacent. On en déduit alors que  $Z'$  est lui aussi équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  et que les fibres  $Z_s$  et  $Z'_s$  ont les mêmes composantes irréductibles. Fixons une telle composante irréductible  $W$  et notons  $w$  son point générique. Il s'agit de montrer que

$$m(W, [Z]_s) = m(W, [Z']_s).$$

Choisissons pour cela un idéal  $\mathfrak{m}_{S,s}$ -primaire  $I$  de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Nous avons vu que

$$\mathcal{O}_{Z',w} = \mathcal{O}_{Z,w}/J$$

où  $J$  est un idéal nilpotent donc contenu dans l'intersection des idéaux premiers minimaux  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$  de  $\mathcal{O}_{Z,w}$ . Les idéaux premiers minimaux de  $\mathcal{O}_{Z',w}$  sont donc  $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/J, \dots, \mathfrak{q}_r = \mathfrak{p}_r/J$  et on a

$$\mathcal{O}_{Z,w}/\mathfrak{p}_i = \mathcal{O}_{Z',w}/\mathfrak{q}_i.$$

Quitte à réordonner les  $z_i$ , on peut supposer que  $z_1, \dots, z_r$  sont les points génériques des composantes irréductibles de  $Z$  contenant  $w$  correspondant à  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ . Comme  $Z'$  et  $Z$  sont génériquement isomorphes les anneaux

$$\mathcal{O}_{Z,z_i} = (\mathcal{O}_{Z,w})_{\mathfrak{p}_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{Z',z_i} = (\mathcal{O}_{Z',w})_{\mathfrak{q}_i}$$

sont isomorphes. Le lemme B.3.2 nous donne

$$\begin{aligned} m(W, [Z]_s) &= \sum_{i=1}^r e_{I(\mathcal{O}_{Z,w}/\mathfrak{p}_i)}(\mathcal{O}_{Z,w}/\mathfrak{p}_i) \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z,z_i}}(\mathcal{O}_{Z,z_i}) \\ &= \sum_{i=1}^r e_{I(\mathcal{O}_{Z',w}/\mathfrak{q}_i)}(\mathcal{O}_{Z',w}/\mathfrak{q}_i) \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z',z_i}}(\mathcal{O}_{Z',z_i}) \\ &= m(W, [Z']_s) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 1.3.11.** *Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme maximal de schémas géométriquement unibranches intègres,  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha$  un élément de  $Z_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  de la forme*

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ . Notons  $\beta$  le cycle relatif

$$\beta = \sum_{i=1}^r \alpha_i [T \times_S Z_i].$$

Pout tout point  $t$  de  $T$  d'image  $s$  dans  $S$ , on a

$$\beta_t = (\alpha_s)_{\kappa(t)}.$$

DÉMONSTRATION. — Notons pour simplifier  $k$  le corps résiduel de  $S$  au point  $s$  et  $K$  celui de  $T$  au point  $t$ . Compte tenu de la définition 1.3.5, on peut supposer sans perte de généralité que  $X$  est un schéma intègre équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  et que  $\alpha = [X]$ . De même on peut supposer que les schémas  $T$  et  $S$  sont des schémas locaux de points fermés respectifs  $t$  et  $s$ . Fixons une composante irréductible  $W$  de la fibre  $(X_T)_t$  et notons  $w$  son point générique. Désignons par  $Z$  la composante irréductible de  $Z_s$  dominée par  $W$  et notons  $z$  son point générique. Il s'agit de montrer que

$$m(W, [X_T]_t) = m(Z, [X_s])m(W, [Z_K]). \quad (25)$$

D'après la seconde assertion de la proposition 4.2.4 de [54], l'anneau local  $\mathcal{O}_{Z_K, w}$  est donné par

$$\mathcal{O}_{Z_K, w} = \left( K \otimes_k \kappa(z) \right)_{\mathfrak{p}_w}$$

où  $\mathfrak{p}_w$  est l'idéal premier minimal noyau du morphisme naturel de  $K \otimes_k \kappa(z)$  dans  $\kappa(w)$ . En particulier

$$m(W, [Z_K]) = \operatorname{lg} \left( K \otimes_k \kappa(z) \right)_{\mathfrak{p}_w}.$$

Supposons que  $T$  soit un hensélisé strict de  $S$ . Dans ce cas l'extension  $K/k$  est séparable et le schéma  $Z_K$  est réduit d'après la proposition 4.6.1 de [54]. En particulier  $m(W, [Z_K]) = 1$  et la relation (25) se trouve être une conséquence de la seconde assertion du lemme 1.3.8. En



désignant par  $\bar{s}$  le point géométrique de  $S$  défini par  $\theta$  et en utilisant un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & S_{\bar{s}}^{\text{sh}} \\ & \nearrow \vartheta & \downarrow \rho_{S, \bar{s}}^{\text{sh}} \\ T & \xrightarrow{\theta} & S, \end{array}$$

on voit que l'on peut se ramener à supposer  $S$  et  $T$  strictement henséliens. Quitte à se restreindre à un voisinage de  $z$  suffisamment petit, on peut supposer que le morphisme structural de  $X$  est donné par une composition de la forme  $X \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  dans laquelle  $q$  est un morphisme équidimensionnel de dimension nulle. Notons pour simplifier  $S'$  le schéma  $\mathbb{A}_S^n$ . Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X_T & \xrightarrow{q_T} & T' & \longrightarrow & T \\ \downarrow \theta_X & \square & \downarrow \theta' & \square & \downarrow \theta \\ X & \xrightarrow{q} & S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

Notons  $s', t'$  les images de  $z, w$  par  $q$  et  $q_T$  et désignons par  $W'$  la composante irréductible de  $X_{t'}$  dominant  $W$  et par  $Z'$  la composante irréductible de  $Z_{s'}$  dominant  $Z$ . En notant  $z'$  le point générique de  $Z'$  et  $w'$  celui de  $W'$ , on voit que

$$\left( K \otimes_k \kappa(z) \right)_{\mathfrak{p}_w} = \left( K' \otimes_{k'} \kappa(z') \right)_{\mathfrak{p}'_w}$$

où  $K'$  désigne le corps résiduel au point  $t'$  et  $k'$  le corps résiduel au point  $s'$ . La première assertion du lemme 1.3.8 nous assurant que

$$m(W, [X_T]_t) = m(W', [X_{T'}]_{t'}) \quad m(Z, [X_s]) = m(Z', [X_{s'}]).$$

on voit que l'on peut supposer  $n = 0$ .

Dans ce cas  $X$  est quasi-fini sur  $S$  et comme  $S$  est strictement hensélien,  $\mathcal{O}_{X,z}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module de type fini. Pour la même raison le  $\mathcal{O}_{T,t}$ -module  $\mathcal{O}_{X_T,w}$  est de type fini. D'autre part l'extension  $\kappa(z)/\kappa(s)$  étant purement inséparable, la proposition 4.3.2 de [54] entraîne que  $K \otimes_k \kappa(z)$  est un anneau local de corps résiduel  $\kappa(w)$  et donc que

$$m(W, [Z_K]) = \lg \left( K \otimes_k \kappa(z) \right)_{\mathfrak{p}_w} = \frac{[\kappa(z) : \kappa(s)]}{[\kappa(w) : \kappa(t)]}.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_T,w} \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} F(T) &= (\mathcal{O}_{X,z} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{T,t}) \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} F(T) \\ &= (\mathcal{O}_{X,z} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} F(S)) \otimes_{F(S)} F(T) \end{aligned}$$

la troisième assertion du lemme 1.3.8 nous donne finalement

$$\begin{aligned}
m(Z, [X_s])m(W, [Z_K]) &= \frac{\dim_F(\mathcal{O}_{X,z} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} F(S))}{[\kappa(z) : \kappa(s)]} \frac{[\kappa(z) : \kappa(s)]}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \\
&= \frac{\dim_{F(S)}(\mathcal{O}_{X,z} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} F(S))}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \\
&= \frac{\dim_{F(T)}(\mathcal{O}_{X,w} \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} F(T))}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \\
&= m(W, [X_T]_t)
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

La proposition suivante explicite complètement les multiplicités intervenant dans les changements de base géométriquement unibranche.

**Proposition 1.3.12.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $s$  un point de  $S$ . Alors pour tout cycle  $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  on a*

$$s^{\otimes} \alpha = \alpha_s.$$

DÉMONSTRATION. — Supposons tout d'abord  $s$  maximal. Comme  $S$  est réduit, le schéma local artinien  $\mathcal{O}_{S,s}$  est un corps. Par linéarité on peut supposer que  $\alpha = [Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ . Soit  $z$  son point générique. On peut supposer que  $s$  est l'image de  $z$  puisque lorsque ce n'est pas le cas  $[\alpha]_s = s^{\otimes} \alpha = 0$ . Dans ce cas  $Z_s$  est intègre de point générique  $z$  et de dimension  $n$ . Comme  $\mathcal{O}_{Z,z}$  est un  $\mathcal{O}_{S,s}$ -module plat et que

$$\mathcal{O}_{Z_s,z} = \mathcal{O}_{Z,z} / \mathfrak{m}_{S,s} \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{Z,z}$$

le lemme B.3.3 nous assure que

$$m(Z_s, [\alpha]_s) = \frac{e_{I\mathcal{O}_{Z,w}}(\mathcal{O}_{Z,w})}{e_I(\mathcal{O}_{S,s})} = \text{lg}_{\mathcal{O}_{Z,z}}(\mathcal{O}_{Z,z}) = m(Z_s, s^{\otimes} \alpha).$$

Supposons maintenant que  $s$  ne soit pas maximal. On sait alors d'après la remarque 1.2.10 qu'il existe une extension  $K/\kappa(s)$  de sorte que le  $K$ -point

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{\quad \underline{s} \quad} & \\
\text{Spec}(K) & \longrightarrow & \text{Spec}(\kappa(s)) \xrightarrow{\quad s \quad} S
\end{array}$$

soit épais. En utilisant la remarque 1.1.18, il suffit donc de montrer que  $\underline{s}^{\otimes} \alpha = (\alpha_s)_K$ . Fixons un épaississement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  de  $\underline{s}$ . Écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ . Quitte à réordonner les  $Z_i$ , on peut supposer que les  $k$  premiers sont ceux dominant la composante irréductible de  $S$  dont le point générique est l'image par  $\tau$  du point générique de  $\mathcal{O}$ . Notons alors par  $\mathcal{Z}_i$  la composante irréductible de  $\mathcal{O} \times_S Z_i$  dominant  $\mathcal{O}$ . Comme  $S$  est

géométriquement unibranche, le schéma  $\mathcal{O} \times_S Z_i$  est équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ . Les lemmes 1.3.10, 1.3.11 nous assurent alors que

$$(\alpha_s)_K = \sum_{i=1}^k \alpha_i([Z_i]_s)_K = \sum_{i=1}^k \alpha_i[\mathcal{O} \times_S Z_i]_\sigma = \sum_{i=1}^k \alpha_i[\mathcal{Z}_i]_\sigma$$

Comme  $\mathcal{Z}_i$  est plat sur  $\mathcal{O}$ , le lemme 1.3.7 nous prouve que

$$(\alpha_s)_K = \sum_{i=1}^k \alpha_i[\mathrm{Spec}(K) \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}_i] = \underline{s}^{\otimes} \alpha$$

et donc l'assertion.  $\square$

Le calcul explicite des multiplicités obtenu dans la proposition précédente permet finalement de montrer que le changement de base construit par A. Suslin et V. Voevodsky se trouve compatible avec celui défini pour les cycles équidimensionnel sur des schémas réguliers via les multiplicités de Serre — remarque 1.1.27.

**Corollaire 1.3.13.** *On suppose  $S$  régulier. Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\alpha \in Z_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$ . Alors pour tout morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  on a*

$$\theta^{\otimes} \alpha = \theta^{\otimes} \alpha. \quad (26)$$

DÉMONSTRATION. — Les deux membres de (26) étant des cycles relatifs, il suffit de montrer qu'ils coïncident sur les points génériques de  $T$ . En utilisant la remarque 1.1.18, cela revient à montrer que  $s^{\otimes} \alpha = s^{\otimes} \alpha$  pour tout point  $s$  de  $S$  image d'un point maximal de  $T$ . Le corollaire résulte alors de la conjonction de la proposition 1.3.12 et du lemme 1.3.7.  $\square$

Ce résultat montre en particulier le lien étroit que le changement de base pour les cycles relatifs entretient avec la théorie de l'intersection. En particulier cette opération est obtenue par une « extension » des multiplicités de Serre et à ce titre permet d'effectuer sur les cycles universellement rationnels ou entiers certaines opérations de la théorie de l'intersection [43] sans recourir au passage à l'équivalence rationnelle.

**1.3.2. Cas général.** — Supposons maintenant que le schéma  $S$  ne soit pas géométriquement unibranche. On peut supposer que  $S$  est tout de même réduit et considérer le normalisé  $S'$  de  $S$  qui est un schéma normal réduit — donc à fortiori géométriquement unibranche — ainsi que la projection  $p : S' \rightarrow S$  qui est un morphisme surjectif. Si  $Z$  est un schéma intègre équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ , il existe une unique composante irréductible  $Z'$  de  $S' \times_S Z$  dominant  $Z$  et cette dernière est équidimensionnelle sur  $S'$  de dimension  $n$ . Supposons que  $X$  soit un  $S$ -schéma et que

$$\alpha = \sum_Z \alpha_Z [Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$  équidimensionnels sur  $S$  de dimension  $n$ , soit un cycle relatif appartenant à  $Z_{\mathrm{equi}}(X/S, n)$ . Fixons un point  $s$  de  $S$ , par fonctorialité du changement de base, on voit que pour un sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $X_s$  de dimension  $n$

$$m(W, s^{\otimes} \alpha) = \frac{m(W', (s')^{\otimes} p^{\otimes} \alpha)}{m(W', (W)_{\kappa(s')}} \quad (27)$$

où  $s'$  est un point de  $S'$  au dessus de  $s$  et  $W'$  une composante irréductible de  $(W)_{\kappa(s')}$ . Cela assure en particulier que le second membre de (27) ne dépend ni du choix du point de  $S'$  au dessus de  $S$  ni de la composante irréductible  $W'$  choisie. Notons  $w$  le point générique de  $W$  ainsi que  $w'$  le point générique de  $W'$ . Comme

$$p^{\otimes} \alpha = \sum_Z \alpha_Z[Z']$$

en notant  $I'$  un idéal de définition de  $\mathcal{O}_{S',s'}$ , la proposition 1.3.12 nous assure que

$$m(W, s^{\otimes} \alpha) = \sum_Z \alpha_Z \left( \frac{e_{I' \mathcal{O}_{Z',w'}}(\mathcal{O}_{Z',w'})/e_{I'}(\mathcal{O}_{S',s'})}{\lg(\kappa(s') \otimes_{\kappa(s)} \kappa(w))_{\mathfrak{p}_{w'}}} \right) \quad (28)$$

où la somme est prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$  équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$  pour lesquels  $W'$  est une composante irréductible de  $Z'_{s'}$ .

*Remarque 1.3.14.* D'après la proposition 6.15.5 de [54], on sait qu'un schéma  $S$  est géométriquement unibranche si et seulement si le morphisme  $p : S' \rightarrow S$  est un morphisme radiciel. Dans ce cas  $S'$  possède un unique point  $s'$  au dessus de  $s$  et l'extension  $\kappa(s')/\kappa(s)$  est radicielle. La proposition 1.3.12 et la formule (28) nous donnent en utilisant les notations précédentes

$$e_{I \mathcal{O}_{Z,w}}(\mathcal{O}_{Z,w})/e_I(\mathcal{O}_{S,s}) = \frac{e_{I' \mathcal{O}_{Z',w'}}(\mathcal{O}_{Z',w'})/e_{I'}(\mathcal{O}_{S',s'})}{\lg(\kappa(s') \otimes_{\kappa(s)} \kappa(w))_{\mathfrak{p}_{w'}}$$

où  $I$  est un idéal de définition de  $\mathcal{O}_{S,s}$ .

## 1.4. Opérations sur les cycles relatifs

Cette section est consacrée aux opérations sur les cycles relatifs. Nous abordons dans un premier temps le cas des images inverses.

**1.4.1. Images inverses.** — Les points maximaux de  $S$  jouant un rôle essentiel dans la définition des cycles relatifs, nous introduisons dans cette sous-section le schéma

$$S^{\mathfrak{g}} = \coprod_{\substack{s \text{ point} \\ \text{maximal de } S}} \text{Spec}(\kappa(s))$$

et nous posons pour un  $S$ -schéma  $X$  de type fini

$$X^{\mathfrak{g}} := S^{\mathfrak{g}} \times_S X$$

de sorte que les points de  $X^{\mathfrak{g}}$  soient précisément les points de  $X$  se projetant sur un point maximal de  $S$ . Supposons que  $\mathcal{M}$  soit un  $\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}}$ -module cohérent et  $n$  un entier positif. On peut alors considérer le cycle relatif sur  $X$

$$\alpha_n(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^r \lg_{\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}},w_i}}(\mathcal{M}_{w_i})[W_i]$$

où les  $w_i$  désignent les points génériques des composantes irréductibles du support de  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  et  $W_i$  l'adhérence de  $w_i$  dans  $X$ . Par additivité, on obtient de la sorte un morphisme de groupes abéliens

$$\alpha_n : G_0(X^{\mathfrak{g}}) \rightarrow Z(X/S, n).$$

Considérons la filtration sur le groupe de Grothendieck  $G_0(X^{\mathfrak{g}})$

$$\mathrm{Fil}_{n-1} G_0(X^{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{Fil}_n G_0(X^{\mathfrak{g}}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\dim(X^{\mathfrak{g}})} G_0(X^{\mathfrak{g}}) = G_0(X^{\mathfrak{g}})$$

où  $\mathrm{Fil}_n G_0(X^{\mathfrak{g}})$  le sous-groupe engendré par les classes de  $\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}}$ -modules cohérents à support de dimension au plus  $n$ .

**Lemme 1.4.1.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. Les morphismes*

$$\mathrm{Gr}_n G_0(X^{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\alpha_n} Z(X/S, n)$$

sont des isomorphismes.

DÉMONSTRATION. — En remarquant que l'on a un isomorphisme naturel

$$Z(X/S, n) = Z(X^{\mathfrak{g}}/S^{\mathfrak{g}}, n) = Z_n(X^{\mathfrak{g}})$$

le résultat découle du lemme B.1.2 qui assure que pour tout  $\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}}$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  à support de dimension  $\leq n$  on a en désignant par  $w_1, \dots, w_r$  les points génériques des composantes irréductibles du support de  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$

$$[\mathcal{M}] = \sum_{i=1}^r \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}, w_i}}(\mathcal{M}_{w_i}) \left[ \mathcal{O}_{\{w_i\}} \right]$$

dans  $\mathrm{Gr}_n G_0(X^{\mathfrak{g}})$ . □

Dans la suite nous utiliserons la terminologie suivante : un morphisme de  $S$ -schémas de type fini  $p : X \rightarrow Y$  est dit génériquement de tor-dimension finie lorsque le morphisme de  $S^{\mathfrak{g}}$ -schémas

$$p^{\mathfrak{g}} : X^{\mathfrak{g}} \rightarrow Y^{\mathfrak{g}}$$

est de tor-dimension finie. Il résulte de cette définition que tout morphisme de  $S$ -schémas de but un  $S$ -schéma lisse est génériquement de tor-dimension finie. Nous fixons, pour le reste de cette sous-section, un morphisme  $p : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas de type fini que nous supposons génériquement de tor-dimension finie et équidimensionnel de dimension  $d$ .

**Définition 1.4.2.** Soit  $\alpha$  un cycle relatif sur  $Y$  de dimension  $n$  sur  $S$ . Nous dirons que l'image inverse de  $\alpha$  par  $p$  est bien définie, lorsque, pour tout sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $Y$  de multiplicité non nulle dans  $\alpha$ , les composantes irréductibles de  $X \times_Y Z$  dominant une composante irréductible de  $S$  sont de dimension  $n + d$ .

Dans la suite nous noterons  $Z(Y/S, n; p^*)$  le sous-groupe de  $Z(Y/S, n)$  formé des cycles relatifs dont l'image inverse par  $p$  est bien définie.

Nous pouvons considérer la filtration — en général non exhaustive — sur le groupe de Grothendieck  $G_0(Y^{\mathfrak{g}})$

$$\mathrm{Fil}_{n-1}^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{Fil}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\dim(Y^{\mathfrak{g}})}^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \subset G_0(Y^{\mathfrak{g}})$$

où  $\mathrm{Fil}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}})$  est le sous-groupe de  $G_0(Y^{\mathfrak{g}})$  engendré par les classes des objets  $\mathcal{N}$  de  $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}})$  vérifiant les conditions

$$\dim(\mathrm{supp}(\mathcal{N})) \leq n \quad \dim(\mathrm{supp}(Lp^{\mathfrak{g}*}(\mathcal{N}))) \leq \dim(\mathrm{supp}(\mathcal{N})) + d$$

L'un des intérêts de cette filtration est donné par la

*Remarque 1.4.3.* Par définition le foncteur  $Lp^*$  induit des morphismes

$$\mathrm{Gr}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathrm{Gr}_{n+d} G_0(X^{\mathfrak{g}})$$

au niveau des gradués associés aux filtrations précédemment introduites.

On dispose alors du résultat suivant.

**Lemme 1.4.4.** *Soit  $\alpha$  un cycle relatif sur  $Y$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dont l'image par  $p$  est bien définie.*

1. *Les morphismes naturels ci-dessous sont des monomorphismes*

$$\mathrm{Gr}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathrm{Gr}_n G_0(Y^{\mathfrak{g}}).$$

2. *Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  des objets de  $D_{\mathrm{coh}}^b(Y^{\mathfrak{g}})$  dont le support est de dimension au plus  $n$  et vérifiant  $\alpha_n(\mathcal{M}) = \alpha_n(\mathcal{N}) = \alpha$ . On a l'égalité des cycles*

$$\alpha_{n+d}(Lp^*\mathcal{M}) = \alpha_{n+d}(Lp^*\mathcal{N})$$

DÉMONSTRATION. — (1). Il suffit de remarquer que l'on a l'égalité

$$\mathrm{Fil}_{n-1}^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) = \mathrm{Fil}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}}) \cap \mathrm{Fil}_{n-1} G_0(Y^{\mathfrak{g}}).$$

(2). Par hypothèse l'image inverse par  $p$  du cycle  $\alpha$  est bien définie. Cela entraîne que les classes de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  dans  $G_0(Y^{\mathfrak{g}})$  appartiennent à  $\mathrm{Fil}_n^{(p)} G_0(Y^{\mathfrak{g}})$ . Le lemme 1.4.1 assure que  $[\mathcal{M}] = [\mathcal{N}]$  dans  $\mathrm{Gr}_n G_0(Y^{\mathfrak{g}})$ . En utilisant la première assertion et la remarque 1.4.3, on voit que

$$[Lp^*\mathcal{M}] = [Lp^*\mathcal{N}]$$

dans  $\mathrm{Gr}_{n+d} G_0(X^{\mathfrak{g}})$  et donc via le lemme 1.4.1 que

$$\alpha_{n+d}(Lp^*\mathcal{M}) = \alpha_{n+d}(Lp^*\mathcal{N}).$$

Cela prouve notre assertion. □

Le lemme précédent permet de définir l'image inverse d'un cycle  $\alpha \in Z(Y/S, n; p^*)$  en posant

$$p^*\alpha = \alpha_{n+d}(Lp^*\mathcal{M})$$

où  $\mathcal{M}$  un objet de  $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{O}_{X^{\mathfrak{g}}})$  à support de dimension au plus  $n$  et vérifiant  $\alpha_n(\mathcal{M}) = \alpha$ . On obtient de la sorte un morphisme d'image inverse

$$p^* : Z(Y/S, n; p^*) \rightarrow Z(X/S, n + d). \quad (29)$$

On remarquera que par définition ce dernier induit un morphisme d'image inverse pour les cycles relatifs équidimensionnels

$$\begin{array}{ccc} Z(Y/S, n; p^*) & \xrightarrow{p^*} & Z(X/S, n + d) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z_{\mathrm{equi}}(Y/S, n; p^*) & \dashrightarrow & Z_{\mathrm{equi}}(X/S, n + d). \end{array}$$

*Remarque 1.4.5.* Cette construction est fonctorielle. On voit en effet que pour un morphisme de  $S$ -schémas de type fini  $q : W \rightarrow X$  génériquement de Tor-dimension finie et équidimensionnel de dimension  $e$ , on a le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z(Y/S, n; (p \circ q)^*) \cap Z(Y/S, n; p^*) & \xrightarrow{p^*} & Z(X/S, n + e; p^*) \\ \downarrow & & \downarrow q^* \\ & \xrightarrow{(p \circ q)^*} & Z(W/S, n + d + e). \end{array}$$

L'image inverse pour les cycles relatifs introduite précédemment est naturellement compatible à la contravariance par rapport aux morphismes plats des cycles algébriques. Cela se traduit par l'énoncé ci-dessous.

**Lemme 1.4.6.** *Supposons que  $p$  soit un morphisme plat. On a*

$$Z(Y/S, n) = Z(Y/S, n; p^*)$$

et pour tout cycle relatif  $\alpha$  sur  $Y$  de dimension  $n$  sur  $S$

$$p^* \alpha = \sum_Z m(Z, \alpha) [X \times_Y Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ .

DÉMONSTRATION. — Fixons un sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $Y$  de type fini sur  $S$ , dominant une composante irréductible de  $S$  et de dimension  $n$  sur  $S$ . Par hypothèse  $p$  est plat et équidimensionnel de dimension  $d$ , cela entraîne que le morphisme

$$X \times_Y Z \rightarrow Z$$

est équidimensionnel de dimension  $d$ . Le schéma  $X \times_Y Z$  est donc maximal sur  $S$  de dimension  $n + d$  sur  $S$ , ce qui prouve que l'image inverse par  $p$  est bien définie pour tout cycle relatif sur  $Y$ . Le reste de l'assertion est immédiat.  $\square$

Nous allons maintenant voir que ces images inverses sont compatibles avec les morphismes de changement de base sur les cycles relatifs. Plus précisément on dispose de la

**Proposition 1.4.7.** *On suppose  $p$  universellement équidimensionnel et  $Y$  lisse sur  $S$ .*

1. *Le morphisme (29) induit un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Z_{\text{equi}}(Y/S, n; p^*) & \xrightarrow{p^*} & Z_{\text{equi}}(X/S, n + d) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}_{\text{equi}}(Y/S, n; p^*) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n + d). \end{array}$$

2. *On a le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\text{equi}}(Y/S, n; p^*)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{p^*} & \mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n + d)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ \mathcal{Z}_{\text{equi}}(Y_T/T, n; p_T^*)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{p_T^*} & \mathcal{Z}_{\text{equi}}(X_T/T, n + d)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

pour tout morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$ .

DÉMONSTRATION. — (1). Soient  $\underline{s}$  un  $K$ -point épais de  $S$  et  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  un épaississement de ce dernier. Notons  $\rho$  le point maximal de  $S$  image par  $\tau$  du point générique de  $\mathcal{O}$ . Il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z(Y/S, n) & \xrightarrow{(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^*} & Z(Y_K/K, n) \\ \downarrow p^* & & \downarrow p_K^* \\ Z(X/S, n+d) & \xrightarrow{(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^*} & Z(X_K/K, n+d) \end{array}$$

est commutatif. Étant donné un  $S$ -schéma  $\mathcal{X}$  et un cycle relatif

$$\alpha = \sum_Z \alpha_Z [Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $\mathcal{X}$  dominant une composante irréductible de  $S$  et de dimension  $n$  sur  $S$ , convenons de noter  $\tilde{\tau}(\alpha)$  le cycle

$$\tilde{\tau}(\alpha) = \sum_Z \alpha_Z [\mathcal{Z}].$$

la somme étant restreinte aux sous-schémas fermés  $Z$  de  $\mathcal{X}$  dominant  $\overline{\{\rho\}}$  et de dimension  $n$  sur  $S$  et  $\mathcal{Z}$  étant l'unique composante irréductible de  $\mathcal{O} \times_S Z$  dominant  $\mathcal{O}$ .

Notons  $F$  le corps des fonctions de  $\mathcal{O}$ . Par définition  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^* \alpha = \sigma^*(\tilde{\tau}(\alpha))$ . Pour vérifier que le carré (30) est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Z(Y/S, n) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & Z(Y_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}, n) & \xrightarrow{\quad} & Z(Y_F/F, n) \\ \downarrow p^* & & \downarrow p_{\mathcal{O}}^* & & \downarrow p_F^* \\ Z(X/S, n+d) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & Z(X_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}, n+d) & \xrightarrow{\quad} & Z(X_F/F, n+d) \end{array} \quad (30)$$

il suffit de constater que le grand carré et le carré de droite le sont, ce qui résulte de la functorialité de la remarque 1.4.5 et de la compatibilité aux morphismes plats de la remarque 1.4.6.

On se trouve donc ramené au cas où  $S$  est un schéma régulier et  $\theta$  est le morphisme associé à un point  $s$  de  $S$ . Le schéma  $Y$  étant lisse sur  $S$ , il est régulier et le morphisme  $p$  est de tor-dimension finie. Soit  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$  dont la multiplicité dans  $\alpha$  est non nulle. Par hypothèse l'image inverse par  $p$  est bien définie, le schéma  $X \times_Y Z$  est donc équidimensionnel de dimension  $n+d$  sur  $S$ . Comme  $S$  est régulier cela entraîne que  $(X \times_Y Z)_s$  est équidimensionnel de dimension  $n+d$ . En particulier on voit que l'image inverse par le morphisme  $p_s$  du cycle  $s^{\otimes} \alpha$  est bien définie.

Considérons alors la filtration sur  $G_0(Y)$

$$\theta, p \text{ Fil}_{n-1} G_0(Y) \subset \theta, p \text{ Fil}_n G_0(Y) \subset \cdots \subset G_0(Y)$$

pour laquelle  $\theta, p \text{ Fil}_n G_0(Y)$  est le sous-groupe engendré par les classes de  $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent  $\mathcal{N}$  vérifiant les conditions suivantes



$$\begin{aligned} \dim_S(\text{supp}(\mathcal{N})) \leq n & \quad \dim_S(\text{supp}(Lp^*\mathcal{N})) \leq \dim_S(\text{supp}(\mathcal{N})) + d \\ \dim(\text{supp}(L\theta_Y^*\mathcal{N})) \leq n & \quad \dim(\text{supp}(Lp_s^*L\theta_Y^*\mathcal{N})) \leq \dim(\text{supp}(L\theta_Y^*\mathcal{N})) + d. \end{aligned}$$

On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_n G_0(Y) & \xleftarrow{\text{mono. } \theta, p} \text{Gr}_n G_0(Y) & \longrightarrow \theta \text{Gr}_{n+d} G_0(X) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & p_s \text{Gr}_n G_0(Y_s) & \longrightarrow \text{Gr}_{n+d} G_0(X_s). \end{array} \quad (30)$$

Nos hypothèses entraînent l'existence d'un élément de  $G_0(Y)$  appartenant à  ${}^{\theta, p} \text{Fil}_n G_0(Y)$  dont l'image par  $\alpha_n$  coïncide avec  $\alpha$ . En utilisant le carré commutatif (30), le résultat découle de la conjonction du lemme 1.4.1 et du corollaire 1.3.13.

(2). Soient  $\alpha$  un élément de  $\mathcal{Z}_{\text{equi}}(Y/S, n)_{\mathbb{Q}}$  ainsi que  $\underline{t}$  un  $K$ -point épais ou maximal de  $T$  dont l'image  $\underline{s}$  par  $\theta$  est un  $K$ -point épais ou maximal de  $S$ . En utilisant ce qui précède ainsi que le lemme 1.4.6 on a

$$\underline{t}^{\otimes} (p_T^* \theta^{\otimes} \alpha) = p_K^* \underline{t}^{\otimes} \theta^{\otimes} \alpha = p_K^* \underline{s}^{\otimes} \alpha = \underline{s}^{\otimes} p^* \alpha$$

et il suffit d'utiliser la proposition 1.2.26 pour conclure.  $\square$

**1.4.2. Images directes.** — Soit  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. Nous dirons que l'image directe par  $p$  d'un cycle relatif sur  $X$  est bien définie lorsque  $p$  est propre sur le support de ce cycle. Nous noterons  $Z(X/S, n; p_*)$  l'ensemble formé des cycles relatifs sur  $X$  de dimension  $n$  ayant une image directe bien définie. Écrivons un tel cycle  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des fermés irréductibles de  $X$  dominant une composante irréductible de  $S$  et de dimension  $n$  sur  $S$ . Notons  $z_i$  le point générique de  $Z_i$ ,  $W_i$  le fermé irréductible de  $Y$  image de  $Z_i$  et  $w_i$  son point générique. Comme l'image directe de  $\alpha$  est bien définie, on peut considérer le cycle

$$p_* \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i m_i [W_i] \quad (31)$$

dans lequel l'entier  $m_i$  se trouve défini par

$$m_i = \begin{cases} [\kappa(z_i)/\kappa(w_i)] & \text{si l'extension } \kappa(z_i)/\kappa(w_i) \text{ est finie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (32)$$

*Remarque 1.4.8.* Supposons que  $p : X \rightarrow Y$  soit un morphisme propre de  $S$ -schémas et que  $X$  soit un schéma intègre de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Notons  $W$  le sous-schéma intègre de  $Y$  image de  $X$ . En supposant que l'extension induite entre les corps de fonctions soit finie, on a

$$\dim_S(X) = \dim_S(W) = n$$

et  $W$  est un sous-schéma intègre dominant une composante irréductible de  $S$  et de dimension  $n$ . En particulier, la fibre générique de  $W$  est de dimension  $n$  et dans le cas où  $X$  est équidimensionnel la remarque 1.1.16 assure que  $W$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n$ .

La remarque précédente assure que la formule (31) nous définit bien un cycle relatif appartenant à  $Z(Y/S, n)$ . On obtient de la sorte un morphisme de groupes abéliens

$$p_* : Z(X/S, n; p_*) \longrightarrow Z(Y/S, n). \quad (33)$$

En outre cette même remarque nous assure que le morphisme d'image directe ci dessus induit un morphisme pour les cycles relatifs équidimensionnels

$$\begin{array}{ccc} Z_{\text{equi}}(X/S, n; p_*) & \cdots \cdots \cdots & Z_{\text{equi}}(Y/S, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(X/S, n; p_*) & \longrightarrow & Z(Y/S, n). \end{array}$$

*Remarque 1.4.9.* Soit  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. L'image directe est bien définie pour tout les cycles relatifs appartenant à  $C(X/S, n)$  et le morphisme d'image directe induit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} C(X/S, n) & \cdots \cdots \cdots & C(Y/S, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(X/S, n; p_*) & \xrightarrow{p_*} & Z(Y/S, n). \end{array}$$

En effet si  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  propre sur  $S$ , le corollaire 4.5.3 de [51] assure que le morphisme la restriction de  $p$  à  $Z$  est propre et que le sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $Y$  image de  $Z$  est propre sur  $S$ .

Nous allons voir que les morphismes d'images directes sont compatibles aux changements de base pour les cycles relatifs — proposition 1.4.11. À cet égard le cas des cycles plats équidimensionnels est essentiel et se traduit par le lemme suivant.

**Lemme 1.4.10.** *Soient  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas,  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas et*

$$\alpha \in Z_{\text{Hilb}}(X/S, n) \quad \beta \in Z_{\text{Hilb}}(Y/S, n)$$

*deux cycles relatifs. On suppose que  $p$  est propre sur le support de  $\alpha$  et que  $p_*\alpha = \beta$ , alors  $p_T$  est propre sur le support de  $\theta^*\alpha$  et on a*

$$p_{T*}\theta^*\alpha = \theta^*\beta. \quad (34)$$

DÉMONSTRATION. — Écrivons  $\alpha$  et  $\beta$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i] \quad \beta = \sum_{j=1}^s \beta_j [W_j]$$

où les  $Z_i$  (resp. les  $W_j$ ) sont des sous-schémas fermés de  $X$  (resp. de  $Y$ ) plats sur  $S$  et équidimensionnels de dimension  $n$  sur  $S$ . On peut supposer que  $X$  est la réunion des  $Z_i$  et que  $Y$  est la réunion à la fois des  $W_j$  et des images des  $Z_i$ . En particulier cela entraîne que  $p$  est propre et que les fibres de  $Y$  sur  $S$  sont de dimension au plus  $n$ .

Fixons un sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $T \times_S Y$  et notons  $w$  son point générique. Il s'agit de montrer l'égalité des multiplicités

$$m(W, p_{T*}\theta^{\otimes}\alpha) = m(W, \theta^{\otimes}\beta).$$

On peut supposer que  $W$  domine une composante irréductible de  $T$  et est de dimension  $n$  sur  $T$ . Notons  $z$  l'image de  $w$  dans  $Y$ . Donnons nous un voisinage ouvert  $V$  de  $z$  et considérons les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{q} & V & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ T \times_S U & \xrightarrow{q_T} & T \times_S V & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ T \times_S X & \xrightarrow{p_T} & T \times_S Y & & \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\ X & \xrightarrow{p} & Y & & \end{array}$$

L'égalité (34) entraîne que  $q_*(\alpha|_U) = (p_*\alpha)|_V = \beta|_V$ . En remarquant que

$$m(W, p_{T*}\theta^{\otimes}\alpha) = m(W \cap V, (p_{T*}\theta^{\otimes}\alpha)|_{T \times_S V}) = m(W \cap V, q_{T*}\theta^{\otimes}\alpha|_U)$$

et que d'autre part

$$m(W, \theta^{\otimes}\beta) = m(W \cap V, (\theta^{\otimes}\beta)|_{T \times_S V}) = m(W \cap V, \theta^{\otimes}\beta|_V)$$

on voit qu'il est possible de se restreindre dans la suite à ne prendre en compte que des voisinages ouverts de  $z$  suffisamment petits.

Supposons que  $z$  appartienne à une composante irréductible  $C$  de  $Y$  qui ne soit pas équidimensionnelle sur  $S$ . Il existe alors un entier  $i$  tel que  $C$  soit contenue dans l'image de  $Z_i$ . Comme  $w$  est de dimension  $n$  dans sa fibre, cette dernière est de dimension  $n$  ce qui entraîne que  $p(Z_i)$  possède aussi une fibre de dimension  $n$ . Comme  $p$  est propre la remarque 1.1.16 nous assure que  $p(Z_i)$  est équidimensionnel sur  $S$ , donc que  $C$  aussi ce qui est absurde. Quitte à prendre un voisinage suffisamment petit de  $z$ , on peut supposer que  $Y$  est équidimensionnel sur  $S$  et même d'après le lemme 1.1.11 que la projection de  $Y$  sur  $S$  est de la forme  $Y \xrightarrow{q} \mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  où  $q$  est un morphisme quasi-fini maximal. Notons  $Z_i^0$  (resp.  $W_i^0$ ) le fermé de  $Z_i$  (resp.  $W_i$ ) formé des points de  $Z_i$  (resp.  $W_i$ ) au voisinages desquels  $p \circ q$  (resp.  $q$ ) n'est pas plat. Comme  $z$  est maximal dans sa fibre, le lemme 1.1.11 assure que  $z$  n'appartient pas à  $W_i^0$ . De même un point  $x$  de  $Z_i$  ayant  $y$  pour image par  $p$  est un point maximal de sa fibre et ne peut donc appartenir à  $Z_i^0$  d'après le lemme 1.1.11. Par suite, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de  $z$  suffisamment petit, on peut supposer que les  $Z_i$  et les  $W_j$  sont plats sur  $\mathbb{A}_S^n$ , ce qui permet de supposer que  $n = 0$ .

Notons  $\vartheta$  le morphisme du spectre  $T'$  de l'anneau local  $\mathcal{O}_{T,t}$  dans  $T$ . Pour montrer que la multiplicité de  $W$  dans les cycles  $p_{T*}\theta^{\otimes}\alpha$  et  $\theta^{\otimes}\beta$  est la même il suffit de montrer que ces cycles coïncident après avoir appliqué  $\vartheta^{\otimes}$ . Or le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T \times_S X & \xrightarrow{p_T} & T \times_S Y \\ \vartheta_X \uparrow & & \vartheta_Y \uparrow \\ T' \times_S X & \xrightarrow{p_{T'}} & T' \times_S Y \end{array} \quad (35)$$

nous donne  $\vartheta^{\otimes} p_{T^*} \theta^{\otimes} \alpha = p_{T^*} (\theta \circ \vartheta)^{\otimes} \alpha$  puisque  $\vartheta$  est plat. Cela permet de se restreindre au cas où  $T$  est un schéma artinien local. Choisissons un hensélisé strict  $T'$  de  $T$ . D'après la remarque 1.1.31 ce dernier est un aussi un schéma artinien local. Comme le morphisme  $\vartheta$  de  $T'$  dans  $T$  est fidèlement plat, la remarque 1.1.18 assure qu'il suffit de montrer que les cycles  $p_{T^*} \theta^{\otimes} \alpha$  et  $\theta^{\otimes} \beta$  coïncident après composition par  $\vartheta^{\otimes}$ . En utilisant à nouveau la formule de changement de base associée au carré (35), on peut supposer que  $T$  est un schéma strictement local artinien. Désignons alors par  $\bar{s}$  le point géométrique de  $S$  défini par  $\theta$ . Il existe alors un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & S_{\bar{s}}^{\text{sh}} \\ & \nearrow \vartheta & \downarrow \text{lg}_{S, \bar{s}}^{\text{sh}} \\ T & \xrightarrow{\theta} & S, \end{array}$$

où  $S_{\bar{s}}^{\text{sh}}$  désigne, conformément aux notations de la sous-section 2.3.1, le spectre de l'hensélisé strict de  $S$  au point géométrique  $\bar{s}$ . Ceci permet de supposer que  $S$  est lui aussi un schéma local strictement hensélien. Dans ce cas le schéma  $T \times_S Y$  est local. Étant fini sur le schéma artinien  $T$ , il est donc local artinien, admettant ainsi  $w$  pour unique point.

Notons par  $x_1, \dots, x_m$  les points du schéma  $T \times_S X$ , alors le lemme 1.1.30 nous donne

$$\begin{aligned} m(W, p_{T^*} \theta^{\otimes} \alpha) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^r n_i [\kappa(x_k) : \kappa(w)] \text{lg}(\mathcal{O}_{T \times_S Z_i, x_k}) \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left( \sum_{k=1}^m [\kappa(x_k) : \kappa(t)] \text{lg}(\mathcal{O}_{T \times_S Z_i, x_k}) \right) \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left( \sum_{i=1}^r n_i \text{deg}(T \times_S Z_i / T) \right) \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left( \sum_{i=1}^r n_i \text{deg}(Z_i / S) \right) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} m(W, \theta^{\otimes} \beta) &= \sum_{j=1}^s m_j \text{lg}(\mathcal{O}_{T \times_S W_j, w}) \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left( \sum_{j=1}^s m_j \text{deg}(T \times_S W_j / T) \right) \\ &= \frac{\text{lg}(\mathcal{O}_{T, t})}{[\kappa(w) : \kappa(t)]} \left( \sum_{j=1}^s m_j \text{deg}(W_j / S) \right). \end{aligned}$$

Tout revient à montrer l'égalité

$$\sum_{i=1}^r n_i \text{deg}(Z_i / S) = \sum_{j=1}^s m_j \text{deg}(W_j / S). \quad (36)$$

Fixons un point générique  $s$  de  $S$ , l'égalité (34) entraîne que pour tout point  $y$  de  $Y$  se projetant sur  $s$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{x \in p^{-1}(y)} n_i [\kappa(x) : \kappa(y)] \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_i, x}}(\mathcal{O}_{Z_i, x}) = \sum_{j=1}^s m_j \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{W_j, y}}(\mathcal{O}_{W_j, y}).$$

En multipliant chaque membre par  $[\kappa(y) : \kappa(s)]$  et en sommant sur tous les points de  $Y$  au dessus de  $s$  on obtient l'égalité

$$\sum_{i=1}^r n_i \left[ \sum_{x \in \pi_{X/S}^{-1}(s)} [\kappa(x) : \kappa(s)] \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{Z_i, x}}(\mathcal{O}_{Z_i, x}) \right] = \sum_{j=1}^s m_j \left[ \sum_{y \in \pi_{Y/S}^{-1}(s)} [\kappa(y) : \kappa(s)] \operatorname{lg}_{\mathcal{O}_{W_j, y}}(\mathcal{O}_{W_j, y}) \right]$$

à laquelle il suffit d'appliquer le lemme 1.1.30 pour obtenir (36).  $\square$

**Proposition 1.4.11.** *Soient  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas.*

1. *Le morphisme (33) induit un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Z(X/S, n; p_*) & \xrightarrow{p_*} & Z(Y/S, n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{Z}(X/S, n; p_*) & \dashrightarrow & \mathfrak{Z}(Y/S, n). \end{array}$$

2. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} & \longleftarrow & \mathfrak{Z}(X/S, n; p_*)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{p_*} & \mathfrak{Z}(Y/S, n)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ \mathfrak{Z}(X \times_S T/T, n)_{\mathbb{Q}} & \longleftarrow & \mathfrak{Z}(X \times_S T/T, n; p_{T*})_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{p_{T*}} & \mathfrak{Z}(Y \times_S T/T, n)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — (1). Supposons que  $\alpha$  soit un cycle relatif appartenant à  $\mathfrak{Z}(X/S, n)$  sur le support duquel le morphisme  $p$  est propre et écrivons ce dernier sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  sur  $S$  et dominant une composante irréductible de  $S$ . Quitte à remplacer  $X$  par la réunion des  $Z_i$ , on peut supposer plus simplement que le morphisme  $p$  est propre. Donnons nous un  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$  ainsi qu'un épaissement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  de ce dernier. Notons  $z_i$  le point générique de  $Z_i$  et  $W_i$  l'image de  $Z_i$  par  $p$ . L'image directe de  $\alpha$  par  $p$  est donnée par

$$p_* \alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i m_i [W_i].$$

où  $m_i$  est l'entier défini par (32). Quitte à réordonner les  $Z_i$ , on peut supposer que les  $k$  premiers sont ceux qui dominent la composante irréductible de  $S$  dont le point générique est l'image par

$\tau$  du point générique de  $\mathcal{O}$ . Dans ce cas on a

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i [\text{Spec } K \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}_i]$$

où  $\mathcal{Z}_i$  est l'unique sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S \mathcal{Z}_i$  plat sur  $S$  et génériquement isomorphe à ce dernier et de même

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} p_* \alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_i [\text{Spec } K \times_{\mathcal{O}} \mathcal{W}_i]$$

où  $\mathcal{W}_i$  est l'unique sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S \mathcal{W}_i$  plat sur  $S$  et génériquement isomorphe à ce dernier. Les cycles relatifs

$$p_{\mathcal{O}*} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i [\mathcal{Z}_i] \right) \quad \sum_i \alpha_i m_i [\mathcal{W}_i],$$

coïncidant génériquement, sont égaux et le lemme 1.4.10 assure finalement que

$$p_{K*}(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha = (\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} p_* \alpha.$$

Cela prouve que les cycles  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} p_* \alpha$  sont indépendants du choix de l'épaississement et donc que  $p_* \alpha$  appartient bien à  $\mathcal{Z}(Y/S, n)$ .

(2). Choisissons un cycle relatif  $\alpha$  appartenant à  $\mathcal{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  sur le support duquel  $p$  soit propre et prenons un  $K$ -point  $\underline{t}$  épais ou bien maximal de  $T$  dont l'image  $\underline{s}$  par  $\theta$  est un  $K$ -point épais ou maximal de  $S$ . Il résulte de ce qui précède et de la proposition 1.2.26 que

$$\underline{t}^{\otimes} p_{T*} \theta^{\otimes} \alpha = p_{K*} \underline{t}^{\otimes} \theta^{\otimes} \alpha = p_{K*\underline{s}}^{\otimes} \alpha = \underline{s}^{\otimes} p_* \alpha$$

et il suffit d'appliquer à nouveau la proposition 1.2.26 pour conclure que  $p_{T*} \theta^{\otimes} \alpha = \theta^{\otimes} p_* \alpha$ . Ce qui achève la démonstration.  $\square$

**1.4.3. Produits externes.** — Cette sous-section est consacrée au produit externe dont sont munis les cycles relatifs universellement rationnels ou entiers. Nous rappelons tout d'abord la construction de l'opération « correspondance » qui permet de définir la composition des correspondances finies et intervient dans la plupart des démonstrations du chapitre 2.

Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $Y$  un  $X$ -schéma. Supposons donnés un cycle relatif  $\alpha \in \mathcal{Z}(Y/X, n)_{\mathbb{Q}}$  ainsi qu'un cycle sur  $X$  à coefficients rationnels

$$\beta = \sum_Z \beta_Z [Z]$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres de  $X$ . Pour un tel sous-schéma, on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{(\iota_Z)_Y} & Y \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\iota_Z} & X \end{array}$$

et on peut considérer le cycle sur  $Y$  à coefficients rationnels

$$\text{Cor}_{Y/X}(\alpha, \beta) = \sum_Z \beta_Z(\iota_Z)_{Y*} \iota_Z^{\otimes} \alpha.$$

On obtient de la sorte un morphisme

$$\text{Cor}_{Y/X} : \mathcal{Z}(Y/X, n)_{\mathbb{Q}} \otimes Z(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow Z(Y)_{\mathbb{Q}}. \quad (37)$$

*Remarque 1.4.12.* Dans le cas où  $\beta$  est un cycle relatif de dimension  $m$  sur  $S$ , on voit que  $\text{Cor}(\alpha, \beta)$  est un cycle relatif de dimension  $n + m$  sur  $S$ . En effet chaque sous-schéma fermé intègre de  $X$  dont la multiplicité dans  $\beta$  est non nulle, domine une composante irréductible de  $S$  et est de dimension  $m$  sur  $S$ . Pour un tel sous-schéma  $Z$ , on sait que

$$\iota_Z^{\otimes} \in \mathcal{Z}(Y \times_X Z/Z, n)_{\mathbb{Q}}$$

et qu'il est donc combinaison linéaire de sous-schémas fermés intègres  $W_1, \dots, W_r$  de  $X \times_Y Z$  dominant  $Z$  et de dimension  $n$  sur  $Z$ . En particulier comme  $Z$  domine une composante irréductible de  $S$ , il en est de même de  $W_i$  et la remarque 1.1.1 nous donne

$$\dim_S(W_i) = \dim_Z(W_i) + \dim_S(Z) = n + m$$

ce qui assure que  $\text{Cor}(\alpha, \beta)$  est bien un cycle relatif sur  $S$  de dimension  $n + m$ .

Le morphisme (37) induit donc un morphisme

$$\text{Cor}_{Y/X} : \mathcal{Z}(Y/X, n)_{\mathbb{Q}} \otimes Z(X/S, m)_{\mathbb{Q}} \rightarrow Z(Y/S, n + m)_{\mathbb{Q}}. \quad (38)$$

ainsi qu'un morphisme

$$\text{Cor}_{Y/X} : z(Y/X, n) \otimes Z(X/S, m) \rightarrow Z(Y/S, n + m).$$

Le comportement de l'opération « correspondance » vis à vis des images directes est donné par le lemme suivant.

**Lemme 1.4.13.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $Y$  un  $X$ -schéma.*

1. *Supposons donnés un carré cartésien de morphismes de  $S$ -schémas*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

*un cycle  $\alpha \in \mathcal{Z}(Y/X, n)_{\mathbb{Q}}$  et un cycle  $\beta \in Z(X'/S, m; p_*)_{\mathbb{Q}}$ . Alors  $\text{Cor}(p^{\otimes} \alpha, \beta) \in Z(Y'/S, n + m; q_*)_{\mathbb{Q}}$  et on a l'égalité*

$$\text{Cor}(\alpha, p_* \beta) = q_* \text{Cor}(p^{\otimes} \alpha, \beta).$$

2. *Supposons donnés un morphisme de  $X$ -schémas  $p : Y \rightarrow Y'$ , un cycle  $\alpha \in \mathcal{Z}(Y/X, n; p_*)_{\mathbb{Q}}$  ainsi qu'un cycle  $\beta \in Z(X/S, m)_{\mathbb{Q}}$ . Alors  $\text{Cor}(\alpha, \beta) \in Z(Y/S, n + m; p_*)_{\mathbb{Q}}$  et on a*

$$\text{Cor}(p_* \alpha, \beta) = p_* \text{Cor}(\alpha, \beta).$$

DÉMONSTRATION. — (1). Par linéarité on peut supposer  $\beta = [Z']$  où  $Z'$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X'$ . Notons  $Z$  l'image de  $Z'$  par  $p$  et désignons par  $\iota$  et  $\iota'$  les immersions fermées correspondantes. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 Y' \times_{X'} Z' & \xrightarrow{q'} & Y \times_X Z & & \\
 \downarrow & \searrow^{\iota'_{Y'}} & \downarrow & \searrow^{\iota_Y} & \\
 & & Y' & \xrightarrow{q} & Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{p'} & Z & & \\
 \downarrow & \searrow^{\iota'} & \downarrow & \searrow^{\iota} & \\
 X' & \xrightarrow{p} & X & & 
 \end{array}$$

dont les faces sont cartésiennes à l'exception des faces inférieures et supérieures. Notons  $d$  l'entier égal au degré de l'extension  $F(Z)/F(Z')$  si cette dernière est finie et égal à zéro dans le cas contraire. On a alors

$$Cor(\alpha, p_*\beta) = d\iota_{Y*}\iota^{\otimes d}\alpha$$

et d'autre part

$$q_*Cor(p^{\otimes d}\alpha, \beta) = q_*\iota'_{Y'*}(\iota')^{\otimes d}p^{\otimes d} = \iota_{Y*}q'_*(p')^{\otimes d}\iota^{\otimes d}\alpha.$$

Il suffit donc de voir que  $q'_*(p')^{\otimes d}\gamma = d\gamma$  pour un cycle relatif  $\gamma$  appartenant à  $\mathcal{Z}(Y \times_X Z/Z, n)_{\mathbb{Q}}$ . Quitte à remplacer le schéma intègre  $Z$  par son corps des fonctions, on peut supposer que  $Z$  est le spectre d'un corps. Dans ce cas les morphismes  $p'$  et  $q'$  sont plats et on a

$$q'_*(p')^{\otimes d}\gamma = q'_*(q')^*\gamma = d\gamma$$

ce qui prouve l'assertion.

(2). Par linéarité on peut supposer  $\beta = [Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Notons  $\iota$  l'immersion fermée correspondante, en utilisant les notations du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y' \times_X Z & \xrightarrow{\iota'_{Y'}} & Y' \\
 & \nearrow^{p_Z} & \downarrow & \searrow^p & \downarrow \\
 Y \times_X Z & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\
 \downarrow & \searrow^{\iota_Y} & \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \xrightarrow{\quad} & X & & 
 \end{array}$$

la proposition 1.4.11 assure que

$$\begin{aligned}
 Cor(p_*\alpha, \beta) &= \iota_{Y'*}\iota^{\otimes d}p_*\alpha = \iota_{Y'*}p_Z*\iota^{\otimes d}\alpha \\
 &= p_*\iota_{Y*}\iota^{\otimes d}\alpha = p_*Cor(\alpha, \beta).
 \end{aligned}$$

□

L'opération « correspondance » est compatible au changement de base pour les cycles relatifs. Cette compatibilité s'énonce de la manière suivante.

**Proposition 1.4.14.** *Étant donné un cycle  $\alpha \in \mathcal{Z}(Y/X, n)_{\mathbb{Q}}$ , le morphisme (37) induit un morphisme*

$$Cor(\alpha, -) : \mathcal{Z}(X/S, m)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{Z}(Y/S, n + m)_{\mathbb{Q}}$$



et pour tout morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X/S, m)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\text{Cor}(\alpha, -)} & \mathcal{Z}(Y/S, n+m)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \theta^{\otimes} & & \downarrow \theta^{\otimes} \\ \mathcal{Z}(X \times_S T/T, m) & \xrightarrow{\text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, -)} & \mathcal{Z}(Y \times_S T/T, n+m)_{\mathbb{Q}}. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Fixons un cycle relatif  $\beta$  appartenant à  $\mathcal{Z}(X/S, m)_{\mathbb{Q}}$ . L'assertion est immédiate lorsque  $\alpha$  appartient à  $Z_{\text{Hilb}}(Y/W, n)_{\mathbb{Q}}$  et  $\beta$  appartient à  $Z_{\text{Hilb}}(X/S, m)_{\mathbb{Q}}$ . En effet on peut par linéarité supposer que  $\alpha = [Z]$  pour un sous-schéma fermé de  $Y$  plat équidimensionnel sur  $X$  de dimension  $n$  et que  $\beta = [W]$  pour un sous-schéma fermé de  $X$  plat sur  $Y$  de dimension  $m$ . On obtient par définition  $\text{Cor}(\alpha, \beta) = [Z \times_X W]$ , ce qui assure d'une part que  $\text{Cor}(\alpha, \beta)$  appartient à  $\mathcal{Z}(Y/S, n+m)_{\mathbb{Q}}$  et d'autre part que

$$\begin{aligned} \theta^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) &= [T \times_S (Z \times_X W)] = [((T \times_S X) \times_X Z) \times_{(T \times_S X)} (T \times_S W)] \\ &= \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, \theta^{\otimes} \beta). \end{aligned}$$

De même lorsque l'on suppose le morphisme  $\theta$  plat, on a la relation

$$\theta_Y^* \text{Cor}(\alpha, \beta) = \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, \theta^{\otimes} \beta). \quad (39)$$

En effet, par linéarité, on peut supposer que  $\beta = [Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Désignons alors par  $\iota$  l'immersion fermée correspondante. On voit, en utilisant la formule de changement de base associé au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T \times_S (Y \times_X Z) & \xrightarrow{T \times_S \iota_Y} & T \times_S Y \\ \theta_{Y \times_X Z} \downarrow & \square & \downarrow \theta_Y \\ Y \times_X Z & \xrightarrow{\iota_Y} & Y \end{array}$$

ainsi que la functorialité de la proposition 1.2.26, que

$$\begin{aligned} \theta_Y^* \text{Cor}(\alpha, \beta) &= \theta_Y^* \iota_{Y*} \iota^{\otimes} \alpha = (T \times_S \iota_Y)_* \theta_{Y \times_X Z}^* \iota^{\otimes} \alpha = (T \times_S \iota_Y)_* \theta_Z^{\otimes} \iota^{\otimes} \alpha \\ &= (T \times_S \iota_Y)_* \theta_T^{\otimes} \theta_X^{\otimes} = \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, [T \times_S Z]) = \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, \theta^{\otimes} \beta) \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation (39).

Considérons maintenant le cas général et donnons nous un  $K$ -point épais  $\underline{s}$  de  $S$  ainsi qu'un épaissement  $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$  de ce dernier. Pour prouver la proposition, il suffit de vérifier la relation suivante

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) = \text{Cor}(\underline{s}_X^{\otimes} \alpha, \underline{s}^{\otimes} \beta). \quad (40)$$

En effet supposons cette relation vraie. On voit d'une part que le premier membre de cette relation ne dépend pas de l'épaissement choisi, autrement dit que le cycle  $\text{Cor}(\alpha, \beta)$  appartient à  $\mathcal{Z}(Y/S, n+m)_{\mathbb{Q}}$ . D'autre part si  $\underline{t}$  est un  $K$ -point épais ou maximal de  $T$  dont l'image  $\underline{s}$  par  $\theta$

est un  $K$ -point épais ou maximal, on obtient en utilisant la relation (40) et le cas des morphismes plats précédemment traité

$$\begin{aligned} \underline{t}^{\otimes} \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, \theta^{\otimes} \beta) &= \text{Cor}((\theta \circ \underline{s})_X^{\otimes} \alpha, \underline{t}^{\otimes} \theta^{\otimes} \beta) = \text{Cor}(\underline{s}_X^{\otimes} \alpha, \underline{s}^{\otimes} \beta) \\ &= \underline{s}^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

ce qui compte tenu de la proposition 1.2.26 nous assure que  $\theta^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) = \text{Cor}(\theta_X^{\otimes} \alpha, \theta^{\otimes} \beta)$ .

Montrons maintenant que l'égalité (40) est bien satisfaite. Pour cela on peut se ramener à supposer que  $S$  est un trait. En effet il suffit pour cela de prouver la relation

$$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) = (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\tau_X^{\otimes} \alpha, \tau^{\otimes} \beta). \quad (41)$$

Notons pour ce faire  $a$  le cycle relatif  $\text{Cor}(\alpha, \beta)$  et écrivons ce dernier

$$a = \sum_{i=1}^s a_i [A_i]$$

où les  $A_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $Y$  dominant une composante irréductible de  $S$ . Quitte à réordonner les  $A_i$ , on peut supposer que les  $k$  premiers sont ceux qui dominent la composante irréductible de  $S$  ayant pour point générique l'image  $\rho$  du point générique de  $\mathcal{O}$ . Notons alors  $\mathcal{A}_i$  l'unique composante irréductible de  $\mathcal{O} \times_S A_i$  dominant  $\mathcal{O}$ . Pour montrer (41) il suffit de constater que les cycles

$$\sum_{i=1}^k a_i [\mathcal{A}_i] \quad \text{Cor}(\tau_X^{\otimes} \alpha, \tau^{\otimes} \beta)$$

coïncident génériquement. En utilisant les notations du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(F) & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{O} \\ & \searrow \rho & \downarrow \tau \\ & & S \end{array}$$

et le cas particulier des morphismes plats traité précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \eta^{\otimes} \left( \sum_{i=1}^k a_i [\mathcal{A}_i] \right) &= \rho^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) = \text{Cor}(\rho_X^{\otimes} \alpha, \rho^{\otimes} \beta) = \text{Cor}(\eta_X^* \tau_X^{\otimes} \alpha, \eta^{\otimes} \tau^{\otimes} \beta) \\ &= \eta^{\otimes} \text{Cor}(\tau_X^{\otimes} \alpha, \tau^{\otimes} \beta). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc supposer que  $S$  est un trait, auquel cas on peut grâce au lemme 1.2.6 se limiter par linéarité au cas où  $\beta = [Z]$  avec  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$  dominant  $\mathcal{O}$  et de dimension  $m$  sur  $\mathcal{O}$ . En utilisant le lemme 1.4.13, on voit d'une part que

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) &= (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \iota_{Y*} \iota^{\otimes} \alpha = (\iota_Y)_{K*} (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \iota^{\otimes} \alpha \\ &= (\iota_Y)_{K*} (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\iota^{\otimes} \alpha, [Z]) \end{aligned}$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\sigma_X^{\otimes} \alpha, \sigma^{\otimes} \beta) &= \text{Cor}(\sigma_X^{\otimes} \alpha, \sigma^{\otimes} \iota_* [Z]) = \text{Cor}(\sigma_X^{\otimes} \alpha, (\iota_K)_* \sigma^{\otimes} [Z]) \\ &= (\iota_Y)_{K*} \text{Cor}(\iota_K^{\otimes} \sigma_X^{\otimes} \alpha, \sigma^{\otimes} [Z]) = (\iota_Y)_{K*} \text{Cor}(\sigma_Z^{\otimes} \iota^{\otimes} \alpha, \sigma^{\otimes} [Z]). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$(\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\iota^{\otimes} \alpha, [Z]) = \text{Cor}(\sigma_Z^{\otimes} \iota^{\otimes} \alpha, \sigma^{\otimes}[Z])$$

ce qui permet de supposer d'une part que  $X$  est un schéma intègre dominant  $\mathcal{O}$  et de dimension  $m$  sur ce dernier et d'autre part que  $\beta = [X]$ . Sous cette hypothèse le schéma  $X$  est plat sur  $\mathcal{O}$  et d'après la remarque 1.2.17 il en est de même de  $X'$ . Fixons un éclatement abstrait  $\vartheta : X' \rightarrow X$  de centre un sous-schéma fermé d'intérieur vide et platifiant le cycle relatif  $\alpha$ . En utilisant le premier cas traité, la functorialité de la proposition 1.2.26, la proposition 1.4.11, ainsi que le lemme 1.4.13, on obtient que

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, [X]) &= (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \vartheta_*[X']) \\ &= (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \vartheta_{Y*} \text{Cor}(\vartheta^{\otimes} \alpha, [X']) \\ &= (\vartheta_Y)_{K*} (\mathcal{O}, \text{id}_{\mathcal{O}}, \sigma)^{\otimes} \text{Cor}(\vartheta^{\otimes} \alpha, [X']) \\ &= (\vartheta_Y)_{K*} \text{Cor}(\sigma_{X'}^{\otimes} \vartheta^{\otimes} \alpha, [X'_K]) \\ &= (\vartheta_Y)_{K*} \text{Cor}(\vartheta_K^{\otimes} \sigma_X^{\otimes} \alpha, [X'_K]) \\ &= \text{Cor}(\sigma_X^{\otimes} \alpha, \vartheta_{K*}[X'_K]) = \text{Cor}(\sigma_X^{\otimes} \alpha, [X_K]). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

L'opération « correspondance » est associative, en d'autre termes

**Lemme 1.4.15.** *Soient  $X, Y, Z$  des  $S$ -schémas. On a l'égalité*

$$\text{Cor}_{Z/Y}(\alpha, \text{Cor}_{Y/X}(\beta, \gamma)) = \text{Cor}_{Z/X}(\text{Cor}_{Z/Y}(\alpha, \beta), \gamma)$$

pour tout cycle homogène  $\alpha \in \mathcal{Z}(Z/Y, *)_{\mathbb{Q}}$ ,  $\beta \in \mathcal{Z}(Y/X, *)_{\mathbb{Q}}$  et  $\gamma \in \mathcal{Z}(X/S, *)_{\mathbb{Q}}$

DÉMONSTRATION. — Par linéarité on peut supposer que  $\gamma = [W]$  où  $W$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Notons  $\iota$  l'immersion fermée correspondante. En utilisant le lemme 1.4.13 ainsi que la proposition 1.4.14 on voit que

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\alpha, \text{Cor}(\beta, \gamma)) &= \text{Cor}(\alpha, \iota_{Y*} \iota^{\otimes} \beta) = \iota_{Z*} \text{Cor}(\iota_Y^{\otimes} \alpha, \iota^{\otimes} \beta) \\ &= \iota_{Z*} \iota^{\otimes} \text{Cor}(\alpha, \beta) = \text{Cor}(\text{Cor}(\alpha, \beta), \gamma) \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

L'opération « correspondance » permet de définir le produit des cycles relatifs via la composition

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\times_S} & \\ \mathcal{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\pi_{Y/S}^{\otimes} \otimes \text{id}} & \mathcal{Z}(X \times_S Y/Y, n)_{\mathbb{Q}} \\ \otimes & & \otimes \\ \mathcal{Z}(Y/S, m)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathcal{Z}(Y/S, m)_{\mathbb{Q}} \end{array} \xrightarrow{\text{Cor}} \mathcal{Z}(X \times_S Y/S, n+m)_{\mathbb{Q}}. \quad (42)$$

Le produit externe ainsi défini est compatible avec les changements de base pour les cycles relatifs. En outre il résulte de la construction que, pour les cycles relatifs sur corps, ce produit coïncide le produit usuel des cycles algébriques. En utilisant les propriétés de l'opération « correspondance », on obtient le

**Lemme 1.4.16.** *Les produits externes (42) possèdent les propriétés ci-dessous.*

1. *Ils sont associatifs et commutatifs*
2. *Pour tout morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X/S, *)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{Z}(Y/S, *)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\times_S} & \mathcal{Z}(X \times_S Y/S, *)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \theta^* \otimes \theta^* & & \downarrow \theta^* \\ \mathcal{Z}(T \times_S X/T, *)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{Z}(T \times_S Y/T, *)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\times_T} & \mathcal{Z}((T \times_S X) \times_T (T \times_S Y)/T, *)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — (2). Étant donnés des cycles relatifs  $\alpha \in \mathcal{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  et  $\beta \in \mathcal{Z}(Y/S, m)_{\mathbb{Q}}$  on a en utilisant la proposition 1.4.14

$$\begin{aligned} \theta^*(\alpha \times_S \beta) &= \theta^* \text{Cor}(\pi_{Y/S}^* \alpha, \beta) = \text{Cor}(\theta_Y^* \pi_{Y/S}^* \alpha, \theta^* \beta) \\ &= \text{Cor}(\pi_{T \times_S Y/T}^* \alpha, \theta^* \beta) = (\theta^* \alpha) \times_T (\theta^* \beta) \end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde assertion.

(1). En utilisant le résultat précédent et la remarque 1.1.25, on peut supposer que  $S$  est le spectre d'un corps. Écrivons alors  $\alpha$  et  $\beta$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i] \quad \beta = \sum_{j=1}^s \beta_j [W_j]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X$  de dimension  $n$  et les  $W_j$  des sous-schémas fermés intègres de  $Y$  de dimension  $m$ . La définition nous donne

$$\alpha \times_S \beta = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_i \beta_j [(Z_i) \times_S (W_j)] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_i \beta_j [(W_j) \times_S (Z_i)] = \beta \times_S \alpha$$

ce que nous voulions. □

Ces produits sont en outre compatibles aux images directes. On dispose en effet du

**Lemme 1.4.17.** *Soient  $p : X \rightarrow X'$  et  $q : Y \rightarrow Y'$  des morphismes de  $S$ -schémas. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{Z}(Y/S, m)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\times_S} & \mathcal{Z}(X \times_S Y/S, n+m)_{\mathbb{Q}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}(X/S, n; p_*)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{Z}(Y/S, m; q_*)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathcal{Z}(X \times_S Y/S, n+m; (p \times_S q)_*)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow p_* \otimes q_* & & \downarrow (p \times_S q)_* \\ \mathcal{Z}(X'/S, n)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{Z}(Y'/S, m)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\times_S} & \mathcal{Z}(X' \times_S Y'/S, n+m)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — En utilisant la remarque 1.1.25, la proposition 1.4.11 ainsi que le lemme 1.4.16, on voit que pour l'assertion considérée, on peut se ramener à supposer que  $S$  est le spectre d'un corps auquel cas le résultat est classique. □

## CHAPITRE 2

### LOCALISATION DES CORRESPONDANCES FINIES

L'objet de ce chapitre consiste à étudier localement pour la topologie de Nisnevich ou la topologie étale les correspondances finies — en ce qui concerne la définition de la topologie de Nisnevich nous renvoyons à la sous-section 3.1.2 du chapitre 3. Le résultat principal que nous obtenons consiste en l'existence d'une décomposition locale des correspondances finies pour ces topologies. Nous étudions notamment leurs propriétés relatives à la composition des correspondances ou au produit tensoriel. Le point clé de leur construction réside dans l'existence d'une homotopie canonique — autrement dit fonctorielle par rapport aux correspondances finies — pour certains complexes de Čech — proposition 2.2.3, son analogue étale étant donné dans la section 2.3. Les démonstrations utilisent de manière essentielle les propriétés des anneaux locaux henséliens ou strictement henséliens, en particulier de telles décompositions n'existent pas lorsque l'on considère la topologie de Zariski.

Ces décompositions sont à l'origine de l'existence de « transferts locaux » qui nous permettent dans le chapitre 3 de montrer que la résolution de Godement d'un faisceau Nisnevich ou étale avec transferts est canoniquement munie de transferts. Ce résultat avait été énoncé par P. Deligne [139, Exemple 6.20] mais à la connaissance de l'auteur aucune démonstration n'en avait été publiée.

#### 2.1. Correspondances finies

Nous explicitons, dans un premier temps, la définition des correspondances finies ainsi que les principales propriétés de la catégorie des  $S$ -schémas munis des correspondances finies. Hormis un survol dans [139, Appendix 1A] — l'objet de *loc.cit.* étant de développer les résultats de la théorie actuelle des motifs mixtes sur un corps — cette notion n'est disponible dans la littérature que dans le cas des corps. Naturellement l'extension aux schémas de base quelconques ne présente aucune difficulté et s'avère une simple application de la théorie générale des cycles relatifs de [125], que nous avons pris soin de rappeler dans le chapitre 1.

Lorsque qu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la base  $T$ , nous désignerons parfois le produit fibré sur  $T$  de deux  $T$ -schémas  $X, Y$  par la juxtaposition  $XY$ .

**2.1.1. Correspondances finies.** — Soient  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas, les  $S$ -correspondances finies de  $X$  dans  $Y$  sont les éléments du groupe abélien

$$c_S(X, Y) := c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0).$$

La composition des correspondances finies est fournie par les morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 c_S(Y, Z) \otimes c_S(X, Y) & \xlongequal{\quad} & c_{\text{equi}}(Y \times_S Z/Y, 0) \otimes c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \\
 \downarrow \circ & & \downarrow (p_Y^{X \times_S Y})^{\otimes} \otimes \text{id} \\
 & & c_{\text{equi}}(X \times_S Y \times_S Z/X \times_S Y, 0) \otimes c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \\
 & & \downarrow \text{Cor} \\
 & & c_{\text{equi}}(X \times_S Y \times_S Z/X, 0) \\
 & & \downarrow (p_{X \times_S Z}^{X \times_S Y \times_S Z})_* \\
 c_S(X, Z) & \xlongequal{\quad} & c_{\text{equi}}(X \times_S Z/X, 0).
 \end{array} \tag{43}$$

Dans la suite de ce travail nous utilisons la notation suivante.

*Notation 2.1.1.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $S$ -schémas — les conventions fixées dans l'introduction entraînent que tous les morphismes sont séparés — nous désignons par  $\Delta_f$  l'immersion fermée donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 & \downarrow \Delta_f & \\
 \text{id}_X & X \times_S Y & f \\
 \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 X & & Y.
 \end{array}$$

Nous notons  $\Gamma_f$  le graphe de  $f$ , autrement dit le sous-schéma fermé de  $X \times_S Y$  donné par l'immersion fermée  $\Delta_f$ . Ce dernier définit une correspondance finie de  $X$  dans  $Y$  que nous notons  $[f]$ .

**Lemme 2.1.2.** Soient  $X, Y, Z$  et  $W$  des  $S$ -schémas.

1. Étant données des correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$ ,  $\beta \in c_S(Y, Z)$  et  $\gamma \in c_S(Z, W)$  on a

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

2. Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $p : X \rightarrow Y$  et toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(Y, Z)$  on a

$$\alpha \circ [p] = p^{\otimes} \alpha.$$

3. Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $p : Y \rightarrow Z$  et toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  on a

$$[p] \circ \alpha = (\text{id}_X \times_S p)_* \alpha.$$

4. Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $p : X \rightarrow Y$  et  $q : Y \rightarrow Z$  on a

$$[q] \circ [p] = [q \circ p].$$

DÉMONSTRATION. — (1). En utilisant les propositions 1.4.11, 1.4.14 ainsi que les lemmes 1.4.13 et 1.4.15, on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma \circ (\beta \circ \alpha) &= \gamma \circ \left[ p_{XZ}^{XYZ} \text{Cor}(p_Y^{XY^\otimes} \beta, \alpha) \right] = p_{XW}^{XZW} \text{Cor}\left(p_Z^{YZ^\otimes} \gamma, p_{XZ}^{XYZ} \text{Cor}(p_Y^{XY^\otimes} \beta, \alpha)\right) \\
&= p_{XW}^{XZW} p_{XZW}^{XYZ} \text{Cor}\left(p_{XZ}^{XYZ^\otimes} p_Z^{XZ^\otimes} \gamma, \text{Cor}(p_Y^{XY^\otimes} \beta, \alpha)\right) \\
&= p_{XW}^{XZW} p_{XZW}^{XYZ} \text{Cor}\left(\text{Cor}(p_{XZ}^{XYZ^\otimes} p_Z^{XZ^\otimes} \gamma, p_Y^{XY^\otimes} \beta), \alpha\right) \\
&= p_{XW}^{XYW} p_{XYW}^{XYZ} \text{Cor}\left(\text{Cor}(p_{YZ}^{XYZ^\otimes} p_Z^{YZ^\otimes} \gamma, p_Y^{XY^\otimes} \beta), \alpha\right) \\
&= p_{XW}^{XYW} \text{Cor}\left(p_{XYW}^{XYZ} p_Y^{XY^\otimes} \text{Cor}(p_Z^{YZ^\otimes} \gamma, \beta), \alpha\right) \\
&= p_{XW}^{XYW} \text{Cor}\left(p_Y^{XY^\otimes} p_{YW}^{YZW} \text{Cor}(p_Z^{YZ^\otimes} \gamma, \beta), \alpha\right) \\
&= p_{XW}^{XYW} \text{Cor}\left(p_Y^{XY^\otimes} (\gamma \circ \beta), \alpha\right) = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).
\end{aligned}$$

(2). En utilisant la remarque 1.1.25 on peut supposer que  $X$  est intègre. On a alors

$$\alpha \circ [p] = p_{XZ}^{XYZ} \text{Cor}\left(p_Y^{XY^\otimes} \alpha, [\Gamma_p]\right) = \Delta_p^\otimes \left(p_Y^{XY^\otimes} \alpha\right) = p^\otimes \alpha.$$

(3). Notons  $q$  la composée de la projection de  $X \times_S Y$  sur  $Y$  et du morphisme  $p$  et écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où  $Z_i$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X \times_S Y$ . Désignons par  $\iota_{Z_i}$  l'immersion fermée correspondant à  $Z_i$  et par  $q_i$  la composée de cette dernière et de  $q$ . On a alors

$$\begin{aligned}
[p] \circ \alpha &= p_{XZ}^{XYZ} \text{Cor}\left(p_Y^{XY^\otimes} [\Gamma_p], \alpha\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(p_{XZ}^{XYZ} (\iota_{Z_i} \times_S \text{id}_Z)_* \iota_{Z_i}^\otimes p_Y^{XY^\otimes} [\Gamma_p]\right) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(p_{XZ}^{XYZ} (\iota_{Z_i} \times_S \text{id}_Z)_* [\Gamma_{q_i}]\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(p_{XZ}^{XYZ} (\Delta_q)_* [Z_i]\right) \\
&= p_{XZ}^{XYZ} \left((\Delta_q)_* \alpha\right) = (\text{id}_X \times_S p)_* \alpha.
\end{aligned}$$

(4). D'après la seconde assertion, on sait que  $[q] \circ [p] = p^\otimes [\Gamma_q]$  et le résultat découle de l'égalité  $p^\otimes [\Gamma_q] = [\Gamma_{q \circ p}]$ .  $\square$

En particulier le lemme 2.1.2 assure qu'en prenant pour objets les  $S$ -schémas et pour morphismes les correspondances finies, on obtient une catégorie  $\text{SchCor}_S$  munie d'un foncteur pleinement fidèle

$$[-] : \text{Sch}_S \rightarrow \text{SchCor}_S. \quad (44)$$

Nous notons  $\text{SmCor}_S$  la sous-catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini munis des correspondances finies.

La catégorie  $\text{SchCor}_S$  possède une structure tensorielle naturelle compatible via le foncteur (44) avec la structure monoïdale symétrique induite par le produit fibré sur  $\text{Sch}_S$ . Cette dernière est obtenue en prenant pour produit tensoriel des  $S$ -correspondances finies le morphisme

$$\begin{array}{ccc}
c_S(X, Y) & & c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \\
\otimes & \xlongequal{\quad} & \otimes \\
c_S(X', Y') & & c_{\text{equi}}(X' \times_S Y'/X', 0) \\
\vdots & & \downarrow \\
\otimes & & \left( p_X^{X \times_S X'} \right)^\otimes \otimes \left( p_{X'}^{X \times_S X'} \right)^\otimes \\
\downarrow & & \downarrow \\
c_S(X \times_S X', Y \times_S Y') & \xlongequal{\quad} & c_{\text{equi}}(X \times_S X' \times_S Y/X \times_S X', 0) \\
\otimes & & \otimes \\
& & c_{\text{equi}}(X \times_S X' \times_S Y'/X \times_S X') \\
& & \downarrow \\
& & \times_{X \times_S X'} \\
& & \downarrow \\
c_S(X \times_S X', Y \times_S Y') & \xlongequal{\quad} & c_{\text{equi}}(X \times_S X' \times_S Y \times_S Y'/X \times_S X', 0)
\end{array}$$

Le fait que cette définition soit bien symétrique est assuré par le lemme 1.4.16. La compatibilité aux produits fibrés énoncée précédemment se trouve justifiée par la

*Remarque 2.1.3.* Lorsque l'on se donne des morphismes de  $S$ -schémas  $p : X \rightarrow Y$  et  $q : Y \rightarrow Y'$  cette définition nous donne

$$\begin{aligned}
[p] \otimes [q] &= \left( p_X^{X X'} \otimes [\Gamma_p] \right) \times_{X \times_S X'} \left( p_{X'}^{X X'} \otimes [\Gamma_q] \right) \\
&= \text{Cor} \left( p_{X X'}^{X X' Y'} \otimes p_X^{X X'} \otimes [\Gamma_p], p_{X'}^{X X'} \otimes [\Gamma_q] \right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs en utilisant les notations

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{g} & \\
X \times_S X' \times_S Y' & \xrightarrow{p_{X X'}^{X X' Y'}} X & \xrightarrow{p} Y \\
& & \searrow h \\
X \times_S X' & \xrightarrow{p_{X'}^{X X'}} X' & \xrightarrow{q} Y
\end{array}$$

on voit que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_{p \times_S q} & \longrightarrow & \Gamma_g \\
\downarrow & \square & \downarrow \\
\Gamma_h & \longrightarrow & X \times_S X' \times_S Y'
\end{array}$$

est cartésien. Cela entraîne que

$$[p] \otimes [q] = \text{Cor}([\Gamma_g], [\Gamma_h]) = [\Gamma_{p \times_S q}] = [p \times_S q].$$



*Remarque 2.1.4.* Étant donné des  $S$ -schémas  $X, Y$  et une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{[\Delta_X]} & X \times_S X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \otimes \alpha \\ Y & \xrightarrow{[\Delta_Y]} & Y \times_S Y \end{array}$$

n'est pas nécessairement commutatif lorsque  $\alpha$  n'est pas une correspondance finie obtenue à partir d'un morphisme de  $S$ -schémas.

La proposition suivante montre que les morphismes (43) coïncident avec la composition des correspondances finies pour les schémas lisses de type fini sur une base régulière obtenue via la théorie de l'intersection.

**Proposition 2.1.5.** *Supposons que  $S$  soit régulier et que  $X, Y, Z$  soient des  $S$ -schémas lisses de type fini. Alors pour toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$*

1. *les cycles  $p_{XY}^{XYZ*} \alpha$  et  $p_{YZ}^{XYZ*} \beta$  s'intersectent proprement,*
2. *la composition des correspondances  $\alpha$  et  $\beta$  est donnée par*

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ}^{XYZ} \left( p_{XY}^{XYZ*} \alpha \frown p_{YZ}^{XYZ*} \beta \right).$$

DÉMONSTRATION. — (1). Les schémas  $X, Y, Z$  étant lisses de type fini sur  $S$ , ils sont à fortiori équidimensionnels sur ce dernier. Les schémas considérés étant réguliers, on sait que leurs composantes connexes coïncident avec leurs composantes irréductibles. On peut donc supposer sans perte de généralité que  $X, Y, Z$  et  $S$  sont connexes. En particulier les schémas  $X, Y, Z$  sont équidimensionnels sur  $S$  de dimension respective  $n_X, n_Y$  et  $n_Z$ . Notons  $d$  la dimension de  $S$  et convenons de noter  $|\alpha|$  le support de  $\alpha$  et  $|\beta|$  celui de  $\beta$ . Comme  $XY$  est équidimensionnel sur  $S$  de dimension  $n_X + n_Y$  et que le schéma  $|\alpha|$  est fini sur  $X$ , on voit que  $\alpha$  est de codimension  $n_Y$  dans  $XY$ . De même  $\beta$  est de codimension  $n_Z$  dans  $YZ$ . Les schémas considérés étant réguliers, la notion de morphisme équidimensionnel est stable par changement de base ce qui entraîne que les sous-schémas fermés  $|\alpha| \times_S Z$  et  $X \times_S |\beta|$  sont respectivement équidimensionnels de dimension 0 sur  $XZ$  et  $XY$ . En particulier ils sont respectivement de codimension  $n_Y$  et  $n_Z$  dans  $XYZ$ . Il s'agit donc de voir que le schéma

$$(|\alpha| \times_S Z) \times_{XYZ} (X \times_S |\beta|) = |\alpha| \times_Y |\beta|$$

est de codimension  $n_Y + n_Z$  dans  $XYZ$ . Or ce dernier est fini et équidimensionnel sur  $X$  d'après le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} |\alpha| \times_Y |\beta| & \longrightarrow & |\beta| \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{fini equi} \\ |\alpha| & \longrightarrow & Y \\ \downarrow \text{fini equi} & & \\ X & & \end{array}$$

et la stabilité des morphismes finis et équidimensionnels par changement de base. Ce qui prouve qu'il est de codimension  $n_X + n_Z$  dans  $XYZ$ .

(2). Par linéarité on peut supposer que  $\alpha = [W]$  où  $W$  est un sous-schéma fermé intègre de  $XY$  fini et équidimensionnel sur  $X$ . Dans ce cas, on voit, en notant  $\iota$  l'immersion fermée correspondante, que

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ}^{XYZ} \text{Cor} \left( p_X^{XY} \otimes \beta, \alpha \right) = p_{XZ}^{XYZ} \left( \iota_{Z*} \iota^* p_X^{XY} \otimes \beta \right).$$

La première assertion ainsi que le corollaire 1.3.13 nous assurent que

$$\iota_{Z*} \iota^* p_X^{XY} \otimes \beta = \iota_{Z*} \iota_Z^* p_{YZ}^{XYZ} \beta = [W \times_S Z] \frown p_{YZ}^{XYZ} \beta$$

ce qui nous donne bien la formule

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ}^{XYZ} \left( p_{XY}^{XYZ} \alpha \frown p_{YZ}^{XYZ} \beta \right).$$

□

**2.1.2. Changement de base.** — Étant donné un morphisme de schémas  $\theta : T \rightarrow S$  et deux  $S$ -schémas  $X$  et  $Y$ , on peut considérer le morphisme de changement de base induit par  $\theta_X$

$$\theta_X^{\otimes} : c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}((T \times_S X) \times_S (X \times_S Y)/T \times_S X, 0).$$

Sachant que l'on a les isomorphismes

$$(T \times_S X) \times_S (X \times_S Y) = T \times_S (X \times_S Y) = (T \times_S X) \times_T (T \times_S Y)$$

ce dernier nous donne en fait un morphisme de « changement de base »

$$T \times_S - : c_S(X, Y) \rightarrow c_T(T \times_S X, T \times_S Y).$$

Nous noterons souvent  $\alpha_T$  la  $T$ -correspondance finie obtenue par changement de base à partir d'une  $S$ -correspondance finie  $\alpha$ . Les propriétés élémentaires du changement de base sont données par le

**Lemme 2.1.6.** *Soient  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas et  $X, X', Y, Y', Z$  des  $S$ -schémas.*

1. *Étant données des  $S$ -correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$  on a*

$$\beta_T \circ \alpha_T = (\beta \circ \alpha)_T.$$

2. *Étant données des  $S$ -correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  on a*

$$\alpha_T \otimes \beta_T = (\alpha \otimes \beta)_T.$$

3. *Si  $p : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $S$ -schémas alors  $[p]_T = [p_T]$ .*

DÉMONSTRATION. — (1). En utilisant la proposition 1.4.14, on voit que

$$\begin{aligned} \beta_T \circ \alpha_T &= \left( p_{X_T Z_T}^{X_T Y_T Z_T} \right)_* \text{Cor} \left( \left( p_{Y_T}^{X_T Y_T} \right)^{\otimes} \beta_T, \alpha_T \right) \\ &= \left( p_{X_T Z_T}^{X_T Y_T Z_T} \right)_* \text{Cor} \left( \left( p_{Y_T}^{X_T Y_T} \right)^{\otimes} \theta_Y^{\otimes} \beta, \theta_X^{\otimes} \alpha \right) \\ &= \left( p_{X_T Z_T}^{X_T Y_T Z_T} \right)_* \text{Cor} \left( \theta_{XY}^{\otimes} \left( p_Y^{XY} \right)^{\otimes} \beta, \theta_X^{\otimes} \alpha \right) \\ &= \left( p_{X_T Z_T}^{X_T Y_T Z_T} \right)_* \theta_X^{\otimes} \text{Cor} \left( \left( p_Y^{XY} \right)^{\otimes} \beta, \theta_X^{\otimes} \alpha \right). \end{aligned}$$

La proposition 1.4.11 nous assure finalement que

$$\beta_T \circ \alpha_T = \theta_X^{\otimes} (p_{XZ}^{XYZ})_* \text{Cor} \left( (p_Y^{XY})^{\otimes} \beta, \theta_X^{\otimes} \alpha \right) = (\beta \circ \alpha)_T.$$

(2). En utilisant le lemme 1.4.16 on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_T \otimes \beta_T &= \left( p_{X_T}^{X_T X'_T} \theta_X^{\otimes} \alpha \right) \times_{X_T X'_T} \left( p_{X'_T}^{X_T X'_T} \theta_{X'}^{\otimes} \beta \right) \\ &= \left( \theta_{X X'}^{\otimes} p_X^{X X'} \alpha \right) \times_{X_T X'_T} \left( \theta_{X X'}^{\otimes} p_{X'}^{X X'} \beta \right) \\ &= \theta_{X X'}^{\otimes} (\alpha \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta)_T \end{aligned}$$

d'où la compatibilité au produit tensoriel.

(3). Il suffit de remarquer que  $\theta_X^{\otimes}[\Gamma_p] = [\Gamma_{p_T}]$  pour obtenir le résultat.  $\square$

Le lemme 2.1.6 assure que le morphisme de changement de base  $T \times_S -$  est fonctoriel, tensoriel et qu'en outre le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sch}_S & \xrightarrow{T \times_S -} & \text{Sch}_T \\ \downarrow [-] & & \downarrow [-] \\ \text{SchCor}_S & \xrightarrow{T \times_S -} & \text{SchCor}_T. \end{array}$$

**2.1.3. Commutation aux limites projectives.** — Nous montrons dans cette sous-section une propriété de commutation à certaines limites projectives de la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini munis des correspondances finies qui sera étendue aux catégories de motifs mixtes géométriques dans la sous-section 4.1.3. Les systèmes projectifs de schémas que nous considérons sont les systèmes projectifs de schémas  $\lambda \mapsto S_\lambda$  indicés par un ensemble ordonné filtrant  $\Lambda$ . Nous notons  $u_{\lambda, \mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$  les morphismes de transition. Dans cette sous-section notre hypothèse est la suivante.

**Le schéma  $S$  est régulier et limite projective d'un système projectif de schémas réguliers  $\lambda \mapsto S_\lambda$  dont les morphismes de transition sont plats et affines.**

Comme  $S$  et les  $S_\lambda$  sont réguliers, leurs composantes irréductibles coïncident avec leurs composantes connexes. Pour un élément  $\lambda$  de  $\Lambda$ , nous notons dans la suite

$$u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$$

le morphisme canonique. Il résulte de notre hypothèse que ce morphisme est plat. Si  $X_{\lambda_0}$  est un  $S_{\lambda_0}$ -schéma, nous posons

$$X_\lambda = S_\lambda \times_{S_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \quad X = S \times_{S_{\lambda_0}} X_{\lambda_0}.$$

Le résultat essentiel est donné par la proposition suivante.

**Proposition 2.1.7.** *Soit  $X_{\lambda_0}$  un  $S_{\lambda_0}$ -schéma de type fini. Les morphismes de changement de base associés aux morphismes de transition induisent un isomorphisme*

$$\text{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\text{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0) = c_{\text{equi}}(X/S, 0).$$

DÉMONSTRATION. — Il s'agit de voir que le morphisme

$$\operatorname{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\text{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0) \xrightarrow{\operatorname{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} u_\lambda^\otimes} c_{\text{equi}}(X/S, 0)$$

est un isomorphisme. On remarquera que nos hypothèses entraînent que tous les changements de base considérés sont plats. Montrons tout d'abord que le morphisme est surjectif. On sait d'après le corollaire 1.2.34 que le membre de droite est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres  $Z$  de  $X$  finis et surjectifs sur une composante connexe de  $S$ . Soit  $Z$  un tel sous-schéma fermé de  $X$ . En utilisant les théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [55], on peut supposer, quitte à prendre  $\lambda_0$  un peu plus grand, qu'il existe un sous-schéma fermé  $Z_{\lambda_0}$  de  $X_{\lambda_0}$  tel que

$$Z = S \times_{S_{\lambda_0}} Z_{\lambda_0}.$$

Une nouvelle application du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* nous assure, quitte à prendre  $\lambda_0$  un peu plus grand, que  $Z_{\lambda_0}$  est fini sur  $S_{\lambda_0}$ . Soit  $C$  la composante connexe de  $S$  dominée par  $Z$ . Comme le morphisme  $u_\lambda$  est plat,  $C$  domine une composante connexe  $C_\lambda$  de  $S_\lambda$ . Le système projectif  $\lambda \mapsto C_\lambda$  étant à morphismes de transition affines dominants, la proposition 8.4.4 de *loc.cit.* assure que la limite projective  $C'$  de  $C$  est connexe. Par ailleurs, il résulte du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* qu'il d'agit d'un ouvert de  $S$ . On voit donc que  $C'$  est un ouvert connexe de  $S$  contenant  $C$ , ce qui permet de conclure que  $C$  est la limite projective des  $C_\lambda$ . Quitte à prendre  $\lambda_0$  un peu plus grand, une nouvelle application du théorème 8.10.5 de *loc.cit.* permet de conclure que  $Z_{\lambda_0}$  est surjectif sur la composante connexe  $C_{\lambda_0}$ . Sachant que nous avons supposé les  $S_\lambda$  réguliers, le corollaire 1.2.34 assure alors que  $[Z_{\lambda_0}]$  appartient à  $c_{\text{equi}}(X_{\lambda_0}/S_{\lambda_0}, 0)$  et la surjectivité résulte de l'égalité

$$u_{\lambda_0}^\otimes [Z_{\lambda_0}] = [S \times_{S_{\lambda_0}} Z_{\lambda_0}] = [Z].$$

Montrons maintenant l'injectivité. Soit  $\lambda$  un élément  $\geq \lambda_0$  de  $\Lambda$  et  $\alpha_\lambda$  un élément de  $c_{\text{equi}}(X_\lambda/S_\lambda, 0)$  dont l'image par  $u_\lambda^\otimes$  est nulle. En notant  $Z_\mu$  le support du cycle  $\alpha_\mu = u_{\lambda, \mu}^\otimes \alpha$ , il s'ensuit que la limite projective du système  $\mu \mapsto Z_\mu$  est vide. Le théorème 8.10.5 de *loc.cit.* assure alors que  $Z_\mu$  est vide pour  $\mu$  suffisamment grand et donc que  $\alpha_\mu = 0$ . Cela achève la preuve de la proposition.  $\square$

En appliquant le lemme précédent aux correspondances finies entre schémas lisses de type fini, on obtient alors le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.8.** *Soient  $\lambda_0 \in \Lambda$  et  $X_{\lambda_0}, Y_{\lambda_0}$  des  $S_{\lambda_0}$ -schémas lisses de type fini. Le morphisme canonique*

$$\operatorname{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \rightarrow c_S(X, Y)$$

*est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. — Comme les  $X_\lambda$  et  $Y_\lambda$  sont des schémas lisses sur un schéma régulier il s'ensuit qu'ils sont eux-mêmes réguliers. La proposition 2.1.7 nous donne alors

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) &= \operatorname{colim}_{\lambda \geq \lambda_0} c_{\text{equi}}(X_\lambda \times_{S_\lambda} Y_\lambda / X_\lambda, 0) \\ &= c_{\text{equi}}(X \times_S Y / X, 0) = c_S(X, Y) \end{aligned}$$

ce justifie le corollaire.  $\square$

Ce résultat nous donne la propriété de commutation à certaines limites projectives des catégorie de schémas lisses munis des correspondances finies que nous avons mentionnée précédemment. Son énoncée est la reformulation ci-dessous du corollaire 2.1.8.

**Corollaire 2.1.9.** *Le foncteur canonique*

$$2\text{-colim}_{\lambda} \text{SmCor}_{S_{\lambda}} \rightarrow \text{SmCor}_S \quad (45)$$

*est une équivalence de catégorie.*

DÉMONSTRATION. — Compte tenu du corollaire 2.1.8, notre assertion est une conséquence des théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [55] et de la proposition 17.7.8 de [56].  $\square$

## 2.2. Localisation Nisnevich des correspondances finies

Dans cette section nous donnons un résultat de décomposition locale des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich. La construction de ces décompositions utilise de manière cruciale les propriétés des anneaux locaux henséliens, en particulier une telle décomposition n'existe pas lorsque l'on considère la topologie de Zariski.

*Remarque 2.2.1.* L'existence de ces décompositions locales est aussi valable lorsque l'on remplace la topologie de Nisnevich par la topologie étale. Les démonstrations sont identiques à condition de substituer les anneaux locaux strictement henséliens aux anneaux locaux henséliens et nous avons choisi pour simplifier la présentation de ne donner les détails que pour la topologie de Nisnevich. Les modifications mineures à effectuer lorsque l'on considère la topologie étale sont données dans la section 2.3.

Nous dirons qu'un  $S$ -schéma est décomposé pour la topologie de Nisnevich lorsqu'il est une réunion disjointe non nécessairement finie de schémas locaux henséliens. A un  $S$ -schéma  $X$  on peut associer fonctoriellement un  $S$ -schéma décomposé pour la topologie de Nisnevich  $X^{\flat}$

$$X^{\flat} := \coprod_{x \in X} X_x^{\flat}$$

réunion disjointe sur les points de  $X$  des schémas locaux henséliens  $X_x^{\flat}$  spectre de l'anneau local hensélien  $\mathcal{O}_{X,x}^{\flat}$  dont on notera le point fermé abusivement par  $x$ . Pour tout point  $x$  de  $X$  on dispose du morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\flat}{\mathcal{I}}_{X,x} & \\ & \curvearrowright & \\ X_x^{\flat} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow X \end{array}$$

nous donnant un morphisme de schémas  $\flat_{X,x} : X_x^{\flat} \rightarrow X$ .

La propriété universelle des hensélisés se traduit par le fait que la composition par  $\flat_X$  induit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Sch}_S}(D, X^{\flat}) = \text{Hom}_{\text{Sch}_S}(D, X) \quad (46)$$

pour tout  $S$ -schéma  $D$  décomposé pour la topologie de Nisnevich. On remarquera que le morphisme

$$\iota_{X^{\flat}}^{\flat} : (X^{\flat})^{\flat} \rightarrow X^{\flat}$$

n'est pas un isomorphisme, mais qu'il admet cependant une section canonique  $\mathfrak{s}_X^{\flat}$  identifiant  $X^{\flat}$  à un sous-schéma fermé de  $(X^{\flat})^{\flat}$  et provenant du fait que l'anneau local hensélien de  $X_x^{\flat}$  en son point fermé est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_{X,x}^h$  :

$$\begin{array}{ccccc} X^{\flat} & \xrightarrow{\mathfrak{s}_X^{\flat}} & (X^{\flat})^{\flat} & \xrightarrow{\iota_{X^{\flat}}^{\flat}} & X^{\flat} & \xrightarrow{\iota_X^{\flat}} & X \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & & & \\ & & \text{id}_{X^{\flat}} & & & & \end{array}$$

Autrement dit dans  $(X^{\flat})^{\flat}$  apparaissent des facteurs supplémentaires correspondant aux points non fermés des  $X_x^{\flat}$ .

*Remarque 2.2.2.* Pour la notion de faisceaux Nisnevich ou étales avec transferts, nous renvoyons à la sous-section 3.2.1. Étant donné un  $S$ -schéma  $X$ , nous notons le préfaisceau avec transferts représenté par un  $S$ -schéma  $X$  par  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$ . Ses sections sur un  $S$ -schéma  $Y$  sont données par les correspondances finies de  $Y$  vers  $X$

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](Y) = c_S(Y, X)$$

et  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  n'est donc qu'une autre notation pour désigner le préfaisceau  $\underline{c}_{\text{equi}}(X/S, 0)$  considéré au premier chapitre.

**2.2.1. Une homotopie canonique.** — Considérons un  $S$ -schéma  $X$ . Étant donné un  $X$ -schéma  $U$ , on note  $\check{C}_X(U)$  le schéma simplicial de Čech dont les  $n$ -simplexes sont donnés par le produit fibré sur  $X$  de  $n + 1$ -copies de  $U$

$$\check{C}_X(U)_n = U_X^{n+1} = \underbrace{U \times_X \cdots \times_X U}_{n+1 \text{ termes}}$$

la  $i$ -ème dégénérescence  $\delta_i^n$  étant le morphisme de projection sur chaque facteur sauf le  $i$ -ème et la  $i$ -ème face  $\sigma_i^n$  le morphisme induit par l'immersion diagonale sur le  $i$ -ème facteur. Ce schéma simplicial nous définit un complexe de Čech augmenté dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\check{C}_{U/X} = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\check{C}_X(U)] : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\check{C}_X(U)_n] \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\check{C}_X(U)_{n-1}] \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]. \quad (47)$$

dont la différentielle est donnée par la somme alternée des morphismes induits par les dégénérescences

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\delta_i^n)_*$$

Étant donné un  $S$ -schéma  $\mathcal{O}$ , en prenant les sections sur  $\mathcal{O}$  du complexe de Čech précédent on obtient un complexe de groupes abéliens

$$\check{C}_{U/X}(\mathcal{O}) : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U_X^2](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](\mathcal{O}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Le résultat essentiel assurant l'existence d'une décomposition locale et sa canonicité consiste en un raffinement de la proposition 3.1.3 de [133]. Cette dernière assure que lorsque  $U$  est un

recouvrement Nisnevich de  $X$  et  $\mathcal{O}$  est un schéma local hensélien, le complexe  $\check{C}_{U/X}(\mathcal{O})$  est exact. Lorsque l'on remplace le recouvrement Nisnevich  $U$  par le schéma décomposé  $X^{\flat}$  le complexe

$$\check{C}_{X^{\flat}/X}(\mathcal{O}) : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^2 \right] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X^{\flat}] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X] (\mathcal{O}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (48)$$

est non seulement exact mais devient en fait canoniquement homotope à zéro. Plus précisément :

**Proposition 2.2.3.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un  $S$ -schéma local hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\flat} : \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^n \right] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}) \quad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

1. (Homotopie) On a pour tout  $n$  les relations

$$d_{n+1} \circ \sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\flat} + \sigma_{\mathcal{O},X,n-1}^{\flat} \circ d_n = \text{id}. \quad (49)$$

2. (Fonctorialité) Étant donné un  $S$ -schéma local hensélien  $\mathcal{O}'$  et une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$  on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^n \right] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^n \right] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^n \right] (\mathcal{O}) \\ \downarrow \sigma_{\mathcal{O}',X,n}^{\flat} & & \downarrow \sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\flat} \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^{n+1} \right] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}). \end{array} \quad (50)$$

DÉMONSTRATION. — Étant donné un sous-schéma fermé  $Z$  de  $\mathcal{O} \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ , on note  $W$  le sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S X^{\flat}$  défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r} & Z \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{O} \times_S X^{\flat} & \longrightarrow & \mathcal{O} \times_S X. \end{array}$$

Sachant que dans le carré précédent les morphismes verticaux sont des immersions fermées et que

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \times_S (X^{\flat})_X^n &= \mathcal{O} \times_S \left( \underbrace{X^{\flat} \times_X \cdots \times_X X^{\flat}}_{n+1 \text{ termes}} \right) \\ &= \underbrace{(\mathcal{O} \times_S X^{\flat}) \times_{(\mathcal{O} \times_S X)} \cdots \times_{(\mathcal{O} \times_S X)} (\mathcal{O} \times_S X^{\flat})}_{n+1 \text{ termes}} = (\mathcal{O} \times_S X^{\flat})_{\mathcal{O} \times_S X}^n \end{aligned}$$

on voit que  $W_Z^n$  est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S (X^{\flat})_X^n$ . En particulier on a des sous-groupes

$$c_{\text{equi}}(W_Z^n/\mathcal{O}, 0) \subset \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\flat})_X^n \right] (\mathcal{O})$$

définissant un sous-complexe de (48)

$$\check{C}_{X^{\flat}/X}(\mathcal{O})_Z : \cdots \rightarrow c_{\text{equi}}(W_Z^2/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(W_Z^1/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(Z/\mathcal{O}, 0) \rightarrow 0 \cdots \quad (51)$$

Les complexes (51) sont fonctoriels pour l'inclusion des sous-schémas fermés  $Z$  finis et équidimensionnels sur  $\mathcal{O}$  et on voit que le complexe (48) est la colimite sur de tels sous-schémas fermés de ces complexes. En effet il s'agit de voir que pour tout  $n$

$$\operatorname{colim}_Z c_{\text{equi}}(W_Z^n, \mathcal{O}, 0) = \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{h}})_X^n \right] (\mathcal{O}) \quad (52)$$

la colimite étant prise sur les sous-schémas fermés de  $\mathcal{O} \times_S X$  finis et équidimensionnels sur  $\mathcal{O}$ . Soit  $\mathcal{W}$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathcal{O} \times_S (X^{\text{h}})_X^n$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ . Comme les images de  $\mathcal{W}$  par les morphismes

$$\mathcal{O} \times_S (X^{\text{h}})_X^n \xrightarrow[\text{la } i\text{-ème projection}]{\text{morphisme induit par}} \mathcal{O} \times_S X^{\text{h}} \xrightarrow{\mathcal{O} \times_S \iota_X^{\text{h}}} \mathcal{O} \times_S X$$

sont des sous-schémas fermés intègres de  $\mathcal{O} \times_S X$  finis et équidimensionnels sur  $\mathcal{O}$ , il existe un sous-schéma fermé  $Z$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$  qui les contient toutes. Pour un tel  $Z$  notre  $\mathcal{W}$  est un sous-schéma fermé de  $W_Z^n$  ce qui prouve la relation (52).

Nous allons construire pour chaque complexe (51) une homotopie canonique. Comme  $Z$  est fini sur le schéma local hensélien  $\mathcal{O}$ , il est lui même semi-local hensélien donc décomposé pour la topologie de Nisnevich de la forme

$$Z = \coprod_{z \text{ point fermé de } Z} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}).$$

En particulier la propriété universelle (46) nous assure l'existence d'un unique morphisme  $\theta_Z$  factorisant la projection  $\pi_Z$  de  $Z$  sur  $X$  sous la forme

$$\begin{array}{ccc} & \pi_Z & \\ & \curvearrowright & \\ Z & \xrightarrow{\theta_Z} & X^{\text{h}} \xrightarrow{\iota_X^{\text{h}}} X. \end{array}$$

La propriété universelle des produits fibrés nous fournit alors une section canonique  $\sigma_Z^{\text{h}}$  du morphisme  $r$  via le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_Z & & \\ & & \curvearrowright & & \\ Z & \xrightarrow{\sigma_Z^{\text{h}}} & W & \xrightarrow{r} & Z \\ & & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \mathcal{O} \times_S X^{\text{h}} & \longrightarrow & \mathcal{O} \times_S X \xrightarrow{\pi_Z} \\ & & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & X^{\text{h}} & \xrightarrow{\iota_X^{\text{h}}} & X. \end{array} \quad (53)$$

On peut alors considérer les morphismes de schémas

$$\sigma_{Z,n}^{\text{h}} = \sigma_Z^{\text{h}} \times_Z \text{id}_{W_Z^n} : W_Z^n \rightarrow W_Z^{n+1}.$$

Ces derniers vérifient les relations pour  $i = 0, \dots, n$

$$\delta_{i+1}^{n+1} \circ \sigma_{Z,n}^{\text{h}} = \sigma_{Z,n-1}^{\text{h}} \circ \delta_i^n \quad \delta_0^{n+1} \circ \sigma_{Z,n}^{\text{h}} = \text{id}$$



ce qui assure que les morphismes induits sur les cycles équidimensionnels

$$\sigma_{\mathcal{O},X,Z,n}^{\mathfrak{h}} := (\sigma_{Z,n}^{\mathfrak{h}})_* : c_{\text{equi}}(W_Z^n/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(W_Z^{n+1}/\mathcal{O}, 0)$$

définissent une homotopie entre l'identité du complexe (51) et le morphisme nul.

Lorsque  $Z'$  est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$  contenant  $Z$ , les factorisations précédemment obtenues sont compatibles

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_Z} & X \\ \theta_Z \searrow & & \uparrow \iota_X^{\mathfrak{h}} \\ & X^{\mathfrak{h}} & \\ \theta_{Z'} \nearrow & & \uparrow \\ Z' & \xrightarrow{\pi_{Z'}} & X \end{array}$$

et en particulier la construction de la section  $\sigma_Z^{\mathfrak{h}}$  assure que le carré

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\sigma_Z^{\mathfrak{h}}} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \xrightarrow{\sigma_{Z'}^{\mathfrak{h}}} & W' \end{array}$$

est commutatif et donc que le diagramme obtenu au niveau des cycles algébriques

$$\begin{array}{ccc} c_{\text{equi}}(W_Z^n/\mathcal{O}, 0) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X,Z,n}^{\mathfrak{h}}} & c_{\text{equi}}(W_Z^{n+1}/\mathcal{O}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_{\text{equi}}((W')_{Z'}^n/\mathcal{O}, 0) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X,Z',n}^{\mathfrak{h}}} & c_{\text{equi}}((W')_{Z'}^{n+1}/\mathcal{O}, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}] (\mathcal{O}) \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^n] (\mathcal{O}) \end{array}$$

l'est aussi. En passant à la colimite sur les sous-schémas fermés  $Z$  on obtient ainsi un morphisme

$$\sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\mathfrak{h}} : \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^n] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}] (\mathcal{O})$$

et ces derniers nous donnent une homotopie canonique du complexe (48).

Montrons maintenant que le carré (50) est commutatif autrement dit que l'on a l'égalité

$$\sigma_{\mathcal{O}',X,n}^{\mathfrak{h}}(\beta \circ \alpha) = \sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\mathfrak{h}}(\beta) \circ \alpha$$

pour toute correspondance finie  $\beta \in c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})_X^n)$ . Fixons pour cela un sous-schéma fermé  $Z$  de  $\mathcal{O} \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$  de sorte qu'en notant  $\iota_n$  l'immersion fermée de  $W_Z^n$  dans  $\mathcal{O} \times_S (X^{\mathfrak{h}})_X^n$  on ait

$$\beta = (\iota_n)_* \bar{\beta} \quad \bar{\beta} \in c_{\text{equi}}(W_Z^n/\mathcal{O}, 0)$$

De même fixons un sous-schéma fermé  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}'$  de sorte qu'en notant  $\iota$  l'immersion fermée de  $\mathcal{Z}$  dans  $\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}$  on ait

$$\alpha = \iota_* \bar{\alpha} \quad \bar{\alpha} \in c_{\text{equi}}(\mathcal{Z}/\mathcal{O}, 0).$$

Notons alors  $Z''$  le sous-schéma fermé de  $\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X$  défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z'' & \longrightarrow & Z \\ \text{fini} \downarrow & \square & \downarrow \text{fini} \\ \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ \text{fini} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}' & & \end{array}$$

Fixons d'autre part un sous-schéma fermé  $Z'$  de  $\mathcal{O}' \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}'$  tel que l'on ait le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z'' & \longrightarrow & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X \\ \text{fini} \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \longrightarrow & \mathcal{O}' \times_S X \\ \text{fini} \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{O}' & & \end{array}$$

et convenons de noter  $W''$  le schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W'' & \xrightarrow{r''} & Z'' \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X^{\text{h}} & \longrightarrow & \mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X. \end{array}$$

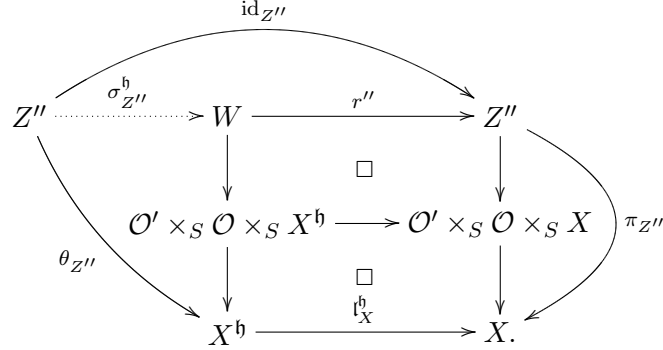
Par définition  $Z''$  est fini sur le schéma local hensélien  $\mathcal{O}'$ , autrement dit semi-local hensélien et donc décomposé pour la topologie de Nisnevich de la forme

$$Z'' = \coprod_{\substack{z'' \text{ point fermé} \\ \text{de } Z''}} \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z'', z''}).$$

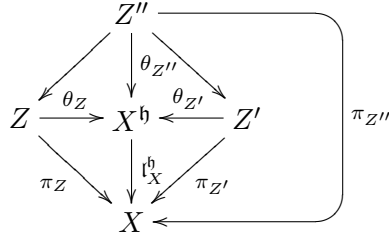
La propriété universelle (46) nous assure comme précédemment l'existence d'un unique morphisme  $\theta_{Z''}$  factorisant la projection  $\pi_{Z''}$  de  $Z''$  sur  $X$  sous la forme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\pi_{Z''}} & \\ \theta_{Z''} \swarrow & & \searrow \iota_X^{\text{h}} \\ Z'' & \dashrightarrow & X^{\text{h}} \longrightarrow X. \end{array}$$

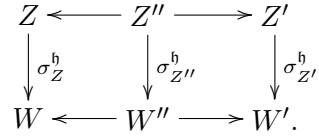
La propriété universelle des produits fibrés nous fournit une section canonique  $\sigma_{Z''}^h$  du morphisme  $r''$  via le diagramme



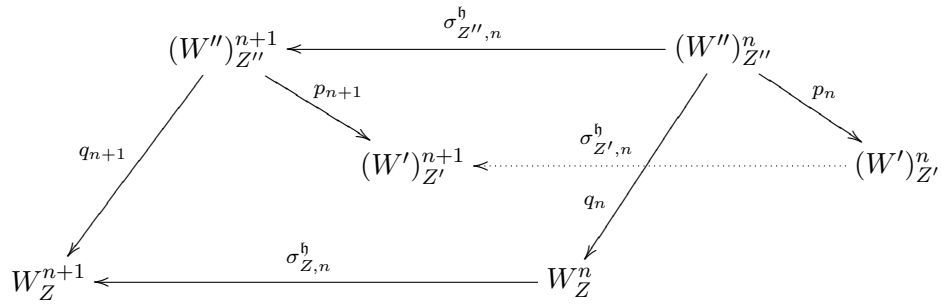
On a par ailleurs le diagramme commutatif



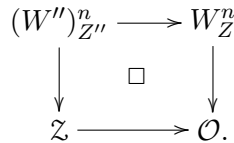
ce qui assure que les carrés suivants sont commutatifs



On obtient ainsi que le diagramme suivant dans lequel  $p_n$  et  $q_n$  désignent respectivement les projections induites par les projections de  $Z''$  sur  $Z$  et  $Z'$



est commutatif. D'autre part on a un carré cartésien



Cela donne ainsi

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{O}', X, n}^{\mathfrak{h}}(\beta \circ \alpha) &= \sigma_{\mathcal{O}', X, n}^{\mathfrak{h}} \left[ \left( p_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X}^{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S X} \right)_* \text{Cor}_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}}^{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}} \right)^{\otimes} \beta, \alpha \right) \right] \\
&= \sigma_{\mathcal{O}', X, n}^{\mathfrak{h}} \left[ (\iota'_n)_* (p_n)_* \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right) \right] \\
&= (\iota'_{n+1})_* (\sigma_{Z', n}^{\mathfrak{h}})_* (p_n)_* \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right) \\
&= (\iota'_{n+1})_* (p_{n+1})_* (\sigma_{Z'', n}^{\mathfrak{h}})_* \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

D'autre part en utilisant le lemme 1.4.13 et la proposition 1.4.11, on voit que

$$\begin{aligned}
(\sigma_{Z'', n}^{\mathfrak{h}})_* \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right) &= \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( (\sigma_{Z'', n}^{\mathfrak{h}})_* \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right) \\
&= \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} (\sigma_{Z, n}^{\mathfrak{h}})_* \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

ce qui assure finalement que

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{O}', X, n}^{\mathfrak{h}}(\beta \circ \alpha) &= (\iota'_{n+1})_* (p_{n+1})_* \text{Cor}_{Z / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}}^Z \right)^{\otimes} (\sigma_{Z, n}^{\mathfrak{h}})_* \bar{\beta}, \bar{\alpha} \right) \\
&= \left[ p_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} \times_S (X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}}^{\mathcal{O} \times_S \mathcal{O}' \times_S (X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}} \right]_* \text{Cor}_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O} / \mathcal{O}'} \left( \left( p_{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}}^{\mathcal{O}' \times_S \mathcal{O}} \right)^{\otimes} \sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\mathfrak{h}}(\beta), \alpha \right) \\
&= \sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\mathfrak{h}}(\beta) \circ \alpha.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.2.4.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts*

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X} : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[(X^{\mathfrak{h}})_X^2] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X^{\mathfrak{h}}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

est exact.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier que pour tout schéma local hensélien  $\mathcal{O}$  le complexe

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}(\mathcal{O}) : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\mathfrak{h}})_X^2 \right](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X^{\mathfrak{h}}](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](\mathcal{O}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

est exact ce qui découle de la proposition 2.2.3 puisque cette dernière assure que  $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}(\mathcal{O})$  est en fait homotope à zéro. □

*Remarque 2.2.5.* En dépit de la functorialité par rapport aux correspondances finies entre schémas locaux henséliens des homotopies construites dans la proposition 2.2.3, ces dernières ne peuvent généralement pas se relever en des morphismes de faisceaux avec transferts. En particulier le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X} : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\mathfrak{h}})_X^2 \right] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X^{\mathfrak{h}}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

bien qu'exact d'après le corollaire 2.2.4 n'est pas homotope à zéro en général. En revanche il est tout de même universellement exact au sens de Grayson [46]. En effet ses fibres pour la topologie de Nisnevich sont les complexes de groupes abéliens  $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}(\mathcal{O})$  pour  $\mathcal{O}$  un schéma

local hensélien et ces complexes sont universellement exacts puisque homotopes à zéro d'après la proposition 2.2.3.

**2.2.2. Décomposition locale pour la topologie de Nisnevich.** — Nous nous intéressons maintenant à la décomposition locale d'une correspondance finie pour la topologie de Nisnevich. Les morphismes de schémas  $l_{X,x}^h$  nous donnent un morphisme naturel

$$\bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^h) \xrightarrow{\sum_{x \in X} [l_{X,x}^h]_{\circ-}} c_S(\mathcal{O}, X). \quad (54)$$

*Remarque 2.2.6.* Il résulte de la remarque 1.2.14 que l'on a un isomorphisme

$$c_S(\mathcal{O}, X^h) = \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^h).$$

On a alors le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^h) & \xrightarrow{\sum_{x \in X} [l_{X,x}^h]_{\circ-}} & c_S(\mathcal{O}, X) \\ \parallel & \nearrow [l_X^h]_{\circ-} & \\ c_S(\mathcal{O}, X^h) & & \end{array}$$

Lorsque  $\mathcal{O}$  est hensélien, la proposition précédente nous permet d'écrire une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$  sous la forme d'une somme de contributions locales

$$\alpha = \sum_x [l_{X,x}^h]_{\circ} \alpha_x \quad \alpha_x \in c_S(\mathcal{O}, X_x^h)$$

la correspondance  $\alpha_x$  étant canoniquement déterminée par  $\alpha$ . Plus précisément on peut déduire de la proposition 2.2.3 l'énoncé suivant.

**Corollaire 2.2.7.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un  $S$ -schéma local hensélien. Il existe un morphisme canonique*

$$c_S(\mathcal{O}, X) \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X}^h} \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^h) \quad (55)$$

satisfaisant les propriétés suivantes.

1.  $\sigma_{\mathcal{O},X}^h$  est une section du morphisme (54) telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} c_S(\mathcal{O}, X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X}^h} & \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^h) \\ \downarrow c_S(\alpha, X) & & \downarrow c_S(\alpha, X_x^h) \\ c_S(\mathcal{O}', X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O}',X}^h} & \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}', X_x^h) \end{array} \quad (56)$$

soit commutatif pour tout schéma local hensélien  $\mathcal{O}'$  et toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ .

2. Pour un  $S$ -morphisme  $g : \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$  de localité  $\tau$  la composante suivant le point  $x$  de l'image de  $[g]$  par (55) est donnée par

$$\sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}}([g])_x = \begin{cases} [\bar{g}] & \text{si } x = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\bar{g}$  étant le morphisme de schémas locaux henséliens

$$\begin{array}{ccc} & & g \\ & \curvearrowright & \\ \text{Spec}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\bar{g}} & X_x^{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}}} X \end{array}$$

déduit de  $g$ .

DÉMONSTRATION. — Le premier point est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.3. En effet le morphisme

$$c_S(\mathcal{O}, X) \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X,0}^{\mathfrak{h}}} c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \stackrel{=} {=} \bigoplus_{x \in X} c_S(\mathcal{O}, X_x^{\mathfrak{h}})$$

$\sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}}$

est une section du morphisme (54) d'après la relation d'homotopie (49), et la commutativité du diagramme (56) n'est autre que celle du diagramme (50).

Considérons donc la seconde assertion. Pour reprendre les notations de la démonstration de la proposition 2.2.3, nous désignons par  $Z$  le sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S X$  graphe du morphisme  $g$  et par  $W$  le schéma défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r} & Z \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} & \longrightarrow & \mathcal{O} \times_S X \end{array}$$

Le sous-schéma fermé  $Z$  s'identifie à l'immersion fermé  $\Delta_g : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \times_S X$  et l'on voit que le morphisme  $\theta_Z$  de la démonstration de la proposition 2.2.3 s'identifie à la composée de  $\bar{g}$  et du morphisme d'inclusion  $\iota : X_x^{\mathfrak{h}} \rightarrow X^{\mathfrak{h}}$ . Dans ce cas le diagramme (53) est donc de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_{\mathcal{O}} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\sigma_Z^{\mathfrak{h}}} & W & \xrightarrow{r} & \mathcal{O} \\ & \downarrow & \downarrow & \square & \downarrow \Delta_g \\ & \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} & \longrightarrow & \mathcal{O} \times_S X & \xrightarrow{g} \\ & \downarrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & X^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\iota_X^{\mathfrak{h}}} & X & \end{array}$$

$\iota \circ \bar{g}$

ce qui prouve que  $(\sigma_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{h}})_*([g]) = [\bar{g}]$ . Par construction du morphisme  $\sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}}$  cela se traduit par

$$\sigma_{\mathcal{O},X}([g])_x = \begin{cases} [\bar{g}] & \text{si } x = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui n'est autre que l'égalité souhaitée.  $\square$

*Remarque 2.2.8.* Supposons que  $X$  soit lui même un schéma local hensélien de point fermé  $s$ . On a vu que pour une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$  on avait une décomposition locale

$$\alpha = \underbrace{\sum_{x \in X \setminus \{s\}} [\mathfrak{l}_{X,x}^{\mathfrak{h}}] \circ \alpha_x}_{\text{contribution des points non fermés}} + \alpha_s.$$

En général les correspondances  $\alpha$  et  $\alpha_s$  ne sont pas égales, autrement dit les points non fermés de  $X$  ont une contribution non nulle dans la décomposition locale. Prenons par exemple le cas où  $\alpha$  est la correspondance finie associée à un morphisme de schéma. On voit d'après la seconde assertion du corollaire 2.2.7 que

$$\alpha_s = \begin{cases} \alpha & \text{si le morphisme est local} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et que de plus lorsque le morphisme est local non seulement la contribution globale des points non fermés est nulle mais encore chaque correspondance  $\alpha_x$  associée à un point non fermé est nulle.

Compte tenu de la remarque 2.2.6, le morphisme donnant la décomposition locale peut être vu comme un morphisme

$$\sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}} : c_S(\mathcal{O}, X) \rightarrow c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}). \quad (57)$$

On dispose d'un morphisme d'inclusion

$$[\mathfrak{s}_X^{\mathfrak{h}}] \circ - : c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \rightarrow c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}})$$

et d'un morphisme de localisation

$$\sigma_{\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}}^{\mathfrak{h}} : c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \rightarrow c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}).$$

Ces morphismes ne coïncident naturellement pas comme on le voit déjà avec la remarque 2.2.8. Sachant que le morphisme  $[\mathfrak{s}_X^{\mathfrak{h}}]$  n'est pas un isomorphisme, il est légitime de se demander si l'on obtient plus d'informations en localisant à nouveau le résultat fourni par le morphisme (57). Le lemme suivant montre qu'il n'en est rien.

**Lemme 2.2.9.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un  $S$ -schéma local hensélien. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} c_S(\mathcal{O}, X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}}} & c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) \\ \downarrow \sigma_{\mathcal{O},X}^{\mathfrak{h}} & & \downarrow \sigma_{\mathcal{O},X^{\mathfrak{h}}}^{\mathfrak{h}} \\ c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}) & \xrightarrow{[\mathfrak{s}_X^{\mathfrak{h}}] \circ -} & c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}}) \end{array} \quad (58)$$

DÉMONSTRATION. — Fixons une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}, X)$  et désignons par  $Z$  son support qui est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ . Notons  $\mathcal{Z}$  le support de la correspondance finie

$$\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\mathfrak{h}}(\alpha) \in c_S(\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}})$$

qui est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}}$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id}_{\mathcal{Z}} & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 \mathcal{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{W} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Z} & & \\
 \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow & & \\
 \mathcal{W} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{W} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Z} \\
 \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow \iota & \square & \downarrow \\
 \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} \times_S (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} \times_S X. \\
 & & \text{id}_{\mathcal{O} \times_S X^{\mathfrak{h}}} & & & & \\
 & & \curvearrowleft & & & & 
 \end{array}$$

Le schéma  $Z$  est semi-local hensélien donc de la forme

$$Z = \coprod_{\substack{z \text{ point fermé} \\ \text{de } Z}} \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z}^{\mathfrak{h}}).$$

Notons  $z_1, \dots, z_n$  ses points fermés et désignons par  $x_1, \dots, x_n$  leur projection sur  $X$ . Par construction de la section  $\sigma_Z^{\mathfrak{h}}$ , le diagramme (53) est commutatif et

$$\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\mathfrak{h}}(\alpha) = \iota_*(\sigma_Z^{\mathfrak{h}})_*(\alpha).$$

En particulier les points fermés du schéma semi-local  $\mathcal{Z}$  se projettent nécessairement sur  $x_1, \dots, x_n$ . Cela entraîne que  $\sigma_{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{h}}$  est en fait le morphisme d'inclusion de  $\mathcal{Z}$  dans  $\mathcal{W}$  et donc que

$$\sigma_{\mathcal{O}, X^{\mathfrak{h}}}^{\mathfrak{h}}[\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\mathfrak{h}}(\alpha)] = \sigma_{\mathcal{O}, X}^{\mathfrak{h}}(\alpha)$$

dans  $c_S(\mathcal{O}, (X^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{h}})$ . Ce qui prouve la commutativité du diagramme (58).  $\square$

En particulier lorsque l'on se donne une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , on peut associer à un point  $x$  de  $X$  et un point  $y$  de  $Y$  une correspondance finie  $\alpha_{x,y}$  du schéma  $X_x^{\mathfrak{h}}$  dans le schéma  $Y_y^{\mathfrak{h}}$  donnée par

$$\alpha_{x,y} := \sigma_{X_x^{\mathfrak{h}}, Y}^{\mathfrak{h}}(\alpha \circ [\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}}])_y$$

On obtient ainsi une décomposition locale pour la topologie de Nisnevich de la correspondance  $\alpha$  de la forme

$$\alpha \circ [\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}}] = \sum_{y \in Y} [\iota_{Y,y}^{\mathfrak{h}}] \circ \alpha_{x,y}.$$



*Notation 2.2.10.* Pour un morphisme de  $S$ -schéma  $g : X \rightarrow Y$  et un point  $x$  nous notons  $g_x^{\mathfrak{h}}$  le morphisme de schémas locaux henséliens déduit de  $g$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \uparrow \mathfrak{h}_{X,x} & & \uparrow \mathfrak{h}_{Y,g(x)} \\ X_x^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{g_x^{\mathfrak{h}}} & Y_{g(x)}^{\mathfrak{h}}. \end{array}$$

Le lemme suivant explicite le comportement par composition et « itération » de cette décomposition ainsi que la nature de la décomposition obtenue dans le cas d'un morphisme de schémas.

**Lemme 2.2.11.** *Soient  $X, Y$  et  $Z$  des  $S$ -schémas.*

1. *Étant données des correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$ , on a pour tout point  $x \in X$  et  $z \in Z$  l'égalité*

$$(\beta \circ \alpha)_{x,z} = \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y}. \quad (59)$$

2. *Étant donné un morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas on a*

$$[g]_{x,y} = \begin{cases} [g_x^{\mathfrak{h}}] & \text{si } y = g(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Étant donnée une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , on a l'égalité dans  $c_S(X_x^{\mathfrak{h}}, (Y_y^{\mathfrak{h}})_z^{\mathfrak{h}})$*

$$(\alpha_{x,y})_{x,z} = \begin{cases} \alpha_{x,y} & \text{si } z = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout point  $x$  de  $X$  et tout point  $z$  du schéma local hensélien  $Y_y^{\mathfrak{h}}$ .

DÉMONSTRATION. — Le second point est une conséquence immédiate du corollaire 2.2.7. La formule de composition (59), se déduit des égalités

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)_{x,z} &= \sigma_{X_x^{\mathfrak{h}}, Z}^{\mathfrak{h}} \left( \beta \circ \alpha \circ [l_{X,x}^{\mathfrak{h}}] \right)_z = \sigma_{X_x^{\mathfrak{h}}, Z}^{\mathfrak{h}} \left( \sum_{y \in Y} \beta \circ [l_{Y,y}^{\mathfrak{h}}] \circ \alpha_{x,y} \right)_z \\ &= \sum_{y \in Y} \sigma_{Y_y^{\mathfrak{h}}, Z}^{\mathfrak{h}} \left( \beta \circ [l_{Y,y}^{\mathfrak{h}}] \right)_z \circ \alpha_{x,y} \\ &= \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y} \end{aligned}$$

dans lesquelles nous avons utilisé la commutativité du diagramme (56). La dernière assertion est quant à elle un corollaire du lemme 2.2.9.  $\square$

**2.2.3. Lien avec la structure tensorielle.** — Nous donnons maintenant le lien entre la décomposition locale du produit tensoriel de deux correspondances finies et le produit tensoriel

des décompositions locales. Étant donnés deux  $S$ -schémas  $X$  et  $Y$ , la propriété universelle (46) nous donne un morphisme

$$\begin{array}{ccc} (X \times_S Y)^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\mathfrak{m}_{X,Y}^{\mathfrak{h}}} & X^{\mathfrak{h}} \times_S Y^{\mathfrak{h}} \\ & \searrow \mathfrak{l}_{X \times_S Y}^{\mathfrak{h}} & \downarrow (\mathfrak{l}_X^{\mathfrak{h}}) \times_S (\mathfrak{l}_Y^{\mathfrak{h}}) \\ & & X \times_S Y. \end{array}$$

Ces morphismes font du foncteur  $(-)^{\mathfrak{h}}$  un foncteur quasi-monoïdal symétrique. Lorsque l'on se fixe un point  $e$  du produit  $X \times_S Y$  se projetant sur  $x$  et  $y$  on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} (X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}} & (X_x^{\mathfrak{h}}) \times_S (Y_y^{\mathfrak{h}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \times_S Y)^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\mathfrak{m}_{X,Y}^{\mathfrak{h}}} & X \times_S Y. \end{array}$$

Le comportement des décompositions locales par rapport au produit tensoriel des correspondances finies est donné par le résultat suivant.

**Lemme 2.2.12.** *Soient  $X, Y, X', Y'$  des  $S$ -schémas,  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  des correspondances finies. Pour tout point  $e$  de  $X \times_S Y$  et tout point  $x'$  de  $X'$  et  $y'$  de  $Y'$ , on a l'égalité*

$$\left( \alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'} \right) \circ \left[ \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \right] = \sum_{\substack{e' \text{ point de } X' \times_S Y' \\ \text{se projetant sur } x' \text{ et } y'}} \left[ \mathfrak{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}} \right] \circ \left( \alpha \otimes \beta \right)_{e,e'}$$

dans  $c_S \left( (X \times_S Y)_e^{\mathfrak{h}}, (X')_{x'}^{\mathfrak{h}} \times_S (Y')_{y'}^{\mathfrak{h}} \right)$ .

DÉMONSTRATION. — Pour simplifier convenons de noter  $E$  le produit  $X \times_S Y$ ,  $E'$  le produit  $X' \times_S Y'$  et de désigner par  $E'_{x',y'}$ , l'ensemble des points de  $E'$  se projetant sur  $x'$  et  $y'$ . Le lemme sera démontré lorsque nous aurons vérifié la formule

$$\left[ \mathfrak{m}_{X',Y'}^{\mathfrak{h}} \right] \circ \sigma_{E_e^{\mathfrak{h}}, E'}^{\mathfrak{h}} \left( (\alpha \otimes \beta) \circ [\mathfrak{l}_{E,e}^{\mathfrak{h}}] \right) = \left[ \sigma_{X_x^{\mathfrak{h}}, X'}^{\mathfrak{h}} (\alpha \circ [\mathfrak{l}_{X,x}^{\mathfrak{h}}]) \otimes \sigma_{Y_y^{\mathfrak{h}}, Y'}^{\mathfrak{h}} (\beta \circ [\mathfrak{l}_{Y,y}^{\mathfrak{h}}]) \right] \circ \left[ \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \right]. \quad (60)$$

En effet on a d'une part

$$\left[ \mathfrak{m}_{X',Y'}^{\mathfrak{h}} \right] \circ \sigma_{E_e^{\mathfrak{h}}, E'}^{\mathfrak{h}} \left( (\alpha \otimes \beta) \circ [\mathfrak{l}_{E,e}^{\mathfrak{h}}] \right) = \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} \sum_{e' \in E'_{x',y'}} \left[ \mathfrak{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}} \right] \circ (\alpha \otimes \beta)_{e,e'}$$

et d'autre part

$$\left[ \sigma_{X_x^{\mathfrak{h}}, X'}^{\mathfrak{h}} (\alpha \circ [\mathfrak{l}_{X,x}^{\mathfrak{h}}]) \otimes \sigma_{Y_y^{\mathfrak{h}}, Y'}^{\mathfrak{h}} (\beta \circ [\mathfrak{l}_{Y,y}^{\mathfrak{h}}]) \right] \circ \left[ \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \right] = \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} \left( \alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'} \right) \circ \left[ \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}} \right].$$

Il suffit alors d'identifier facteur direct par facteur direct pour voir que l'égalité (60) n'est qu'une reformulation du résultat cherché.

Fixons un sous-schéma fermé  $Z_\alpha$  de  $X_x^{\text{h}} \times_S X'$  fini et équidimensionnel sur le schéma local hensélien  $X_x^{\text{h}}$  de sorte qu'en notant  $\iota_{Z_\alpha}$  l'immersion fermée associée à ce dernier on ait

$$\alpha \circ [\iota_{X,x}^{\text{h}}] = (\iota_{Z_\alpha})_* \bar{\alpha}$$

pour un unique élément  $\bar{\alpha}$  de  $c_{\text{equi}}(Z_\alpha/X_x^{\text{h}}, 0)$ .

Choisissons de même un sous-schéma fermé  $Z_\beta$  de  $Y_y^{\text{h}} \times_S Y'$  fini et équidimensionnel sur  $Y_y^{\text{h}}$  de sorte qu'en notant  $\iota_{Z_\beta}$  l'immersion fermée associée à ce dernier on ait

$$\beta \circ [\iota_{Y,y}^{\text{h}}] = (\iota_{Z_\beta})_* \bar{\beta}$$

pour un unique élément  $\bar{\beta}$  de  $c_{\text{equi}}(Z_\beta/Y_y^{\text{h}}, 0)$ .

Notons comme précédemment  $W_\alpha$  et  $W_\beta$  les schémas définis par les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} W_\alpha & \longrightarrow & Z_\alpha \\ \iota_{W_\alpha} \downarrow & \square & \downarrow \iota_{Z_\alpha} \\ X_x^{\text{h}} \times_S (X')^{\text{h}} & \longrightarrow & X_x^{\text{h}} \times_S X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_\beta & \longrightarrow & Z_\beta \\ \iota_{W_\beta} \downarrow & \square & \downarrow \iota_{Z_\beta} \\ Y_y^{\text{h}} \times_S (Y')^{\text{h}} & \longrightarrow & Y_y^{\text{h}} \times_S Y' \end{array}$$

et posons  $Z = Z_\alpha \times_S Z_\beta$  et  $W = W_\alpha \times_S W_\beta$ . Considérons par ailleurs les schémas définis par les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & W \xrightarrow{\iota_W} \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & X_x^{\text{h}} \times_S Y_y^{\text{h}} \\ & & & & & & \times_S \\ & & & & & & (X')^{\text{h}} \times_S (Y')^{\text{h}} \\ & & & & & & \downarrow \\ W' & \xrightarrow{\theta} & W & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z \\ \downarrow \iota_{W'} & \square & \downarrow \iota_W & \square & \downarrow \iota_Z & \square & \downarrow \iota_Z \\ E_e^{\text{h}} \times_S (E')^{\text{h}} & \rightarrow & E_e^{\text{h}} \times_S (X')^{\text{h}} \times_S (Y')^{\text{h}} & \rightarrow & E_e^{\text{h}} \times_S E' & \rightarrow & X_x^{\text{h}} \times_S Y_y^{\text{h}} \times_S E' \\ & & & & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & & & E_e^{\text{h}} & \xrightarrow{m_{X,Y,e}^{\text{h}}} & X_x^{\text{h}} \times_S Y_y^{\text{h}} \end{array}$$

Notons  $p$  et  $q$  les projections

$$\begin{array}{ccc} & X_x^{\text{h}} \times_S Y_y^{\text{h}} & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X_x^{\text{h}} & & Y_y^{\text{h}} \end{array}$$

Par définition du produit tensoriel des correspondances, on a

$$\begin{aligned} (\alpha \circ [l_{X,x}^h]) \otimes (\beta \circ [l_{Y,y}^h]) &= \left[ p^{\otimes}(\alpha \circ [l_{X,x}^h]) \right] \times_{X_x^h \times_S Y_y^h} \left[ q^{\otimes}(\beta \circ [l_{Y,y}^h]) \right] \\ &= \left[ p^{\otimes}(\iota_{Z_\alpha})_* \bar{\alpha} \right] \times_{X_x^h \times_S Y_y^h} \left[ q^{\otimes}(\iota_{Z_\beta})_* \bar{\beta} \right] \\ &= (\iota_Z)_* \left[ (p^{\otimes} \bar{\alpha}) \times_{X_x^h \times_S Y_y^h} (q^{\otimes} \bar{\beta}) \right]. \end{aligned}$$

Convenons de noter  $\bar{\gamma}$  le cycle algébrique

$$\bar{\gamma} = (p^{\otimes} \bar{\alpha}) \times_{X_x^h \times_S Y_y^h} (q^{\otimes} \bar{\beta})$$

appartenant à  $c_{\text{equi}}(Z/X_x^h \times_S Y_y^h, 0)$ . Cela nous donne

$$\begin{aligned} [\mathbf{m}_{X',Y'}^h] \circ \sigma_{E_e^h, E'}^h \left( (\alpha \otimes \beta) \circ [l_{E,e}^h] \right) &= (\text{id}_{E_e^h} \times_S \mathbf{m}_{X',Y'}^h)_* \left[ (\iota_{W'})_* (\sigma_{Z'}^h)_* (\mathbf{m}_{X,Y,e}^{\otimes} \bar{\gamma}) \right] \\ &= (\iota_W)_* \theta_* (\sigma_Z^h)_* \left[ \mathbf{m}_{X,Y,e}^{\otimes} \bar{\gamma} \right] \\ &= \mathbf{m}_{X,Y,e}^{\otimes} \left[ (\iota_W)_* (\sigma_{Z_\alpha}^h \times_S \sigma_{Z_\beta}^h)_* \bar{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

On a par ailleurs l'égalité

$$\begin{aligned} (\iota_W)_* (\sigma_{Z_\alpha}^h \times_S \sigma_{Z_\beta}^h)_* \bar{\gamma} &= \left[ p^{\otimes}((\iota_{W_\alpha})_* (\sigma_{Z_\alpha}^h)_* \bar{\alpha}) \right] \times_{X_x^h \times_S Y_y^h} \left[ q^{\otimes}((\iota_{W_\beta})_* (\sigma_{Z_\beta}^h)_* \bar{\beta}) \right] \\ &= \left[ \sigma_{X_x^h, X'}^h(\alpha \circ [l_{X,x}^h]) \right] \otimes \left[ \sigma_{Y_y^h, Y'}^h(\beta \circ [l_{Y,y}^h]) \right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} [\mathbf{m}_{X',Y'}^h] \circ \sigma_{E_e^h, E'}^h \left( (\alpha \otimes \beta) \circ [l_{E,e}^h] \right) &= \mathbf{m}_{X,Y,e}^{\otimes} \left( \sigma_{X_x^h, X'}^h(\alpha \circ [l_{X,x}^h]) \otimes \sigma_{Y_y^h, Y'}^h(\beta \circ [l_{Y,y}^h]) \right) \\ &= \left[ \sigma_{X_x^h, X'}^h(\alpha \circ [l_{X,x}^h]) \otimes \sigma_{Y_y^h, Y'}^h(\beta \circ [l_{Y,y}^h]) \right] \circ [\mathbf{m}_{X,Y,e}^h] \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (60).  $\square$

### 2.3. Localisation étale des correspondances finies

Les démonstrations données dans la section précédente s'adaptent parfaitement au cas de la topologie étale, il suffit pratiquement pour cela de remplacer les anneaux locaux henséliens par les anneaux locaux strictement henséliens. Dans cette section nous avons rassemblé les énoncés des résultats obtenus pour la topologie étale tout en précisant les modifications mineures à effectuer.

**2.3.1. Conventions.** — Lorsque l'on considère la topologie étale, il y a lieu de prendre quelques précautions quant au choix des points géométriques que l'on utilise. Pour ce faire nous fixons pour tout point  $s$  de  $S$  une clôture algébrique  $\overline{\kappa(s)}$  de  $\kappa(s)$ . Un point géométrique  $\bar{x}$  d'un  $S$ -schéma  $X$  sera pour nous la donnée d'un corps séparablement clos  $\kappa(\bar{x})$  et d'un morphisme du spectre de ce dernier dans  $X$ . Nous noterons  $\bar{s}$  le point géométrique de  $S$

$$\begin{array}{ccc} & \bar{s} & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Spec}(\overline{\kappa(s)}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\kappa(s)) \xrightarrow{s} S \end{array}$$

défini par la clôture algébrique  $\overline{\kappa(s)}$  et dans la suite nous dirons qu'un point géométrique  $\bar{x}$  est « bon » lorsque son image dans  $S$  est un point de la forme  $\bar{s}$ .

*Remarque 2.3.1.* Avec cette définition l'image par un morphisme de  $S$ -schémas d'un bon point géométrique est un bon point géométrique. Par ailleurs les bons points géométriques forment une famille conservative de points pour la topologie étale. En effet d'après la remarque 3.13.b de l'exposé VIII de [4], il suffit de voir que les points de  $X$  fermés dans leur fibre sont le lieu d'un point bon géométrique. Or pour un point  $x$  de  $X$  fermé dans sa fibre, l'extension  $\kappa(x)/\kappa(s)$  est finie d'après la proposition 6.4.2 de [50] et il existe bien un morphisme de corps de  $\kappa(x)$  dans la clôture algébrique  $\overline{\kappa(s)}$ .

Nous appellerons bon  $S$ -schéma local strictement hensélien la donnée  $(\mathcal{O}, \omega)$  d'un  $S$ -schéma strictement hensélien  $\mathcal{O}$  et d'un isomorphisme  $\omega : \kappa \rightarrow \overline{\kappa(s)}$  de  $\kappa(s)$ -extensions où  $s$  est l'image dans  $S$  du point fermé de  $\mathcal{O}$  et  $k$  le corps résiduel de ce dernier. Nous prendrons pour morphisme de bons  $S$ -schémas strictement henséliens les morphismes locaux de  $S$ -schémas  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \overline{\kappa(s)} & \\
 \omega \nearrow & & \nwarrow \omega' \\
 k & \xrightarrow{\quad} & k' \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & k(s) &
 \end{array}$$

Nous noterons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{bon}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \subset \mathrm{Hom}_S(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$$

le sous-ensemble formé des morphismes de bons  $S$ -schémas strictement henséliens.

Un  $S$ -schéma décomposé pour la topologie étale sera pour nous la donnée  $X = (X_i, \omega_i)$  d'une famille non nécessairement finie de bons  $S$ -schémas strictement henséliens, les morphismes de  $S$ -schémas décomposés pour la topologie étale étant donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{bon}}(X, Y) = \prod_i \prod_j \mathrm{Hom}_{\mathrm{bon}}((X_i, \omega_i), (Y_j, \varrho_j)).$$

Nous nous permettrons parfois d'identifier un peu abusivement  $X$  avec le  $S$ -schéma réunion disjointe des  $X_i$  lorsque cela ne nous semble pas source de confusions.

Les hensélisés stricts d'un  $S$ -schéma en un bon point géométrique sont canoniquement des bons  $S$ -schémas strictement henséliens. Étant donné un bon  $S$ -schéma strictement hensélien  $(\mathcal{O}, \omega)$ , on remarquera pour l'adaptation des démonstrations précédentes au cas de la topologie étale que les  $\mathcal{O}$ -schémas finis sont canoniquement des réunions disjointes de bons  $S$ -schémas locaux strictement henséliens donc des  $S$ -schémas décomposés pour la topologie étale. En outre les  $\mathcal{O}$ -morphisms de  $\mathcal{O}$ -schémas finis sont naturellement des morphismes de  $S$ -schémas décomposés.

A un  $S$ -schéma  $X$ , on peut associer fonctoriellement un  $S$ -schéma décomposé pour la topologie étale  $X^{\text{sh}}$

$$X^{\text{sh}} := \coprod_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} X_{\bar{x}}^{\text{sh}}. \quad (61)$$

Ce dernier est la réunion disjointe, sur les bons points géométriques de  $X$ , des schémas locaux strictement henséliens  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$  spectre de l'anneau local strictement hensélien  $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$  dont on notera le point fermé abusivement par  $\bar{x}$ .

*Remarque 2.3.2.* L'astuce de se restreindre aux seuls bons points géométriques est une précaution nécessaire. En effet la réunion disjointe (61) a bien un sens tandis qu'en essayant de prendre en compte tous les points géométriques on se heurterait à un problème de nature ensembliste.

Pour tout bon point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  on dispose du morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} & \text{!}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} & \\ & \curvearrowright & \\ X_{\bar{x}}^{\text{sh}} & \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) & \longrightarrow X \end{array}$$

nous donnant un morphisme de schémas  $\text{!}_X^{\text{sh}} : X^{\text{sh}} \rightarrow X$ .

Si  $(\mathcal{O}, \omega)$  est un bon  $S$ -schéma strictement hensélien, le point fermé de  $\mathcal{O}$  et l'isomorphisme  $\omega$  nous donne un bon point géométrique canonique dont on peut considérer l'image  $\bar{x}$  par un morphisme de  $S$ -schémas  $\mathcal{O} \rightarrow X$ . On a une factorisation canonique

$$\mathcal{O} \dashrightarrow X_{\bar{x}}^{\text{sh}} \xrightarrow{\text{!}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}} X$$

et on peut ainsi construire une section canonique

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Hom}_S(\mathcal{O}, X) & \dashrightarrow \text{Hom}_{\text{bon}}(\mathcal{O}, X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) & \xrightarrow{(62)} \text{Hom}_S(\mathcal{O}, X) \end{array}$$

*Remarque 2.3.3.* On prendra garde que dans le cas strictement hensélien le morphisme (62) n'est pas un monomorphisme.

Les sections précédentes nous fournissent finalement une section canonique

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Hom}_S(D, X) & \dashrightarrow \text{Hom}_{\text{bon}}(D, X^{\text{sh}}) & \xrightarrow{\text{!}_X^{\text{sh}} \circ -} \text{Hom}_S(D, X) \end{array}$$

pour tout  $S$ -schéma  $D$  décomposé pour la topologie étale. Comme dans le cas hensélien, le morphisme

$$\text{!}_{X^{\text{sh}}}^{\text{sh}} : (X^{\text{sh}})^{\text{sh}} \rightarrow X^{\text{sh}}$$

n'est pas un isomorphisme mais admet cependant une section canonique  $\mathfrak{s}_X^{\text{sh}}$  identifiant  $X^{\text{sh}}$  à un sous-schéma fermé de  $(X^{\text{sh}})^{\text{sh}}$  et provenant du fait que l'anneau local strictement hensélien

de  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$  en son point fermé  $\bar{x}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$  :

$$\begin{array}{ccccc} X^{\text{sh}} & \xrightarrow{\text{[}_X^{\text{sh}}\text{]}} & (X^{\text{sh}})^{\text{sh}} & \xrightarrow{\text{[}_{X^{\text{sh}}}^{\text{sh}}\text{]}} & X^{\text{sh}} & \xrightarrow{\text{[}_X^{\text{sh}}\text{]}} & X \\ & \searrow & \text{id}_{X^{\text{sh}}} & \swarrow & & & \end{array}$$

Autrement dit dans  $(X^{\text{sh}})^{\text{sh}}$  apparaissent des facteurs supplémentaires correspondants aux bons points géométriques distincts des points fermés des  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$ .

**2.3.2. Énoncés des résultats.** — Dans le cas étale, le complexe considéré est le complexe de Čech associé au  $X$ -schéma  $X^{\text{sh}}$

$$\check{C}_{X^{\text{sh}}/X}(\mathcal{O}) : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^2 \right] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X^{\text{sh}}] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X] (\mathcal{O}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad (63)$$

On a alors l'analogie de la proposition 2.2.3.

**Proposition 2.3.4.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un bon  $S$ -schéma local strictement hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\text{sh}} : \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^n \right] (\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}) \quad n \geq 0$$

satisfaisant aux deux propriétés suivantes.

1. (Homotopie) On a pour tout  $n$  les relations

$$d_{n+1} \circ \sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\text{sh}} + \sigma_{\mathcal{O},X,n-1}^{\text{sh}} \circ d_n = \text{id}.$$

2. (Fonctorialité) Étant donné un bon  $S$ -schéma local strictement hensélien  $\mathcal{O}'$  et une correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$  on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^n \right] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^n \right] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^n \right] (\mathcal{O}) \\ \downarrow \sigma_{\mathcal{O}',X,n}^{\text{sh}} & & \downarrow \sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\text{sh}} \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}') & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^{n+1} \right] (\alpha)} & \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^{n+1} \right] (\mathcal{O}). \end{array}$$

Sachant d'après la remarque 2.3.1 que les bons points géométriques fournissent une famille conservative de points pour la topologie étale, on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 2.3.5.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Le complexe de faisceaux étales avec transferts*

$$\check{C}_{X^{\text{sh}}/X} : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} \left[ (X^{\text{sh}})_X^2 \right] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X^{\text{sh}}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}} [X] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

est exact au sens de Grayson [46].

Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $\mathcal{O}$  un bon  $S$ -schéma local strictement hensélien. On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\bar{x} \text{ bon point géométrique}} c_S \left( \mathcal{O}, X_{\bar{x}}^{\text{sh}} \right) & \xrightarrow{\sum_{\bar{x} \text{ bon point géométrique}} \text{[}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}\text{]}\circ-} & c_S(\mathcal{O}, X) \\ \parallel & \nearrow \text{[}_X^{\text{sh}}\text{]}\circ- & \\ c_S(\mathcal{O}, X^{\text{sh}}) & & \end{array} \quad (64)$$

et une démonstration analogue à celle du corollaire 2.2.7 nous assure l'existence d'un morphisme canonique

$$c_S(\mathcal{O}, X) \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}} \bigoplus_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} c_S(\mathcal{O}, X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) \quad (65)$$

satisfaisant les propriétés suivantes.

1.  $\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}$  est une section du morphisme (64) telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} c_S(\mathcal{O}, X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}} & \bigoplus_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} c_S(\mathcal{O}, X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) \\ \downarrow c_S(\alpha, X) & & \downarrow c_S(\alpha, X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) \\ c_S(\mathcal{O}', X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O}', X}^{\text{sh}}} & \bigoplus_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} c_S(\mathcal{O}', X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) \end{array}$$

soit commutatif pour tout bon  $S$ -schéma local strictement hensélien  $\mathcal{O}'$  et toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$ .

2. Pour un  $S$ -morphisme  $g : \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ , la composante suivant le bon point géométrique  $\bar{x}$  de l'image de  $[g]$  par (65) est donnée par

$$\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}([g])_{\bar{x}} = \begin{cases} [\bar{g}] & \text{si } \bar{x} = g \circ \bar{\tau} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\bar{\tau}$  étant le bon point géométrique de  $\mathcal{O}$  défini par le point fermé et  $\bar{g}$  étant le morphisme de schémas locaux strictement henséliens

$$\begin{array}{ccc} & & g \\ & \text{---} & \text{---} \\ \text{Spec}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\bar{g}} & X_{\bar{x}}^{\text{sh}} \xrightarrow{[\bar{g}]_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}} X \end{array}$$

déduit de  $g$ .

La démonstration du lemme 2.2.9 nous assure en outre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} c_S(\mathcal{O}, X) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}} & c_S(\mathcal{O}, X^{\text{sh}}) \\ \downarrow \sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}} & & \downarrow \sigma_{\mathcal{O}, X^{\text{sh}}}^{\text{sh}} \\ c_S(\mathcal{O}, X^{\text{sh}}) & \xrightarrow{[\text{s}_X^{\text{sh}}]_{\circ-}} & c_S(\mathcal{O}, (X^{\text{sh}})^{\text{sh}}) \end{array}$$

Lorsque l'on se donne une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et des bons points géométriques  $\bar{x}, \bar{y}$  de  $X$  et  $Y$ , on dispose d'une correspondance finie  $\alpha_{\bar{x}, \bar{y}}$  du schéma  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$  dans le schéma  $Y_{\bar{y}}^{\text{sh}}$  donnée par

$$\alpha_{\bar{x}, \bar{y}} := \sigma_{X_{\bar{x}}^{\text{sh}}, Y}^{\text{sh}}(\alpha \circ [\text{s}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}}])_{\bar{y}}.$$



On obtient ainsi une décomposition locale pour la topologie étale de la correspondance  $\alpha$  de la forme

$$\alpha \circ [\iota_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}] = \sum_{\substack{\bar{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} [\iota_{Y,\bar{y}}^{\text{h}}] \circ \alpha_{\bar{x},\bar{y}}.$$

*Notation 2.3.6.* Pour un morphisme de  $S$ -schéma  $g : X \rightarrow Y$  et un bon point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , nous notons  $g_{\bar{x}}^{\text{sh}}$  le morphisme de bons  $S$ -schémas locaux strictement henséliens déduit de  $g$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \uparrow \iota_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} & & \uparrow \iota_{Y,g\circ\bar{x}}^{\text{sh}} \\ X_{\bar{x}}^{\text{sh}} & \xrightarrow{g_{\bar{x}}^{\text{sh}}} & Y_{g\circ\bar{x}}^{\text{sh}}. \end{array}$$

Ces décompositions locales satisfont le lemme suivant

**Lemme 2.3.7.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  des  $S$ -schémas.

1. Étant données des correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$ , on a pour tout point bon point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  et tout bon point géométrique  $\bar{z}$  de  $Z$  l'égalité

$$(\beta \circ \alpha)_{\bar{x},\bar{z}} = \sum_{\substack{\bar{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique}}} \beta_{\bar{y},\bar{z}} \circ \alpha_{\bar{x},\bar{y}}.$$

2. Étant donné un morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas on a

$$[g]_{\bar{x},\bar{y}} = \begin{cases} [g_{\bar{x}}^{\text{sh}}] & \text{si } \bar{y} = g \circ \bar{x} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Étant donnée une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , on a l'égalité dans  $c_S(X_{\bar{x}}^{\text{sh}}, (Y_{\bar{y}}^{\text{sh}})_{\bar{z}}^{\text{sh}})$

$$(\alpha_{\bar{x},\bar{y}})_{\bar{x},\bar{z}} = \begin{cases} \alpha_{\bar{x},\bar{y}} & \text{si } \bar{z} = \bar{y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout bon point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  et tout bon point géométrique  $\bar{z}$  du schéma local strictement hensélien  $Y_{\bar{y}}^{\text{sh}}$ .

Comme dans le cas de la topologie Nisnevich, ces décompositions locales se comportent bien par produit tensoriel. Étant donnés deux  $S$ -schémas  $X$  et  $Y$  nous avons un morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} (X \times_S Y)^{\text{sh}} & \xrightarrow{m_{X,Y}^{\text{sh}}} & X^{\text{sh}} \times_S Y^{\text{sh}} \\ \downarrow \iota_{X \times_S Y}^{\text{sh}} & & \downarrow (\iota_X^{\text{sh}}) \times_S (\iota_Y^{\text{sh}}) \\ & & X \times_S Y. \end{array}$$

Ces morphismes font du foncteur  $(-)^{\text{sh}}$  un foncteur quasi-monoïdal symétrique. Lorsque l'on se fixe un bon point  $\bar{e}$  du produit  $X \times_S Y$  se projetant sur  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} (X \times_S Y)_{\bar{e}}^{\text{h}} & \xrightarrow{\mathbf{m}_{X,Y,\bar{e}}^{\text{sh}}} & (X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) \times_S (Y_{\bar{y}}^{\text{sh}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \times_S Y)^{\text{sh}} & \xrightarrow{\mathbf{m}_{X,Y}^{\text{sh}}} & X \times_S Y. \end{array}$$

On a alors le lemme

**Lemme 2.3.8.** *Soient  $X, Y, X', Y'$  des  $S$ -schémas,  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  des correspondances finies. Pour tout bon point géométrique  $\bar{e}$  de  $X \times_S Y$  et tout bon point géométrique  $\bar{e}'$  de  $X' \times_S Y'$ , on a l'égalité*

$$\left( \alpha_{\bar{x}, \bar{x}'} \otimes \beta_{\bar{y}, \bar{y}'} \right) \circ \left[ \mathbf{m}_{X,Y,\bar{e}}^{\text{sh}} \right] = \left[ \mathbf{m}_{X',Y',\bar{e}'}^{\text{sh}} \right] \circ \left( \alpha \otimes \beta \right)_{\bar{e}, \bar{e}'}$$

dans  $c_S \left( (X \times_S Y)_{\bar{e}}^{\text{sh}}, (X')_{\bar{x}'}^{\text{sh}} \times_S (Y')_{\bar{y}'}^{\text{sh}} \right)$ .

*Remarque 2.3.9.* Dans le cas de la topologie étale la somme disparaît dans l'égalité précédente puisque la donnée d'un bon point géométrique de  $X' \times_S Y'$  revient à la donnée d'un bon point géométrique de  $Y'$  et d'un bon point géométrique de  $X'$  ayant même image dans  $S$ .

## CHAPITRE 3

### PRÉFAISCEAUX ET FAISCEAUX AVEC TRANSFERTS

Dans ce chapitre nous rappelons les notions de préfaisceaux avec transferts et de faisceaux avec transferts et nous détaillons les principales propriétés de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. Nous donnons aussi un exposé des liens — mis en évidence par A. Suslin et V. Voevodsky dans [123, 128] — unissant les transferts à la h-topologie qui se trouvait au coeur des premières constructions [128] de motifs mixtes par V. Voevodsky.

En utilisant les « transferts locaux » construits dans le chapitre 2, nous montrons, dans les sous-sections 3.4.2 et 3.4.3, que la résolution de Godement des faisceaux Nisnevich ou étales avec transferts est canoniquement munie de transferts — propositions 3.4.6 et 3.4.11. Nous montrons en outre que la structure multiplicative sur la résolution de Godement s'avère compatible au produit tensoriel des correspondances finies — proposition 3.4.8 et 3.4.12.

#### 3.1. Topologie de Nisnevich

Comme nous l'avons constaté au chapitre 2 avec la localisation des correspondances finies, la topologie de Zariski se comporte en général mal vis à vis des transferts. En revanche au contraire de la topologie étale, elle possède d'excellentes propriétés au regard des questions de dimension cohomologique ou de compacité. La topologie de Nisnevich [110] fournit une topologie intermédiaire réunissant tout à la fois les bonnes propriétés de la topologie de Zariski et celles de la topologie étale. A ce titre la topologie de Nisnevich joue un rôle central dans la construction des motifs mixtes de V. Voevodsky [133, 137].

Le fait que la topologie de Nisnevich possède beaucoup de propriétés en commun avec la topologie de Zariski, alors que sa définition semble plus proche de la topologie étale, trouve son origine dans le formalisme des cd-structures dû à V. Voevodsky et que nous rappelons maintenant.

**3.1.1. cd-structures.** — Les résultats et les définitions de cette sous-section concernant les cd-structures sont tirés du preprint de V. Voevodsky [132]. La notion de cd-structure est issue de l'axiomatisation de certaines propriétés de la topologie de Zariski et permet :

- de généraliser le théorème de Brown-Gersten [23, theorem 1'] à d'autres topologies que la topologie Zariski, en particulier à la topologie Nisnevich,

- de donner une structure de modèle cellulaire et propre sur la catégorie des faisceaux Nisnevich simpliciaux.

Rappelons qu'une cd-structure sur une catégorie  $\mathcal{C}$  possédant un objet initial  $\emptyset$  est la donnée d'une famille  $P$  de carrés de la forme

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & Q & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{e} & X \end{array} \quad (66)$$

telle que tout carré isomorphe à un carré appartenant à  $P$  appartienne lui aussi à  $P$ . Une cd-structure  $P$  définit une topologie de Grothendieck  $t_P$  sur  $\mathcal{C}$  : il s'agit de la topologie de Grothendieck la moins fine pour laquelle

- le crible de  $X$  engendré par la famille des morphismes  $\{p : Y \rightarrow X, e : A \rightarrow X\}$  est couvrant pour tout carré distingué de la forme (66),
- le crible vide couvre l'objet initial  $\emptyset$ .

En particulier chaque carré distingué définit un recouvrement *élémentaire*  $(p, e)$  de  $X$ .

*Notation 3.1.1.* Dans la suite, nous désignerons par  $\rho(X)$  le  $t_P$ -faisceau associé au préfaisceau représenté par  $X$  et par  $\mathbb{Z}[X]$  le  $t_P$ -faisceau de groupes abéliens associé. Nous noterons  $\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})$  la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens sur  $\mathcal{C}$  et par  $\text{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P)$  la catégorie des  $t_P$ -faisceaux de groupes abéliens.

Une cd-structure est dite *complète* [132, définition 2.3] lorsque tout crible couvrant contient un sous-crible engendré par un recouvrement élémentaire et l'on voit alors que les préfaisceaux  $F$  pour lesquels les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \longrightarrow & F(B) \end{array}$$

sont cartésiens pour tout carré distingué de la forme (66) et vérifiant  $F(\emptyset) = *$  sont des  $t_P$ -faisceaux. Cette condition devient nécessaire et suffisante pour les cd-structures *régulières* — *loc.cit.* définition 2.10 — *i.e.* vérifiant les trois conditions :

- les carrés distingués sont cartésiens,
- dans tout carré distingué, le morphisme  $e$  est un monomorphisme,
- pour tout carré distingué, le morphisme naturel de  $t_P$ -faisceaux

$$\rho(Y) \coprod \rho(B) \times_{\rho(A)} \rho(B) \rightarrow \rho(Y) \times_{\rho(X)} \rho(Y)$$

est un épimorphisme.

*Remarque 3.1.2.* En particulier pour une cd-structure régulière, les carrés

$$\begin{array}{ccc} \rho(X) & \longrightarrow & \rho(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho(A) & \longrightarrow & \rho(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[A] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[B] \end{array}$$

sont cocartésiens et on dispose donc d'une suite exacte de « Mayer-Vietoris »

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[B] \rightarrow \mathbb{Z}[Y] \oplus \mathbb{Z}[A] \rightarrow \mathbb{Z}[X] \rightarrow 0$$

dans la catégorie des  $t_P$ -faisceaux de groupes abéliens.

*Remarque 3.1.3.* Étant donné une cd-structure complète et un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , le lemme 2.8 de [132] assure que les  $t_P$ -faisceaux  $\rho(X)$  sont compacts dans la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, t_P)$ . Cela entraîne que les  $\mathbb{Z}[X]$  sont compacts dans  $\text{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P)$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$

Rappelons maintenant la définition 3.1 de [132].

**Définition 3.1.4.** Un foncteur de Brown-Gersten pour une cd-structure est la donnée d'une famille de préfaisceaux de groupes abéliens  $T_q, q \geq 0$  et pour tout carré distingué  $Q$  d'un morphisme de groupes abéliens

$$\partial_Q : T_{q+1}(B) \rightarrow T_q(X)$$

satisfaisant aux conditions :

1. les morphisme  $\partial_Q$  sont fonctoriels par rapport aux morphismes de carrés distingués,
2. les suites

$$T_{q+1}(B) \xrightarrow{\partial_Q} T_q(X) \rightarrow T_q(A) \oplus T_q(B)$$

sont exactes.

Une densité  $D$  sur  $\mathcal{C}$  est la donnée pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout entier  $i \geq 0$  d'une famille  $D_i(X)$  de morphismes de but  $X$  satisfaisant aux conditions :

- le morphisme de  $\emptyset$  dans  $X$  appartient à  $D_0(X)$  pour tout  $X$ ,
- les isomorphismes appartiennent aux  $D_i(X)$  pour tout  $i$  et tout  $X$ ,
- $D_{i+1}(X) \subset D_i(X)$  pour tout  $i$  et tout  $X$ ,
- lorsqu'un morphisme  $a$  de source  $Y$  appartient  $D_i(X)$  et un morphisme  $b$  appartient à  $D_i(Y)$  leur composée  $b \circ a$  appartient à  $D_i(X)$ .

La dimension d'un objet  $X$  par rapport à  $D$  est alors le plus petit entier  $n$  (éventuellement infini) pour lequel  $D_n(X)$  ne contient que des isomorphismes. Une densité est dite *localement de dimension finie* lorsque tout objet de  $X$  est de  $D$ -dimension finie.

Lorsque  $\mathcal{C}$  est muni simultanément d'une cd-structure et d'une densité  $D$ , un carré distingué est dit *réduisant* lorsque pour tout  $B_0 \in D_i(B), A_0 \in D_{i+1}(A), Y_0 \in D_{i+1}(Y)$ , il existe un  $X' \in D_{i+1}(X)$  et un morphisme de carrés

$$\begin{array}{ccccc}
 B' & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & \searrow & & & \downarrow \\
 & & Y' & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{(67)} & A_0 & \xrightarrow{\dots} & A & & \\
 & \searrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X' & \longrightarrow & X & & 
 \end{array}$$

où (67) est un carré distingué. Une densité est alors dite *réduisante* lorsqu'il existe pour tout carré distingué de la forme (66) un morphisme de carré

$$\begin{array}{ccccc}
 B' & \longrightarrow & B & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & Y' & \longrightarrow & Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{\quad (67) \quad} & A & & A \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

pour lequel (67) est distingué et réduisant. Une cd-structure est dite bornée lorsqu'il existe une densité localement de dimension finie et réduisante. Les cd-structures complètes régulières et bornées satisfont les deux propriétés fondamentales :

1. Généralisation du théorème de Brown et Gersten [132, théorème 3.2] : étant donné un foncteur de Brown Gersten  $(T_q, \partial_Q)$  pour lequel les  $t_P$ -faisceaux associés aux  $T_q$  sont nuls et vérifiant  $T_q(\emptyset) = 0$  on a  $T_q = 0$ .
2. Généralisation du théorème de Kato et Saito [132, théorème 2.26] : pour tout  $t_P$ -faisceau de groupes abéliens  $F$  on a

$$H_{t_P}^n(X, F) = 0$$

pour tout entier  $n$  strictement supérieur à la  $D$ -dimension de  $X$ .

La seconde assertion est une généralisation du théorème de dimension cohomologique pour la topologie Nisnevich dû à Kato et Saito [90] et du théorème analogue pour la topologie Zariski dû à Grothendieck [48, théorème 3.6.5]. On en déduit le lemme de compacité suivant

**Lemme 3.1.5.** *Soit  $P$  une cd-structure complète régulière et bornée. Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et tout système inductif filtrant  $i \mapsto F_i$  de complexes de  $t_P$ -faisceaux en groupes abéliens le morphisme*

$$\operatorname{colim}_i \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(\operatorname{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P))}(\mathbb{Z}[X], F_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}(\operatorname{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P))}(\mathbb{Z}[X], \operatorname{colim}_i F_i)$$

*est un isomorphisme. En particulier les  $t_P$ -faisceaux de groupes abéliens  $\mathbb{Z}[X]$  sont compacts dans la catégorie triangulée  $\mathbf{D}(\operatorname{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P))$ .*

DÉMONSTRATION. — Notons  $F$  la colimite des  $F_i$ . Le théorème 2.26 de [132] sur la dimension cohomologique assure que pour tout complexe de  $t_P$ -faisceaux en groupes abéliens  $G$  la suite spectrale d'hypercohomologie associée à  $G$

$$E_2^{p,q} : H^p(X, H^q(G)) \implies H^{p+q}(X, G)$$

est birégulière. Il suffit de voir que le morphisme canonique de suites spectrales de la colimite des suites associées aux  $F_i$  dans la suite associée à  $F$  est un isomorphisme. Pour cela il suffit de voir que le morphisme restreint aux termes  $E_2$  est un isomorphisme, ce qui résulte de la remarque 3.1.3.  $\square$

La catégorie dérivée des  $t_P$ -faisceaux de faisceaux de groupes abéliens pour une cd-structure complète, régulière et bornée  $P$  a une description extrêmement simple et compacte : il suffit

pour l'obtenir de quotienter la catégorie dérivée des préfaisceaux de groupes abéliens par la sous-catégorie épaisse engendrée par les complexes de « Mayer-Vietoris » :

**Lemme 3.1.6.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie munie d'une cd-structure complète, régulière et bornée  $P$ . Alors la catégorie dérivée des  $t_P$ -faisceaux de groupes abéliens est équivalente au quotient de la catégorie dérivée des préfaisceaux de groupes abéliens par la sous-catégorie épaisse de  $D(\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}))$  engendrée par les complexes*

$$\mathbb{Z}[B] \rightarrow \mathbb{Z}[A] \oplus \mathbb{Z}[Y] \rightarrow \mathbb{Z}[X]$$

où le carré

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

est distingué pour la cd-structure.

DÉMONSTRATION. — Notons  $E$  la sous-catégorie épaisse considérée dans l'énoncé. Les triangles de Mayer-Vietoris

$$\mathbb{Z}[B] \rightarrow \mathbb{Z}[A] \oplus \mathbb{Z}[Y] \rightarrow \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[B][1]$$

étant distingués d'après la remarque 3.1.2, on dispose d'un foncteur canonique

$$\iota : D(\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}))/E \rightarrow D(\text{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P)).$$

La catégorie à droite étant obtenue par localisation de la catégorie à gauche par la sous-catégorie épaisse noyau du foncteur « faisceau associé »

$$a_{t_P} : D(\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})) \rightarrow D(\text{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P)),$$

il suffit de prouver qu'un objet  $F$  de ce noyau appartient  $E$  ou ce qui revient au même que les préfaisceaux  $H^i$  sur  $\mathcal{C}$

$$H^i(X) := \text{Hom}_{D(\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}))/E}(\mathbb{Z}[X], F)$$

sont nuls. Or si  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $Q$  un carré distingué élémentaire

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X, \end{array}$$

on a le triangle distingué dans  $D(\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}))/E$

$$\mathbb{Z}[B] \rightarrow \mathbb{Z}[A] \oplus \mathbb{Z}[Y] \rightarrow \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[B][1]$$

et donc la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \oplus H^i(Y) \rightarrow H^i(X) \xrightarrow{\partial_Q} H^{i+1}(B) \rightarrow \dots$$

Ainsi les  $(H^i, \partial_Q)$  forment un foncteur de Brown-Gersten pour la cd-structure  $P$  et d'après le théorème 3.2 de [132] il suffit de prouver que les  $t_P$ -faisceaux associés aux  $H^i$  sont nuls, ce qui résulte du fait que  $F$  appartient au noyau du foncteur triangulé  $a_{t_P}$ .  $\square$

**3.1.2. La topologie de Nisnevich.** — La topologie de Nisnevich introduite dans [110] est la topologie engendrée par les familles couvrantes

$$(X_i \xrightarrow{e_i} X)_i$$

vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Le morphisme  $e_i$  est un morphisme étale.
2. Pour tout point  $x$  de  $X$  il existe un point  $x_i$  appartenant à l'un des  $X_i$  de sorte que le morphisme entre les corps résiduel  $\kappa(x)$  et  $\kappa(x_i)$  soit un isomorphisme.

Nos schémas étant tous supposés noethériens on peut naturellement se restreindre aux familles couvrantes finies. On obtient ainsi une topologie de Grothendieck sur la catégorie des  $S$ -schémas. Par définition cette topologie de Nisnevich se situe entre la topologie Zariski, qui est moins fine, et la topologie étale, qui est plus fine. En particulier elle est moins fine que la topologie canonique ce qui entraîne que les préfaisceaux représentables sont des faisceaux Nisnevich.

La topologie de Nisnevich peut naturellement être définie sur certaine sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}_S$ . Dans ce travail nous considérerons la topologie de Nisnevich tantôt sur la catégorie des  $S$ -schémas tantôt sur la sous-catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini. Le cas échéant nous prendrons la précaution de préciser la nature de la catégorie que nous considérons et tous les préfaisceaux sur  $S$  seront supposés définis sur cette catégorie.

*Notation 3.1.7.* Dans la suite  $\text{PSh}(S)$  désignera la catégorie des préfaisceaux sur  $S$  et  $\text{Sh}_{\text{Nis}}(S)$  celle des faisceaux Nisnevich sur  $S$ . On note

$$\begin{aligned} a_{\text{Nis}} : \text{PSh}(S) &\rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}(S) \\ a_{\text{Et}} : \text{PSh}(S) &\rightarrow \text{Sh}_{\text{Et}}(S) \end{aligned}$$

les foncteurs faisceaux associés pour la topologie de Nisnevich et la topologie étale.

**Définition 3.1.8.** Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $x$  un point de  $X$ . Un voisinage de  $x$  pour la topologie de Nisnevich est la donnée d'un  $X$ -schéma étale  $U$  et d'un point  $u$  de  $U$  se projetant sur  $x$  et tel que le morphisme induit entre les corps résiduels  $\kappa(u)$  et  $\kappa(x)$  soit un isomorphisme.

On dispose d'une notion évidente de morphismes de voisinages Nisnevich et nous noterons  $\mathcal{V}_x^h$  la catégorie des voisinages Nisnevich de  $x$ . La fibre d'un faisceau Nisnevich  $F$  sur  $S$  au point  $x$  est par définition

$$F_x = \text{colim}_{U \in (\mathcal{V}_x^h)^{\text{op}}} F(U)$$

et la catégorie opposée de  $\mathcal{V}_x^h$  est filtrante.

*Remarque 3.1.9.* En reprenant la démonstration de la proposition 4.6 de l'exposé VIII de [4] dans le cas de la topologie Nisnevich on voit que pour tout faisceau Nisnevich  $F$  sur  $\text{Sch}_S$  et tout point  $x$  d'un  $S$ -schéma  $X$ , on a un isomorphisme fonctoriel

$$F_x \simeq F(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^h)) = F(X_x^h)$$

les notations étant celles de la section 2.2.



Dans la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini  $\text{Sm}_S$ , un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

sera dit excisif lorsque  $e$  est une immersion ouverte et que le morphisme  $p$  induit un homéomorphisme entre les complémentaires  $X \setminus U$  et  $V \setminus W$ .

*Remarque 3.1.10.* La catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini admet une densité « naturelle » liée à la dimension de Krull. Pour un  $S$ -schéma lisse l'ensemble  $D_i(X)$  est formé des immersions ouvertes  $U \rightarrow X$  telles que pour tout point  $x_0 \in X \setminus U$  il existe des points  $x_1, \dots, x_i$  de  $X$  vérifiant  $x_r \neq x_{r+1}$  et  $x_r \in \overline{\{x_{r+1}\}}$ .

On peut voir la proposition suivante, dont on trouvera une démonstration complète au paragraphe 2 de [134], comme une reformulation des propriétés « classiques » de la topologie de Nisnevich. Cette dernière contient en particulier le théorème de dimension cohomologique de Kato et Saito [90].

**Proposition 3.1.11.** *Les carrés cartésiens excisifs de la forme*

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{e} & X \end{array} \tag{67}$$

pour lesquels  $p$  est un morphisme étale définissent sur  $\text{Sm}_S$  une cd-structure complète, régulière et bornée pour la densité de la remarque 3.1.10 dont la topologie associée est la topologie Nisnevich.

*Remarque 3.1.12.* L'une des grandes différences entre la topologie de Nisnevich et la topologie étale réside dans le fait que cette dernière échappe au formalisme des cd-structures et aux résultats qui en découlent. La propriété essentielle que ces topologies partagent est d'avoir pour anneaux locaux des anneaux locaux henséliens.

En particulier un préfaisceau  $F$  sur  $\text{Sm}_S$  est un faisceau Nisnevich si et seulement si pour tout carré excisif

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \square & \downarrow p \text{ étale} \\ U & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

le carré suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(U) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ F(V) & \longrightarrow & F(U \times_X V). \end{array}$$

### 3.2. Faisceaux Nisnevich avec transferts

Nous consacrons cette section à exposer les propriétés des faisceaux Nisnevich avec transferts qui sous-tendent la construction de la catégorie des motifs mixtes de Voevodsky et des foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques.

**3.2.1. Préfaisceaux et faisceaux avec transferts.** — Nous rappelons maintenant la définition des préfaisceaux et faisceaux avec transferts. Le lien avec la  $h$ -topologie fait l'objet de la sous-section 3.2.3.

*Définition 3.2.1.* Un préfaisceau avec transferts sur  $\text{Sch}_S$  (resp.  $\text{Sm}_S$ ) est un préfaisceau additif de groupes abéliens sur la catégorie des  $S$ -schémas (resp.  $S$ -schémas lisses de type fini) munis des correspondances finies. Un préfaisceau avec transferts dont le préfaisceau sous-jacent est un faisceau Nisnevich (resp. un faisceau étale) est appelé un faisceau Nisnevich avec transferts (resp. un faisceau étale avec transferts).

Dans la suite, nous désignerons par  $\text{PSh}^{\text{tr}}(S)$  la catégorie additive des préfaisceaux avec transferts sur  $S$  et par  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)$  (resp.  $\text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S)$ ) celle des faisceaux Nisnevich avec transferts (resp. faisceaux étales avec transferts) sur  $S$ . Nous prendrons soin de préciser le domaine de définition,  $\text{Sm}_S$  ou  $\text{Sch}_S$ , lorsqu'il y a lieu.

La théorie des cycles relatifs fournit les exemples les plus fondamentaux de préfaisceaux avec transferts, on a en effet le

**Lemme 3.2.2.** *Pour tout  $S$ -schéma  $X$  et tout entier positif, les préfaisceaux sur  $\text{Sch}_S$*

$$\underline{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \quad \underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n) \quad \underline{\mathcal{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \quad \underline{c}_{\text{equi}}(X/S, n)$$

*sont canoniquement munis de transferts.*

DÉMONSTRATION. — Pour simplifier les notations dans la preuve ci dessous,  $YZ$  désignera le produit fibré au dessus de  $S$  des  $S$ -schémas  $Y, Z$ . La construction des transferts étant la même pour les quatre préfaisceaux considérés nous désignons l'un d'entre eux par  $F_X$ . Étant donnés deux  $S$ -schémas  $X$  et  $Z$ , nous notons  $G_{XZ}$  le sous-préfaisceau de  $F_{XZ}$  dont les sections sur un  $S$ -schéma  $Y$  sont les éléments de  $F_{XZ}(Y)$  dont le support est propre sur  $XY$ . De même lorsque l'on se donne trois  $S$ -schémas  $X, Z$  et  $W$  on note  $H_{XZW}$  le sous-préfaisceau de  $F_{XZW}$  dont les sections sur un  $S$ -schéma  $Y$  sont les éléments de  $F_{XZW}(Y)$  à support propre sur  $XYZ$ .

Donnons nous une correspondances finie  $\alpha \in c_S(Y, Y')$ . Pour tout élément  $\beta \in F_X(YY')$  on peut remarquer que le support du cycle  $\text{Cor}(\beta, \alpha)$  est propre sur  $XY$ . En effet  $\alpha$  est une somme finie de la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $YY'$  finis et équidimensionnels sur  $Y'$ . Par définition du cycle  $\text{Cor}(\beta, \alpha)$ , le support de ce dernier est contenu dans la réunion des  $W_1, \dots, W_r$

où  $W_i$  est le sous-schéma fermé  $XY Y'$  donné par les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 W_i & \longrightarrow & XY Y' & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z_i & \longrightarrow & Y Y' & \longrightarrow & S \\
 \downarrow \text{fini} & & & & \\
 Y & & & & 
 \end{array}$$

Comme  $Z_i$  est fini sur  $Y$ , on voit par changement de base que  $W_i$  est fini sur  $XY$  et donc que le support de  $Cor(\beta, \alpha)$  est propre sur  $XY$ . Cela permet de considérer le morphisme  $F_X(\alpha)$  défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F_X(Y') & \xrightarrow{F_X(\alpha)} & F_X(Y) \\
 p_{Y'}^{Y Y'} \otimes \downarrow & & \uparrow p_{XY}^{XY Y'} \\
 F_X(Y Y') & \xrightarrow{Cor(-, \alpha)} & G_{XY'}(Y)
 \end{array}$$

qui nous donne l'action des transferts sur le préfaisceau  $F_X$ .

Il reste à voir que ceci définit bien une structure de préfaisceaux. Lorsque l'on se donne des correspondances finies  $\alpha \in c_S(Y, Y')$  et  $\alpha' \in c_S(Y', Y'')$  la functorialité résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_X(Y'') & \longrightarrow & F_X(Y Y'') & \xrightarrow{Cor(-, \alpha' \circ \alpha)} & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \searrow & \text{lemme 1.4.13} & \\
 F_X(Y' Y'') & \longrightarrow & F_X(Y Y' Y'') & \xrightarrow{Cor(-, Cor(p_{Y'}^{Y Y'} \otimes \alpha', \alpha))} & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \searrow & \text{lemme 1.4.15} & \\
 G_{XY''}(Y') & \longrightarrow & G_{XY''}(Y Y') & \xrightarrow{Cor(-, \alpha)} & H_{XY' Y''}(Y) & \xrightarrow{p_{XY Y''}^{XY Y' Y''}} & G_{XY''}(Y) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_X(Y') & \longrightarrow & F_X(Y Y') & \xrightarrow{Cor(-, \alpha)} & G_{XY'}(Y) & \xrightarrow{p_{XY}^{XY Y'}} & F_X(Y)
 \end{array}$$

Additional labels in the diagram:
 

- Left side:  $F_X(\alpha')$  and  $Cor(-, \alpha')$  between  $F_X(Y' Y'')$  and  $G_{XY''}(Y')$ .
- Top-left:  $p_{XY'}^{XY' Y''}$  between  $F_X(Y' Y'')$  and  $F_X(Y')$ .
- Bottom-left:  $p_{XY'}^{XY' Y''}$  between  $G_{XY''}(Y')$  and  $F_X(Y')$ .
- Bottom-middle:  $Cor(-, p_{Y'}^{Y Y'} \otimes \alpha')$  between  $F_X(Y Y' Y'')$  and  $G_{XY''}(Y Y')$ .
- Bottom-middle:  $p_{XY Y''}^{XY Y' Y''}$  between  $G_{XY''}(Y Y')$  and  $F_X(Y Y')$ .
- Bottom-middle:  $p_{XY Y''}^{XY Y' Y''}$  between  $H_{XY' Y''}(Y)$  and  $G_{XY''}(Y)$ .
- Bottom-middle:  $p_{XY Y''}^{XY Y' Y''}$  between  $G_{XY''}(Y)$  and  $F_X(Y)$ .
- Bottom-middle:  $p_{XY}^{XY Y'}$  between  $G_{XY'}(Y)$  and  $F_X(Y)$ .
- Bottom-middle:  $Cor(-, \alpha)$  between  $F_X(Y Y')$  and  $G_{XY'}(Y)$ .
- Bottom-middle:  $Cor(-, \alpha)$  between  $G_{XY'}(Y)$  and  $F_X(Y)$ .
- Bottom-middle:  $proposition\ 1.4.11$  between  $F_X(Y')$  and  $F_X(Y Y')$ .
- Bottom-middle:  $proposition\ 1.4.14$  between  $F_X(Y Y' Y'')$  and  $G_{XY''}(Y Y')$ .
- Bottom-middle:  $lemme\ 1.4.13$  between  $G_{XY''}(Y Y')$  and  $H_{XY' Y''}(Y)$ .
- Bottom-middle:  $lemme\ 1.4.13$  between  $H_{XY' Y''}(Y)$  and  $G_{XY''}(Y)$ .
- Bottom-middle:  $lemme\ 1.4.13$  between  $G_{XY''}(Y)$  and  $F_X(Y)$ .
- Bottom-middle:  $F_X(\alpha)$  between  $F_X(Y')$  and  $F_X(Y)$ .

dans lequel nous avons indiqué au centre de chaque carré le résultat qui en assure la commutativité. □

Le préfaisceau avec transferts sur  $\mathcal{V}$  représenté par un  $S$ -schéma  $X \in \mathcal{V}$  sera noté  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$ . Ces sections sur un  $S$ -schéma  $Y \in \mathcal{V}$  sont données par les correspondances finies de  $Y$  vers  $X$

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](Y) = c_S(Y, X)$$

Le lemme de Yoneda nous donne naturellement

$$\text{Hom}_{\text{PSht}^{\text{tr}}(S)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], F) = F(X)$$

pour tout préfaisceau avec transferts.

Des propriétés fondamentales du changement de base à la Suslin-Voevodsky, on déduit le lemme suivant qui est une généralisation à un schéma de base quelconque de la proposition 5.13 de [131].

**Lemme 3.2.3.** *Pour tout  $S$ -schéma  $X$  et tout entier positif, les préfaisceaux avec transferts*

$$\underline{\mathbb{Z}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \quad \underline{\mathbb{Z}}_{\text{equi}}(X/S, n) \quad \underline{\mathbb{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}} \quad \underline{\mathbb{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)$$

sont des faisceaux étales sur  $\text{Sch}_S$ .

DÉMONSTRATION. — Les arguments étant essentiellement les mêmes pour les quatre préfaisceaux considérés, nous désignons l'un d'entre eux par  $F_X$ . Fixons alors un  $S$ -schéma  $Y$  ainsi qu'un recouvrement étale  $r : U \rightarrow Y$  de ce dernier et convenons de noter  $p$  et  $q$  les projections sur le premier et le second facteur du schéma  $U \times_Y U$ . En utilisant le lemme 1.2.28 on voit qu'il s'agit de prouver que la suite

$$0 \rightarrow F_X(Y) \xrightarrow{r_X^*} F_X(U) \xrightarrow{p_X^* - q_X^*} F_X(U \times_Y U)$$

est exacte. Comme  $r_X$  est étale surjectif donc à fortiori plat surjectif, la remarque 1.1.18 assure que le morphisme d'image inverse  $r_X^*$  est un monomorphisme. Supposons que  $\beta$  soit un élément de  $F_X(U)$  vérifiant

$$p_X^* \beta - q_X^* \beta = 0.$$

Écrivons le cycle  $\beta$  comme une somme finie à coefficients rationnels ou entiers suivant les cas

$$\beta = \sum_{i=1}^r \beta_i [Z_i]$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $U \times_S X$  équidimensionnels sur  $U$  de dimension  $n$ . Notons  $z_i$  le point générique de  $Z_i$ . Les projections  $p_X$  et  $q_X$  étant étales, la remarque 1.1.19 nous permet de réécrire l'égalité précédente sous la forme

$$\sum_{i=1}^r \sum_{x \in p_X^{-1}(z_i)} \beta_i [\overline{\{x\}}] = \sum_{i=1}^r \sum_{x \in q_X^{-1}(z_i)} \beta_i [\overline{\{x\}}] \quad (68)$$

Supposons que pour deux entiers distincts  $i$  et  $j$  les images par  $r_X$  des sous-schémas  $Z_i$  et  $Z_j$  aient même adhérence ou ce qui revient au même que  $r_X(z_i) = r_X(z_j)$ . Il existe alors un point  $x$  appartenant simultanément à la fibre  $p_X^{-1}(z_i)$  et à la fibre  $q_X^{-1}(z_j)$  et la formule (68) nous donne l'égalité  $\beta_i = \beta_j$ . Soit  $E = \{r_X(z_1), \dots, r_X(z_r)\}$ . Lorsque  $e$  est un élément de  $E$ , ce qui précède

permet de définir  $\alpha_e$  comme la valeur commune des  $\beta_i$  pour les indices  $i$  tel que  $r_X(z_i) = e$ . Cela permet de définir un cycle algébrique sur  $X \times_S Y$  en posant

$$\alpha = \sum_{e \in E} \alpha_e \left[ \overline{\{e\}} \right].$$

L'égalité (68) assure que  $\{z_1, \dots, z_r\} = r_X^{-1}(E)$ . En effet si  $z$  est un point de  $X \times_S U$  ayant même image que  $z_i$  par  $r_X$ , il existe un point  $x$  appartenant à  $p_X^{-1}(z_i)$  et  $q_X^{-1}(z)$ . En utilisant l'égalité (68), on voit qu'il existe un indice  $j$  tel que  $x$  appartienne à la fibre  $q_X^{-1}(z_j)$ , ce qui donne bien  $z = z_j$ . La remarque 1.1.19 nous assure que le cycle  $\alpha$  vérifie  $\beta = r_X^* \alpha$ .

Il reste à voir que  $\alpha$  appartient à  $F_X(Y)$ . Dans le cas où  $F_X$  est donné par  $\underline{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$  où  $\underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n)$  cela résulte du fait que  $r_X$  est plat surjectif et des lemmes 1.1.13 et 1.2.35. Dans le cas où  $F_X$  est donné par  $\underline{C}_{\text{equi}}(X/S, n)$  où  $\underline{c}_{\text{equi}}(X/S, n)$ , il suffit de constater vu ce qui précède que le support de  $\alpha$  est propre sur  $Y$ . Via la remarque 1.1.19, on voit que le support de  $\beta$  est le schéma réduit associé à l'image inverse schématique du support de  $\alpha$ . Le support de  $\beta$  étant propre sur  $U$ , il suffit alors d'appliquer la proposition 2.7.1 de [54] au morphisme fidèlement plat  $r_X$  pour voir que le support de  $\alpha$  est lui aussi propre sur  $Y$ .  $\square$

Le lemme de Yoneda nous donne immédiatement le

**Corollaire 3.2.4.** *Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , le préfaisceau avec transferts  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  est un faisceau pour la topologie étale. En particulier pour tout faisceau Nisnevich avec transferts  $F$*

$$\text{Hom}_{\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], F) = F(X).$$

La proposition 3.1.3 de [133] — on pourra aussi se référer à la proposition 6.11 de [139] — est valable plus généralement. Cela se traduit par le

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Si  $U$  est un objet couvrant de  $X$  pour la topologie de Nisnevich (resp. étale) alors le morphisme de complexes de faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts*

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\check{C}(U)] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$$

*est un quasi-isomorphisme dans la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich (resp. étales).*

DÉMONSTRATION. — Par définition du complexe de faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts associé au schéma simplicial  $\check{C}(U)$ , il s'agit de montrer que le complexe de faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U_X^2] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

est exact. Ceci pouvant se vérifier localement pour la topologie de Nisnevich (resp. étale), il suffit de vérifier que pour tout schéma local hensélien (resp. strictement hensélien)  $\mathcal{O}$ , le complexe de groupes abéliens

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U_X^2](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U](\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](\mathcal{O}) \rightarrow 0 \cdots \quad (69)$$

est exact. Étant donné un sous-schéma fermé  $Z$  de  $\mathcal{O} \times_S X$  fini et équidimensionnel sur  $\mathcal{O}$ , on note  $V$  le schéma fermé défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{r} & Z \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U \times_S \mathcal{O} & \longrightarrow & X \times_S \mathcal{O} \end{array}$$

Les sous-groupes abéliens

$$c_{\text{equi}}(V_Z^n/\mathcal{O}, 0) \subset \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U_X^n](\mathcal{O})$$

définissent un sous-complexe de (69)

$$\cdots \rightarrow c_{\text{equi}}(V_Z^2/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(V_Z^1/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(Z/\mathcal{O}, 0) \rightarrow 0 \cdots \quad (70)$$

Les complexes (70) sont fonctoriels pour l'inclusion des sous-schémas fermés  $Z$  finis et équidimensionnels sur  $\mathcal{O}$ . On voit comme lors de la démonstration de la proposition 2.2.3 que le complexe (69) est la colimite sur de tels sous-schémas fermés de ces complexes. En particulier, il suffit de montrer que le complexe (70) est exact.

Comme  $Z$  est fini sur le schéma local hensélien (resp. strictement hensélien)  $\mathcal{O}$ , il est lui même hensélien (resp. strictement hensélien) et le morphisme couvrant pour la topologie de Nisnevich (resp. étale)  $r$ , admet une section  $s$ . On peut alors considérer les morphismes de schémas

$$s_n = s \times_Z \text{id}_{V_Z^n} : V_Z^n \rightarrow V_Z^{n+1}$$

Ces derniers vérifient les relations pour  $i = 0, \dots, n$

$$\delta_{i+1}^{n+1} \circ s_n = s_{n-1} \circ \delta_i^n \quad \delta_0^{n+1} \circ s_n = \text{id}$$

ce qui assure que les morphismes induits sur les cycles équidimensionnels

$$s_{n*} : c_{\text{equi}}(V_Z^n/\mathcal{O}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(V_Z^{n+1}/\mathcal{O}, 0)$$

définissent une homotopie entre l'identité du complexe (70) et le morphisme nul.  $\square$

Un cas particulier du lemme 3.2.5 est le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.6.** *Étant donné une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et un recouvrement Nisnevich (resp. étale)  $U$  de  $Y$ , il existe un recouvrement Nisnevich (resp. étale)  $V$  de  $X$  et une correspondance finie  $\beta \in c_S(V, U)$  pour lesquels le carré*

$$\begin{array}{ccc} [X] & \xrightarrow{\alpha} & [Y] \\ \uparrow \text{dotted} & & \uparrow \\ [V] & \xrightarrow{\beta} & [U] \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. — En effet on sait d'après le lemme 3.2.5 que le morphisme de faisceaux Nisnevich

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y]$$

est un épimorphisme ce qui entraîne l'existence du carré voulu.  $\square$

Les lemmes 3.2.5 et 3.2.6 nous assurent en particulier que la proposition 3.1.6 de [133] énoncée dans le cas où la base est le spectre d'un corps parfait est valable plus généralement :

**Proposition 3.2.7.** *Pour tout préfaisceau avec transfert  $F$ , il existe un unique faisceau Nisnevich (resp. étale) avec transferts  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}F$  (resp.  $a_{\text{Et}}^{\text{tr}}F$ ) satisfaisant aux conditions suivantes.*

1. *Le faisceau sous-jacent de  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}F$  (resp.  $a_{\text{Et}}^{\text{tr}}F$ ) est le faisceau Nisnevich (resp. étale) associé à  $F$ ,*
2. *Le morphisme de préfaisceaux*

$$F \rightarrow a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}F \quad (\text{resp. } F \rightarrow a_{\text{Et}}^{\text{tr}}F)$$

*est un morphisme de préfaisceaux avec transferts.*

DÉMONSTRATION. — Nous donnons la démonstration pour la topologie de Nisnevich, le cas de la topologie étale étant analogue. Montrons dans un premier temps l'unicité. Supposons que  $F_1$  et  $F_2$  soient deux faisceaux Nisnevich avec transferts satisfaisant les conditions de la proposition. Il s'agit de montrer que pour une correspondance finie  $\alpha : [X] \rightarrow [Y]$  et une section  $\sigma$  de  $a_{\text{Nis}}F$  sur  $Y$  on a

$$F_1(\alpha)(\sigma) = F_2(\alpha)(\sigma). \tag{71}$$

Il existe un recouvrement Nisnevich  $r : U \rightarrow Y$  pour lequel la section  $a_{\text{Nis}}F(r)(\sigma)$  appartient à l'image du morphisme

$$F(U) \rightarrow a_{\text{Nis}}F(U) \quad (\text{resp. } F(U) \rightarrow a_{\text{Et}}F(U)).$$

D'après le corollaire 3.2.6, il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} [X] & \xrightarrow{\alpha} & [Y] \\ \uparrow s & & \uparrow r \\ [V] & \xrightarrow{\beta} & [U] \end{array}$$

où  $s$  est un recouvrement Nisnevich et  $\beta$  une correspondance finie. On a alors les égalités

$$F_1(s)F_1(\alpha)(\sigma) = F_1(\beta)F_1(r)(\sigma) = F_2(\beta)F_2(r)(\sigma) = F_2(s)F_2(\alpha)(\sigma) = F_1(s)F_2(\alpha)(\sigma)$$

et puisque  $s$  est un recouvrement Nisnevich et  $F_1, F_2$  des faisceaux Nisnevich, cela entraîne l'égalité (71).

Montrons maintenant que le faisceau Nisnevich associé est canoniquement muni de transferts compatibles avec ceux de  $F$ . Pour cela il suffit de construire pour tout schéma lisse  $X$  et toute section  $\sigma$  de  $a_{\text{Nis}}F$  sur  $X$  une factorisation de la forme

$$\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \xrightarrow{\sigma} a_{\text{Nis}}F \quad (\text{resp. } \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \xrightarrow{\sigma} a_{\text{Et}}F)$$

du morphisme de préfaisceaux  $\mathbb{Z}[X] \rightarrow a_{\text{Nis}}F$  défini par  $\sigma$ . Cette factorisation peut-être obtenue en utilisant un recouvrement Nisnevich  $r : U \rightarrow X$  pour lequel la section  $a_{\text{Nis}}F(r)(\sigma)$  appartient à l'image du morphisme  $F(U) \rightarrow a_{\text{Nis}}F(U)$  et vérifie

$$(\delta_0^1)^*F(r)(\sigma) = (\delta_1^1)^*F(r)(\sigma)$$

La section  $F(r)(\sigma)$  nous définit un morphisme de préfaisceau  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \rightarrow a_{\text{Nis}}F$  et ce dernier se relève d'après le lemme 3.2.5 en un morphisme de préfaisceaux

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow a_{\text{Nis}}F.$$

On voit qu'il est possible de passer à des recouvrements plus fins que le morphisme obtenu ne dépend pas du choix du recouvrement  $U$  choisi.  $\square$

**Proposition 3.2.8.** *La construction de la proposition 3.2.7 est fonctorielle par rapport à  $F$  et les foncteurs*

$$\begin{aligned} a_{\text{Et}}^{\text{tr}} &: \text{PSh}^{\text{tr}}(S) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S) \\ a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} &: \text{PSh}^{\text{tr}}(S) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) \end{aligned}$$

obtenus sont des adjoints à gauche exacts des foncteurs d'oubli  $\mathcal{O}_{\text{Nis}}$  et  $\mathcal{O}_{\text{Et}}$ .

DÉMONSTRATION. — Cela résulte immédiatement du fait que  $a_{\text{Nis}}$  (resp.  $a_{\text{Et}}$ ) est adjoint au foncteur d'oubli et exact puisque l'on a le carré commutatif (ou son analogue en topologie étale)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)}(a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}F, G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{PSh}^{\text{tr}}(S)}(F, \mathcal{O}_{\text{Nis}}G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\text{Sh}_{\text{Nis}}(S)}(a_{\text{Nis}}F, G) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\text{PSh}(S)}(F, \mathcal{O}_{\text{Nis}}G) \end{array}$$

dans lequel les morphismes verticaux sont des inclusions.  $\square$

*Remarque 3.2.9.* On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{PSh}^{\text{tr}}(S) & \xrightarrow{a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}} & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) \\ \downarrow \text{oubli} & & \downarrow \text{oubli} \\ \text{PSh}^{\mathbb{Z}}(S) & \xrightarrow{a_{\text{Nis}}} & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S) \end{array}$$

et son analogue en topologie étale.

**Corollaire 3.2.10.** *La catégorie des faisceaux Nisnevich (resp. étale) avec transferts est une catégorie abélienne de Grothendieck complète et cocomplète.*

DÉMONSTRATION. — Cela résulte immédiatement de la proposition 3.2.8 puisque la catégorie des préfaisceaux avec transferts est abélienne de Grothendieck complète et cocomplète et que les foncteurs  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  et  $a_{\text{Et}}^{\text{tr}}$  sont exacts.  $\square$

Le foncteur d'oubli  $\mathcal{O}_{\text{tr}}$  de la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts dans la catégorie des faisceaux Nisnevich admet un adjoint à gauche  $L_S$ . Ce dernier associe à un faisceau Nisnevich  $F$

$$L_S(F) = \text{colim}_{X/F} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$$

où la colimite est prise dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts.

*Remarque 3.2.11.* Le foncteur  $L_S$  commute aux limites inductives comme tout adjoint à gauche mais en revanche n'est pas exact. Par définition pour un  $S$ -schéma  $X$

$$L_S(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X].$$



**3.2.2. Structure monoïdale.** — L'objectif de cette sous-section étant de commencer la construction du produit tensoriel des motifs mixtes, tous les préfaisceaux avec transferts que nous considérons sont des préfaisceaux avec transferts sur la catégorie  $\mathrm{Sm}_S$  des  $S$ -schémas lisses de type fini.

Nous avons vu dans la sous-section 2.1.1 que la catégorie  $\mathrm{SchCor}_S$  est une catégorie additive tensorielle et que le foncteur pleinement fidèle canonique

$$[-] : \mathrm{Sch}_S \longrightarrow \mathrm{SchCor}_S$$

est monoïdal symétrique. De même que  $\mathrm{SmCor}_S$  est une additive tensorielle et que le foncteur induit

$$[-] : \mathrm{Sm}_S \longrightarrow \mathrm{SmCor}_S$$

est tensoriel. On en déduit une structure tensorielle naturelle sur la catégorie des préfaisceaux avec transferts représentables que l'on étend à la catégorie abélienne  $\mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S)$  des préfaisceaux avec transferts en posant

$$F \otimes_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{pr}} G = \operatorname{colim}_{X \in \mathrm{Sm}_S / F} \operatorname{colim}_{Y \in \mathrm{Sm}_S / G} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X \times_S Y].$$

pour tout préfaisceau avec transferts  $F$  et  $G$ . Le bifoncteur

$$- \otimes_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{pr}} - : \mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S) \otimes \mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S) \longrightarrow \mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S)$$

obtenu de la sorte commute aux limites inductives et en particulier est exact à droite.

On peut donner une description des sections par générateurs et relations. Pour tout préfaisceau avec transferts  $H$  on a en effet une suite exacte de préfaisceaux avec transferts

$$\bigoplus_{\alpha \in c_S(Y, Z)} H(Z) \otimes \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[Y] \xrightarrow{\phi_H} \bigoplus_{Y \in \mathrm{Sm}_S} H(Y) \otimes \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[Y] \xrightarrow{\psi_H} H \rightarrow 0$$

pour laquelle le morphisme  $\psi_H$  est donné au niveau des sections sur un  $S$ -schéma  $X \in \mathrm{Sm}_S$  par

$$\begin{aligned} \bigoplus_{Y \in \mathrm{Sm}_S} H(Y) \otimes c_S(X, Y) &\longrightarrow H(X) \\ s \otimes \beta &\mapsto \beta^* s \end{aligned}$$

et le morphisme  $\phi_H$  par

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\alpha \in c_S(Y, Z)} H(Z) \otimes c_S(X, Y) &\longrightarrow \bigoplus_{Y \in \mathrm{Sm}_S} H(Y) \otimes c_S(X, Y) \\ s \otimes \beta &\mapsto \alpha^* s \otimes \beta - s \otimes (\beta \circ \alpha). \end{aligned}$$

Par exactitude à droite en tensorisant les deux suites exactes correspondant à  $F$  et  $G$ , on obtient la description suivante

$$(F \otimes_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{pr}} G)(X) = \left( \bigoplus_{Y, Z \in \mathrm{Sm}_S} F(Y) \otimes G(Z) \otimes c_S(X, Y \times_S Z) \right) / R \quad (72)$$

où  $R$  est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$\alpha^* s_Y \otimes \beta^* s_Z \otimes \gamma - s_Y \otimes s_Z \otimes (\alpha \otimes \beta) \circ \gamma$$

avec  $\alpha \in c_S(Y', Y)$ ,  $\beta \in c_S(Z', Z)$ ,  $\gamma \in c_S(X, Y' \times_S Z')$ ,  $s_Y \in F(Y)$  et  $s_Z \in G(Z)$ .

Le Hom interne  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}$  est construit de manière à avoir l'adjonction classique

$$\text{Hom}(F \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} G, H) \simeq \text{Hom}(F, \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(G, H)) ;$$

autrement dit on pose par définition :

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(F, G)(X) := \text{Hom}(F \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], G)$$

et la catégorie  $\text{PSh}^{\text{tr}}(S)$  est ainsi naturellement une catégorie tensorielle fermée.

Le produit tensoriel de faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts est alors défini en posant

$$F \otimes_{\text{tr}} G := a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} G) \quad (\text{resp. } F \otimes_{\text{tr}} G := a_{\text{Et}}^{\text{tr}}(F \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} G))$$

autrement dit

$$F \otimes_{\text{tr}} G := \text{colim}_{X/F} \text{colim}_{Y/G} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X \times_S Y]$$

la colimite étant prise cette fois dans la catégorie des faisceaux Nisnevich (resp. étales) avec transferts.

On obtient ainsi une structure tensorielle sur  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)$  — resp.  $\text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S)$ . En remarquant que si  $F$  et  $G$  sont des faisceaux Nisnevich — resp. étales — avec transferts il en est de même de  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(F, G)$ , on voit que la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)$  — resp.  $\text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S)$  — est une catégorie tensorielle fermée et que l'on a donc une adjonction

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(- \otimes_{\text{tr}} -, -) = \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(-, \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(-, -)). \quad (73)$$

**3.2.3. Transferts et h-topologies.** — Les préfaisceaux avec transferts que nous considérons dans cette sous-section sont des préfaisceaux avec transferts sur la catégorie  $\text{Sch}_S$  des  $S$ -schémas.

Dans [123, 128], A. Suslin et V. Voevodsky introduisent une nouvelle topologie de Grothendieck sur la catégorie des  $S$ -schémas. Cette h-topologie a pour principale vertu de « trivialisier » les transferts : cette topologie ne voit que les  $S$ -morphisms de schémas, substituant systématiquement ces derniers aux correspondances finies. Cette propriété entraîne que les h-faisceaux en groupes abéliens sont canoniquement des préfaisceaux avec transferts et même des faisceaux Nisnevich avec transferts. Cela permet de comprendre le lien entre la première catégorie de motifs construite par V. Voevodsky [128, §4] et les constructions ultérieures plus fines [133]. L'exposé original de ce résultat apparaît dans [123, §5, §6] mais nous lui substituons la présentation de [125, §4].

Suivant [128, définition 3.1.1] nous dirons qu'un morphisme de  $S$ -schémas  $g : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme topologique universel lorsqu'il est surjectif et que les ouverts de  $Y$  sont les parties dont l'image réciproque par  $g$  est ouverte dans  $X$ . Cette notion n'étant pas stable par changement de base, il y a lieu de considérer les épimorphismes topologiques universels, c'est à dire les morphismes de  $S$ -schémas  $g : X \rightarrow Y$  tels que pour tout  $Y$ -schéma  $Z$  le morphisme  $X \times_S Z \rightarrow Z$  est un épimorphisme topologique.

La  $h$ -topologie est la topologie de Grothendieck associée à la prétopologie pour laquelle les recouvrements d'un  $S$ -schéma  $X$  sont les familles finies  $(X_i \rightarrow X)_i$  de  $S$ -morphisms de type fini pour lesquelles le morphisme

$$\coprod_i X_i \rightarrow X \tag{74}$$

est un épimorphisme topologique universel. Cette topologie est très fine — on remarquera d'ailleurs que la  $h$ -topologie est plus fine que la topologie plate et donc à fortiori que la topologie de Nisnevich.

*Remarque 3.2.12.* On voit immédiatement que les morphismes ouverts surjectifs et les morphismes fermés surjectifs sont des épimorphismes topologiques. Les morphismes universellement ouverts de type fini, *e.g.* plats de type fini, et surjectifs ainsi que les morphismes propres et surjectifs sont donc des recouvrements pour la  $h$ -topologie. Pour cette raison les éclatements abstraits de la définition 1.2.15 sont des recouvrements pour la  $h$ -topologie.

Si  $F$  est un préfaisceau sur  $\text{Sch}_S$ , on note  $F_h$  le faisceau associé pour la  $h$ -topologie, nous notons également  $\mathbb{Z}_h[X]$  le  $h$ -faisceau de groupes abéliens associé au  $S$ -schéma  $X$ .

Pour tout  $S$ -schéma  $X$ , en associant à un morphisme de  $S$ -schémas la correspondance qu'il définit, on obtient un morphisme de préfaisceaux de groupes abéliens

$$\mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \tag{75}$$

et donc un morphisme canonique de  $h$ -faisceaux de groupes abéliens

$$\mathbf{a}_X : \mathbb{Z}_h[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]_h. \tag{76}$$

Ces morphismes sont naturellement fonctoriels par rapport aux morphismes de  $S$ -schémas comme en témoigne le lemme immédiat suivant :

**Lemme 3.2.13.** *Pour tout morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas, le carré de  $h$ -faisceaux en groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_h[X] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_h[g]} & \mathbb{Z}_h[Y] \\ \downarrow \mathbf{a}_X & & \downarrow \mathbf{a}_Y \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]_h & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}}[g]_h} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y]_h \end{array}$$

*est commutatif.*

DÉMONSTRATION. — Il s'agit de voir que les deux sections sur  $X$  du  $h$ -faisceau  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y]_h$  définies respectivement par les morphismes

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[g]_h \circ \mathbf{a}_X \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_Y \circ \mathbb{Z}_h[g]$$

sont les mêmes. Or par définition ces sections sont données respectivement par les éléments  $(X \times_S g)_*[\Delta_X]$  et  $g^{\otimes}[\Delta_Y]$  du groupe de cycles  $c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)$  et ces deux cycles coïncident avec le cycle associé au graphe de  $g$ . □

Dans le lemme suivant, on désigne par  $F^{\text{sym}}$  le faisceau en groupes abéliens associé canoniquement à un faisceau  $F$  en monoïdes commutatifs.

Pour les besoins du lemme suivant, nous notons  $\underline{Z}_{\text{Hilb}}(X/S, n)$  le préfaisceau sur  $\text{Sch}_S$  des cycles plats équidimensionnels de dimension  $n$ . En outre, nous désignons par  $\underline{z}_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X/S, n)$  le préfaisceau des cycles relatifs effectifs universellement entiers de dimension  $n$  — par la construction du changement de base pour les cycles relatifs, ces derniers demeurent effectifs après tout changement de base. Nous utilisons des notations analogues pour leurs homologues à support propre.

**Lemme 3.2.14.** *Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $n$  un entier  $\geq 0$ .*

1. *Les morphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \left[ \underline{Z}_{\text{Hilb}}(X/S, n) \right]_h &\longrightarrow \left[ \underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n) \right]_h \\ \left[ \underline{C}_{\text{Hilb}}(X/S, n) \right]_h &\longrightarrow \left[ \underline{c}_{\text{equi}}(X/S, n) \right]_h \end{aligned} \quad (77)$$

*sont des isomorphismes.*

2. *En particulier les morphismes*

$$\begin{aligned} \left[ \underline{z}_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X/S, n) \right]_h^{\text{sym}} &\longrightarrow \left[ \underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n) \right]_h \\ \left[ \underline{c}_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X/S, n) \right]_h^{\text{sym}} &\longrightarrow \left[ \underline{c}_{\text{equi}}(X/S, n) \right]_h \end{aligned} \quad (78)$$

*sont des isomorphismes.*

DÉMONSTRATION. — (1). Montrons que le morphisme (77) est un isomorphisme, la preuve pour le second morphisme étant identique. Sachant que le préfaisceau  $\underline{Z}_{\text{Hilb}}(X/S, n)$  est un sous-préfaisceau de  $\underline{z}_{\text{equi}}(X/S, n)$ , l'exactitude du foncteur faisceau associé pour une topologie de Grothendieck assure que le morphisme considéré est un monomorphisme. Il suffit donc de voir qu'il s'agit aussi d'un épimorphisme.

Étant donné un  $S$ -schéma  $Y$ , on sait d'après le lemme 1.2.21 qu'il existe un éclatement abstrait  $r : Y' \rightarrow Y$  tel que  $r_{\text{st}}^{\otimes} \alpha$  soit un élément de  $\underline{Z}_{\text{Hilb}}(X \times_S Y'/Y', n)$ . En utilisant le corollaire 1.2.25, on voit que  $r_{\text{st}}^{\otimes} \alpha = r^{\otimes} \alpha$ . Le résultat voulu découle alors de la remarque 3.2.12 qui assure que les éclatements abstraits sont des recouvrements pour la  $h$ -topologie.

(2). De même on peut se contenter de vérifier que le morphisme (78) est un isomorphisme. Cela résulte du résultat précédent puisque le triangle

$$\begin{array}{ccc} \left[ \underline{z}_{\text{equi}}^{\text{Hilb}}(X/S, r) \right]_h & \longrightarrow & \left[ \underline{z}_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X/S, r) \right]_h^{\text{sym}} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \left[ \underline{z}_{\text{equi}}(X/S, r) \right]_h \end{array}$$

est commutatif et que les morphismes verticaux et horizontaux sont des monomorphismes.  $\square$

*Remarque 3.2.15.* Pour un  $S$ -schéma  $X$  en notant  $\mathbb{N}^{\text{tr}}[X]$  le préfaisceau en monoïdes commutatifs dont les sections sur un  $S$ -schéma  $Y$  sont données par

$$\mathbb{N}^{\text{tr}}[X](Y) = c_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X_S Y/Y, 0)$$

le lemme précédent assure que le morphisme

$$\left[ \mathbb{N}^{\text{tr}}[X]_h \right]^{\text{sym}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]_h$$

est un isomorphisme. En d'autres termes, pour la  $h$  topologie, toute les correspondances finies sont des différences de correspondances finies effectives.

La relation fondamentale entre la  $h$ -topologie et les correspondances finies réside dans la proposition suivante.

**Proposition 3.2.16.** *Le morphisme (76) est un isomorphisme de  $h$ -faisceaux de groupes abéliens.*

DÉMONSTRATION. — Le morphisme de préfaisceaux (75) étant un monomorphisme et le foncteur faisceau associé étant exact pour n'importe quelle topologie, on voit que les morphismes (76) sont des monomorphismes. Il suffit donc de prouver que ces derniers sont aussi des épimorphismes, ce qui revient à prouver que, pour tout  $S$ -schéma  $Y$  et tout cycle algébrique  $\alpha$  appartenant à  $c_{\text{equi}}(X \times_S Y/Y, 0)$ , il existe un recouvrement pour la  $h$ -topologie  $r : Y' \rightarrow Y$  tel que le cycle  $r^{\otimes} \alpha$  soit une combinaison linéaire de morphismes de  $S$ -schémas de  $Y'$  dans  $X$ . En fait, en utilisant le lemme 3.2.14, on peut supposer que  $\alpha$  est effectif. Notons  $Y_1, \dots, Y_r$  les composantes irréductibles de  $Y$  munies de leur structure réduite. Le morphisme

$$\coprod_i Y_i \rightarrow Y$$

étant un recouvrement pour la  $h$ -topologie, on peut se ramener à prouver le résultat pour chaque  $S$ -schéma  $Y_i$  et donc supposer directement que  $Y$  est intègre. Dans ce cas, on a des isomorphismes canoniques

$$c_{\text{equi}}(Y/Y, 0) = \mathbb{Z} \quad c_{\text{equi}}^{\text{eff}}(Y/Y, 0) = \mathbb{N}$$

identifiant  $Y$  et 1. La projection de  $X \times_S Y$  sur  $Y$  nous définit un morphisme degré donnant un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} c_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X \times_S Y/Y, 0) & \xrightarrow{\text{deg}_Y} & \mathbb{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_{\text{equi}}(X \times_S Y/Y, 0) & \xrightarrow{\text{deg}_Y} & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Montrons l'assertion par récurrence sur le degré du cycle effectif  $\alpha$ . Le seul cycle effectif de degré nul étant le cycle nul, l'assertion est évidemment vraie dans le cas où  $\alpha$  est de degré nul. Supposons maintenant que  $\alpha$  soit de degré  $d > 0$ . Écrivons  $\alpha$  comme une somme finie

$$\alpha = \sum_{i=1}^s n_i [Z_i] \quad n_i \geq 0$$

où les  $Z_i$  sont des sous-schémas fermés intègres de  $X \times_S Y$  dont la projection  $\pi_{Z_i}$  sur  $Y$  est finie et équidimensionnelle. Notons  $Z$  la réunion disjointe des composantes irréductibles du support de  $\alpha$ , autrement dit de  $Z_1, \dots, Z_r$ . La projection  $\pi_Z$  de  $Z$  sur  $Y$  étant finie et surjective, il s'agit d'un recouvrement de  $Y$  pour la  $h$ -topologie. On a par ailleurs une décomposition en somme directe

$$c_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X \times_S Z/Z, 0) = \bigoplus_{i=1}^s c_{\text{equi}}^{\text{eff}}(X \times_S Z_i/Z_i, 0)$$

la composante d'indice  $i$  de  $\pi_Z^{\otimes} \alpha$  étant  $\pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha$ . Il suffit donc de prouver d'après l'hypothèse de récurrence que pour tout entier  $i = 1, \dots, s$ , il existe un cycle  $\beta_i \in c_{\text{equi}}(X \times_S Z_i / Z_i, 0)$  combinaison linéaire de morphismes de  $Z_i$  dans  $X$  tel que

$$\deg_{Z_i}(\pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha - \beta_i) < d.$$

Parmi les composantes irréductibles du support de  $\pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha$  on trouve  $Z_i$  identifié via l'immersion fermée diagonale à un sous-schéma fermé de

$$(Z_i) \times_Y (X \times_S Y) = (Z_i) \times_S X.$$

Via l'identification ci-dessus  $Z_i$  correspond au graphe du morphisme de projection de  $Z_i$  sur  $X$ , par suite le cycle

$$\beta_i = n[Z_i]$$

de  $c_{\text{equi}}(X \times_S Z_i / Z_i, 0)$  (nous désignons par  $n$  la multiplicité de  $Z_i$  dans  $\pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha$ ) est un multiple d'un  $S$ -morphisme de  $Z_i$  de  $X$ . Le degré étant invariant par changement de base des cycles relatifs — il s'agit d'un cas particulier de la proposition 1.4.11 — on a

$$\deg_{Z_i} \pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha = \deg_Y(\alpha) = d$$

et donc le degré de  $\pi_{Z_i}^{\otimes} \alpha - \beta_i$  est nécessairement strictement inférieur à  $d$ . Ce qui prouve la proposition.  $\square$

En des termes plus imagés, la proposition précédente signifie que du point de vue de la  $h$ -topologie les seules correspondances finies sont les combinaisons linéaires de morphismes de  $S$ -schémas. Pour tout  $S$ -schémas  $X, Y$  la proposition 3.2.16 donne un morphisme de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} & \text{b}_{X,Y} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]_h(Y) \xrightarrow{\text{a}_{X,Y}^{-1}} \mathbb{Z}_h[X](Y). \end{array} \quad (79)$$

*Remarque 3.2.17.* Le morphisme précédent envoie un  $S$ -morphisme de schémas de  $X$  dans  $Y$  sur la section du  $h$ -faisceau  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]_h$  lui correspondant. De plus il résulte du lemme 3.2.13 que ces derniers sont compatibles aux changements des cycles relatifs. Autrement dit pour tout morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas, le carré de préfaisceaux en groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}}[g]} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y] \\ \downarrow \text{b}_X & & \downarrow \text{b}_Y \\ \mathbb{Z}_h[X] & \xrightarrow{\mathbb{Z}_h[g]} & \mathbb{Z}_h[Y] \end{array}$$

est commutatif.

La proposition 3.2.16 entraîne immédiatement la compatibilité des morphismes (79) au produit tensoriel des correspondances finies et à leur composition. Cela se traduit plus précisément par le lemme suivant.

**Lemme 3.2.18.** *Soient  $X, Y, Z, W$  des  $S$ -schémas.*

1. *Le carré suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X](Z) \otimes \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y](W) & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X \times_S Y](Z \times_S W) \\ \downarrow \mathbf{b}_{X,Z} \otimes \mathbf{b}_{Y,Z} & & \downarrow \mathbf{b}_{X \times_S Y, Z \times_S W} \\ \mathbb{Z}_h[X](Z) \otimes \mathbb{Z}_h[Y](W) & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{Z}_h[X \times_S Y](Z \times_S W). \end{array} \quad (80)$$

2. *Le carré de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Z](Y) \otimes \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y](X) & \xrightarrow{\circ} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y \times_S Z](X) \\ \downarrow \mathbf{b}_{Z, X \times_S Y} \otimes \mathbf{b}_{Y, X} & & \downarrow \mathbf{b}_{Y \times_S Z, X} \\ \mathbb{Z}_h[Z](Y) \otimes \mathbb{Z}_h[Y](X) & \xrightarrow{\circ} & \mathbb{Z}_h[Z](X). \end{array} \quad (81)$$

où les morphismes horizontaux sont respectivement donnés par la composition des correspondances finies et la composition dans la catégorie des  $h$ -faisceaux en groupes abéliens est commutatif.

DÉMONSTRATION. — (1). Comme  $\mathbb{Z}_h[X \times_S Y]$  est un faisceau pour la  $h$ -topologie, il suffit, étant données une correspondance finie  $\alpha$  de  $Z$  dans  $X \times_S Z$  et une correspondance finie  $\beta$  de  $W$  dans  $Y \times_S W$ , de vérifier que leurs images par les deux morphismes coïncident localement. Pour démontrer la commutativité du diagramme (80), on peut donc remplacer  $Z$  et  $W$  par des recouvrements pour la  $h$ -topologie bien choisis. En particulier la proposition 3.2.16 permet de supposer que  $\alpha$  est une combinaison linéaire de  $S$ -morphisms de  $Z$  dans  $X$  et que  $\beta$  est une combinaison linéaire de  $S$ -morphisms de  $W$  dans  $Y$  et dans ce cas l'assertion est triviale puisque le produit tensoriel de deux  $S$ -morphisms en tant que correspondance est le produit de ces  $S$ -morphisms.

(2). Comme  $\mathbb{Z}_h[Z]$  est un faisceau pour la  $h$ -topologie il suffit, étant données une correspondance finie  $\alpha$  de  $X$  dans  $Y$  et une correspondance finie  $\beta$  de  $Y$  dans  $Z$  de vérifier que leurs images par les deux morphismes coïncident localement. Pour démontrer la commutativité du diagramme (81), on peut donc remplacer  $X$  par un recouvrement pour la  $h$ -topologie bien choisi. En utilisant la proposition 3.2.16, on peut supposer que la correspondance finie  $\alpha$  est une combinaison linéaire de  $S$ -morphisms de  $X$  dans  $Y$ . Par linéarité, on peut se restreindre au cas où  $\alpha$  est un morphisme de  $S$ -schéma et le résultat découle de la compatibilité aux changements de base des cycles relatifs de la remarque 3.2.17.  $\square$

Supposons donné un  $h$ -faisceau de groupes abéliens  $F$ . D'après le lemme 3.2.18, en associant à une correspondance finie  $\alpha$  de  $X$  dans  $Y$  le morphisme de groupes abéliens

$$F(Y) \xrightarrow{F[\mathbf{b}_{Y,X}(\alpha)]} F(X),$$

on obtient une structure canonique de préfaisceau avec transferts sur  $F$  compatible avec la structure de préfaisceau usuel. En d'autres termes, en convenant de noter  $\text{Sh}_h^{\mathbb{Z}}(S)$  la catégorie abélienne des  $h$ -faisceaux en groupes abéliens, on a le corollaire

**Corollaire 3.2.19.** *Les  $h$ -faisceaux en groupes abéliens ont une structure canonique de préfaisceau avec transferts, autrement dit il existe un foncteur additif canonique  $\mathcal{O}_h^{\text{tr}}$  rendant le triangle*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_h^{\mathbb{Z}}(S) & & \\ \mathcal{O}_h \downarrow & \searrow \mathcal{O}_h^{\text{tr}} & \\ \text{PSh}^{\mathbb{Z}}(S) & \xleftarrow{\mathcal{O}_{\text{tr}}} & \text{PSh}^{\text{tr}}(S) \end{array}$$

commutatif où  $\mathcal{O}_h$  est le foncteur qui associe à un  $h$ -faisceau son préfaisceau sous-jacent.

*Remarque 3.2.20.* En anticipant sur les sous-sections 3.4.1 et 3.4.2, supposons que  $F$  soit un  $h$ -faisceau en groupes abéliens quasi-monoïdal symétrique. La compatibilité avec le produit tensoriel des correspondances du lemme 3.2.18 assure que  $\mathcal{O}_h^{\text{tr}}(F)$  est canoniquement un préfaisceau avec transferts quasi-monoïdal symétrique de manière compatible à la structure de départ.

Les faisceaux localement constants pour la topologie étale étant des  $h$ -faisceaux la discussion précédente nous donne le

**Corollaire 3.2.21.** *Les faisceaux de groupes abéliens localement constant pour la topologie étale sont canoniquement munis d'une structure de préfaisceaux avec transferts. De plus les faisceaux d'anneaux localement constants sont canoniquement munis d'une structure de préfaisceau avec transferts quasi-monoïdal symétrique.*

### 3.3. Catégorie dérivée

La construction des motifs mixtes ne faisant intervenir que des  $S$ -schémas lisses de type fini, dans cette section, tous les préfaisceaux avec transferts que nous considérons sont des préfaisceaux avec transferts sur la catégorie  $\text{Sm}_S$  des  $S$ -schémas lisses de type fini.

**3.3.1. Un résultat de compacité.** — Nous allons donner les conséquences de l'existence d'une cd-structure complète, régulière et bornée sur la catégorie  $\text{Sm}_S$  des  $S$ -schémas lisses de type fini ayant pour topologie associée la topologie de Nisnevich. En particulier, on voit au lemme 3.3.5 qu'il existe une présentation particulièrement agréable de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. Cette présentation, tout comme dans [133], permet de faire le lien — proposition 4.1.23 — entre l'approche faisceautique des motifs mixtes — sous-section 4.1.1 — et l'approche géométrique — sous-section 4.1.2. Dans la suite il est commode d'utiliser la

*Notation 3.3.1.* Étant donné un faisceau Nisnevich avec transferts  $F$ , nous notons  $\mathcal{O}_{\text{tr}}(F)$  le faisceau Nisnevich sous-jacent.

Remarquons tout d'abord que le lemme de Yoneda admet l'extension suivante lorsque l'on considère la catégorie dérivée.

**Lemme 3.3.2.** *Pour tout  $X \in \text{Sm}_S$  et tout complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$  le morphisme canonique*

$$\text{Hom}_{\text{D}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{D}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S))}(\mathbb{Z}[X], \mathcal{O}_{\text{tr}}(F))$$

est un isomorphisme.



DÉMONSTRATION. — Dans cette démonstration nous utilisons la terminologie de [122]. Sachant que d’après le corollaire 3.2.4 on a l’isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{z}}(S))}(\mathbb{Z}[X], \mathcal{O}_{\mathrm{tr}}F),$$

pour prouver le lemme il suffit de voir qu’un complexe K-injectif  $I$  de faisceaux Nisnevich avec transferts est un complexe K-flasque de faisceaux Nisnevich. En utilisant la construction des résolutions injectives non bornées de [122] et l’assertion c) de la proposition 5.15 de *loc.cit.*, on voit l’on peut se ramener à supposer que  $I$  est inférieurement borné. On peut alors se ramener au cas où  $I$  est simplement un faisceau Nisnevich avec transferts injectif.

D’après la proposition 4.3 de [4] il s’agit de voir que, pour tout  $X \in \mathrm{Sm}_S$  et tout entier  $n \geq 1$ , le groupe de cohomologie de Čech  $\check{H}_{\mathrm{Nis}}^n(X, I)$  est nul. Ce dernier est la colimite filtrante sur les recouvrements  $U \rightarrow X$  pour la topologie de Nisnevich des  $n$ -èmes groupes de cohomologie des complexes de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)}(\check{C}_{U/X}, I) \quad (82)$$

où  $\check{C}_{U/X}$  est le complexe de Čech augmenté (47) que l’on sait être acyclique par le lemme 3.2.5. Comme  $I$  est injectif, les complexes (82) sont aussi acycliques et notre assertion en découle.  $\square$

*Remarque 3.3.3.* Si  $F$  est un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts K-injectif, le défaut d’exactitude de la remarque 3.2.11 ne permet pas de conclure à la K-injectivité de  $\mathcal{O}_{\mathrm{tr}}F$ .

Les propriétés de finitude de la dimension cohomologique Nisnevich se traduisent par le résultat de compacité suivant.

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout  $X \in \mathrm{Sm}_S$  et tout système inductif filtrant  $i \mapsto F_i$  de complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts le morphisme canonique*

$$\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], \mathrm{colim}_i F_i)$$

*est un isomorphisme. En particulier les objets de la forme  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]$  où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini sont compacts dans la catégorie triangulée  $\mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$ .*

DÉMONSTRATION. — D’après le lemme 3.3.2, on sait que pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{z}}(S))}(\mathbb{Z}[X], \mathcal{O}_{\mathrm{tr}}(F)).$$

Il suffit d’utiliser le lemme 3.1.5 et la proposition 3.1.11 pour conclure.  $\square$

**Lemme 3.3.5.** *Pour tout carré distingué pour la topologie de Nisnevich de la forme (67), le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[V] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[U] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[U \times_X V] \end{array}$$

*est cocartésien dans la catégorie abélienne des faisceaux Nisnevich avec transferts. De plus le foncteur  $a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}$  induit une équivalence de catégorie triangulée*

$$a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}} : \mathbf{D}(\mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S))/E_{MV} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$$

où  $E_{MV}$  est la sous-catégorie épaisse de la catégorie dérivée des préfaisceaux avec transferts engendrée par les complexes

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \oplus \mathbb{Z}_{\text{tr}}[V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X].$$

DÉMONSTRATION. — Supposons donné un carré distingué élémentaire de la forme (67). Comme le foncteur  $L_S$  commute aux colimites, la remarque 3.1.2 nous assure que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[V] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V] \end{array}$$

est lui aussi cocartésien et que l'on a une suite exacte de Mayer-Vietoris dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \oplus \mathbb{Z}_{\text{tr}}[V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow 0.$$

Le foncteur exact  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  se factorise donc de manière canonique via le quotient par  $E_{MV}$

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))/E_{MV} \rightarrow \mathbf{D}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)).$$

La catégorie à droite étant obtenue par localisation de la catégorie à gauche par la sous-catégorie épaisse noyau du foncteur  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ , il suffit de prouver qu'un objet  $F$  de ce noyau appartient  $E_{MV}$  ou ce qui revient au même que les préfaisceaux  $H^i$  sur  $\text{Sm}_S$

$$H^i(X) := \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))/E_{MV}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], F)$$

sont nuls. Or pour un carré distingué élémentaire de la forme (67) on a le triangle distingué dans  $\mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))/E_{MV}$

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \oplus \mathbb{Z}_{\text{tr}}[V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V][1]$$

et donc la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H^i(U \times_X V) \rightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \rightarrow H^i(X) \xrightarrow{\partial_Q} H^{i+1}(U \times_X V) \rightarrow \cdots$$

Ainsi les  $(H^i, \partial_Q)$  forment un foncteur de Brown-Gersten pour la cd-structure définissant la topologie de Nisnevich et, d'après le théorème 3.2 de [132], il suffit de prouver que les faisceaux Nisnevich associés aux  $H^i$  sont nuls, ce qui résulte du fait que  $F$  appartient au noyau du foncteur triangulé  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ .  $\square$

*Remarque 3.3.6.* On notera que la sous-catégorie  $E_{MV}$  du lemme 3.3.5 est stable par somme directe non nécessairement finie.

**3.3.2. Structure monoïdale.** — Dans cette sous-section, nous reprenons la construction du produit tensoriel dérivé des faisceaux Nisnevich avec transferts de [124] en remarquant qu'elle est valable pour un schéma de base quelconque. Nous détaillons ensuite les propriétés — implicites dans la littérature — de ce produit tensoriel ainsi que celles du Hom interne. Nous travaillons dans des catégories dérivées non bornées et nous utilisons pour ce faire les méthodes de [122].

Nous reprenons les conventions de la sous-section précédente, en particulier les schémas considérés sont tous lisses de type fini sur  $S$  et les préfaisceaux avec transferts considérés sont les préfaisceaux avec transferts sur la catégorie  $\text{Sm}_S$  des  $S$ -schémas lisses de type fini.

Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne de Grothendieck, on sait d'après [65] que la catégorie des complexes non bornés  $\text{C}(\mathcal{A})$  possède une structure naturelle de catégorie de modèle cellulaire, souvent appelée injective, pour laquelle

1. les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;
2. les cofibrations sont les monomorphismes.

Naturellement tous les complexes sont cofibrants pour cette structure, en revanche les objets fibrants sont les complexes  $K$ -injectifs au sens de Spaltenstein [122] dont les composantes sont des objets injectifs de  $\mathcal{A}$ . Les fibrations quant à elles sont les épimorphismes scindés dont le noyau est fibrant. La structure de modèle injective est compatible avec la dérivation à droite des foncteurs mais puisque tous les objets sont cofibrants elle ne saurait être compatible avec la dérivation à gauche.

En vertu du corollaire 3.2.10, nous pouvons appliquer ce résultat à la catégorie abélienne des faisceaux Nisnevich avec transferts. Le point de départ de la construction du produit tensoriel dérivé dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts est la

*Remarque 3.3.7.* Soit  $F$  un faisceau Nisnevich avec transferts. On a un épimorphisme canonique

$$\bigoplus_{X/F} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow F.$$

Les constructions classiques d'algèbre homologique assurent alors l'existence pour tout complexe supérieurement borné de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$  d'un quasi-isomorphisme  $G \rightarrow F$  où  $G$  est un complexe supérieurement borné dont les composantes sont des sommes directes de faisceaux de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$ .

Nous dirons qu'une immersion fermée  $i : Z \hookrightarrow X$  est scindée lorsqu'il existe un morphisme  $p : X \rightarrow Z$  vérifiant  $p \circ i = \text{id}$ . Étant donnée une telle immersion nous notons  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  le conoyau du morphisme canonique  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[Z] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  induit par  $i$ . Comme  $i$  est scindée, on obtient une suite exacte scindée

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Z] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \rightarrow 0.$$

Nous utiliserons dans la suite la définition suivante (la terminologie adoptée étant un peu abusive)

**Définition 3.3.8.** Nous appellerons faisceaux Nisnevich avec transferts libre un faisceau de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  où  $i : Z \hookrightarrow X$  est une immersion fermée scindée.

Dans la définition précédente le sous-schéma fermé  $Z$  peut être vide. Les faisceaux  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  sont donc naturellement considérés comme libres.

Soit  $i : Z \hookrightarrow X$  un immersion fermée scindée de  $S$ -schémas lisses de type fini. Considérons le foncteur exact à droite

$$T_{X/Z} := a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} -) : \text{PSh}^{\text{tr}}(S) \rightarrow \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S).$$

**Lemme 3.3.9.** *Soit  $F$  un préfaisceau avec transferts tels que  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F) = 0$ . Alors pour tout entier relatif  $n$ , on a l'annulation des foncteurs dérivés*

$$L_n T_{X/Z}(F) = 0.$$

DÉMONSTRATION. — Considérons la surjection canonique

$$\bigoplus_{\text{Sm}_S/F} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y] \rightarrow F.$$

Un objet de la catégorie  $\text{Sm}_S/F$  est la donnée d'un  $S$ -schéma lisse  $Y$  et d'une section  $s \in F(Y)$ . Sachant que le faisceau Nisnevich associé à  $F$  est nul, il existe un recouvrement pour la topologie de Nisnevich  $U_s \rightarrow Y$  de sorte que la restriction de  $s$  à  $U_s$  soit nulle. Cela revient à dire que l'on a une factorisation canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U_s] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y] & \xrightarrow{s} & F \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U_s/Y}) & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 0. \end{array}$$

On obtient ainsi une surjection de la forme

$$\bigoplus_{\substack{Y \in \text{Sm}_S \\ s \in F(Y)}} H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U_s/Y}) \twoheadrightarrow F.$$

Notons  $G$  le noyau de ce morphisme de sorte que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \bigoplus_{\substack{Y \in \text{Sm}_S \\ s \in F(Y)}} H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U_s/Y}) \longrightarrow F \longrightarrow 0. \quad (83)$$

Il résulte du lemme 3.2.5 que

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \left[ \bigoplus_{\substack{Y \in \text{Sm}_S \\ s \in F(Y)}} H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U_s/Y}) \right] = \bigoplus_{\substack{Y \in \text{Sm}_S \\ s \in F(Y)}} H_0(\check{C}_{U_s/Y}) = 0$$

et notre hypothèse sur  $F$  entraîne que  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(K) = 0$ .

Pour  $n < 0$  on a bien  $L_n T_{X/Z} = 0$  ce qui permet de raisonner par récurrence sur  $n$ . Supposons que pour tout préfaisceau avec transferts satisfaisant  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(G) = 0$ , on ait  $L_p T_{X/Z}(G) = 0$  pour  $p < n$ . La suite exacte courte (83) nous donne la suite exacte

$$\bigoplus_{\substack{Y \in \text{Sm}_S \\ s \in F(Y)}} L_n T_{X/Z}(H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U_s/Y})) \longrightarrow L_n T_{X/Z}(F) \longrightarrow L_{n-1} T_{X/Z}(K)$$

et l'on voit qu'il suffit de prouver que

$$L_n T_{X/Z}(H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\check{C}_{U/Y})) = 0$$

pour un recouvrement  $U \rightarrow Y$  pour la topologie de Nisnevich. Comme le lemme 3.2.5 nous assure que pour tout  $q$

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \left[ H_q(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y}) \right] = H_q(\check{C}_{U/Y}) = 0$$

notre hypothèse de récurrence entraîne la dégénérescence de la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_{pq}^2 = L_p T_{X/Z}(H_q(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y})) \implies L_{p+q} T_{X/Z}(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y}).$$

On obtient ainsi un isomorphisme

$$L_n T_{X/Z}(H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y})) = L_n T_{X/Z}(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y}).$$

Comme le complexe  $\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y}$  est K-projectif, on a finalement

$$\begin{aligned} L_n T_{X/Z}(H_0(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y})) &= L_n T_{X/Z}(\mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y}) = H_n(a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} \mathcal{O}_{\text{Nis}} \check{C}_{U/Y})) \\ &= H_n(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} \check{C}_{U/Y}). \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[Z] \otimes_{\text{tr}} \check{C}_{U/Y} = \check{C}_{Z \times_S U/Z \times_S Y} \quad \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \otimes_{\text{tr}} \check{C}_{U/Y} = \check{C}_{X \times_S U/X \times_S Y}.$$

Notre immersion fermée  $i$  nous donne donc une suite exacte scindée de complexes

$$0 \rightarrow \check{C}_{Z \times_S U/Z \times_S Y} \rightarrow \check{C}_{X \times_S U/X \times_S Y} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} \check{C}_{U/Y} \rightarrow 0. \quad (84)$$

Notre assertion découle alors d'une nouvelle application du lemme 3.2.5 à la suite exacte longue de cohomologie déduite de (84).  $\square$

Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne cocomplète et  $\mathfrak{P}$  une famille de complexes d'objets de  $\mathcal{A}$ . Pour reprendre la terminologie de [122] nous dirons qu'une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

est semi-scindée lorsque pour tout entier relatif  $i$  la suite exacte

$$0 \rightarrow A^i \rightarrow B^i \rightarrow C^i \rightarrow 0$$

d'objets de  $\mathcal{A}$  est scindée. Rappelons la définition suivante [122, définition 2.6] : un  $\mathfrak{P}$ -système inductif spécial est la donnée d'un ensemble bien ordonné  $\mathcal{E}$  et d'un système inductif  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$  vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Lorsque  $e$  n'a pas de prédécesseur on a

$$A_e = \text{colim}_{f < e} A_f.$$

2. Lorsque  $e$  a un prédécesseur  $f$ , le morphisme de complexe  $A_f \rightarrow A_e$  est un monomorphisme dont le conoyau  $C$  appartient à  $\mathfrak{P}$  et la suite exacte

$$0 \rightarrow A_f \rightarrow A_e \rightarrow C$$

est semi-scindée.

**Définition 3.3.10.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne cocomplète. Une sous-catégorie  $\mathfrak{P}$  de  $\mathbf{C}(\mathcal{A})$  est dite stable par colimite spéciale lorsqu'elle est strictement pleine et que toute colimite d'un  $\mathfrak{P}$ -système inductif spécial appartient à  $\mathfrak{P}$ .

*Remarque 3.3.11.* Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  des catégories abéliennes cocomplètes et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif commutant aux colimites. La définition 3.3.10 entraîne que si  $\mathfrak{P}$  est une sous-catégorie de  $C(\mathcal{B})$  stable par colimite spéciale, la sous-catégorie strictement pleine  $F^{-1}(\mathfrak{P})$  est aussi stable par colimites spéciales. Plus généralement si  $F : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{B})$  est un foncteur additif commutant aux colimites et préservant les suites exactes semi-scindées, la sous-catégorie pleine  $F^{-1}(\mathfrak{P})$  est stable par colimites spéciales.

*Remarque 3.3.12.* Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne cocomplète. Supposons que  $\mathfrak{P}$  soit une sous-catégorie strictement pleine de  $C(\mathcal{A})$  stable par colimite spéciale et telle que  $A$  appartienne à  $\mathfrak{P}$  si et seulement si  $A[1]$  appartient à  $\mathfrak{P}$  — stabilité par décalage. La catégorie  $\mathfrak{P}$  possède alors la propriété d’être stable par cône. En effet le cône  $C$  d’un morphisme  $h : A \rightarrow B$  d’objet de  $\mathfrak{P}$  est donné par le complexe

$$C^k = A[1]^k \oplus B^k \quad d_C^k = \begin{pmatrix} d_{A[1]}^k & 0 \\ h^{k+1} & d_B^k \end{pmatrix}.$$

On a donc un morphisme de complexes  $A[1] \rightarrow C$  et on peut voir  $C$  comme la colimite du  $\mathfrak{P}$ -système inductif filtrant

$$0 \rightarrow A[1] \rightarrow C$$

indiqué par l’ensemble bien ordonné  $\{0 < 1 < 2\}$ . En particulier si  $\mathcal{B}$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{A}$  telle que  $\mathcal{B}[i] \subset \mathfrak{P}$  pour tout entier relatif  $i$ , on voit, par description des complexes bornés comme cône itéré, que  $C^b(\mathcal{B})$  est contenue dans  $\mathfrak{P}$ . Comme tout complexe  $B$  de  $C^-(\mathcal{B})$  est la  $\mathfrak{P}$ -colimite spéciale sur  $\mathbb{N}$  du système

$$B_n : \cdots 0 \rightarrow B_{-n} \rightarrow B_{-n+1} \rightarrow \cdots$$

on voit que  $C^-(\mathcal{B})$  est contenu dans  $\mathfrak{P}$ .

Supposons que  $(\mathcal{A}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$  soit une catégorie tensorielle fermée dans laquelle les sommes directes dénombrables sont représentables. Rappelons que l’on obtient une structure tensorielle fermée  $(\otimes, \underline{\text{Hom}})$  sur la catégorie  $C(\mathcal{A})$  des complexes d’objets de  $\mathcal{A}$  de la manière suivante.

- Le produit tensoriel de complexes d’objets de  $\mathcal{A}$  est le complexe  $A \otimes B$  donné par l’objet  $\mathbb{Z}$ -gradué de  $\mathcal{A}$

$$A \otimes B = \bigoplus_{i+j=k} A^i \otimes B^j$$

muni de la différentielle donnée sur  $A^i \otimes B^j$  par

$$d_{A \otimes B}^k = d_A^i \otimes \text{id}_{B^j} + (-1)^i \text{id}_{A^i} \otimes d_B^j.$$

- Le Hom interne dans  $C(\mathcal{A})$  est donné par l’objet  $\mathbb{Z}$ -gradué de  $\mathcal{A}$

$$\underline{\text{Hom}}^k(A, B) = \prod_i \underline{\text{Hom}}(A^i, B^{i+k})$$

muni de la différentielle donnée par

$$\left( d_{\underline{\text{Hom}}^k(A, B)}^i a \right)^i = d_B^{i+k} \circ a^i + (-1)^{k+1} a^{i+1} \circ d_A^i.$$

- L’isomorphisme d’associativité est donné par les morphismes d’associativité dans  $\mathcal{A}$ .

– L'isomorphisme de symétrie  $\tau_{A,B}$  est donné par

$$\tau_{A,B}^k = \sum_{i+j=k} (-1)^{ij} \tau_{A^i, B^j}.$$

– L'unité est fournie par l'unité dans  $\mathcal{A}$ .

Nous allons maintenant décrire les complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts que nous utilisons pour dériver le produit tensoriel et le Hom interne dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. Nous introduisons dans un premier temps les complexes « plats » ou tout au moins ce qui en joue le rôle.

**Définition 3.3.13.** Nous désignons par  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  la sous-catégorie strictement pleine de  $\mathbf{C}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))$  stable par colimite spéciale et engendrée par les complexes supérieurement bornés de faisceaux Nisnevich avec transferts libres. L'image essentielle de cette dernière par le foncteur

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{C}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow \mathbf{C}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$$

est notée  $\mathcal{PL}^{\text{tr}}(S)$  et ses objets sont appelés des complexes pseudo-K-plats.

En utilisant la remarque 3.3.12, on voit qu'il est possible de décrire la catégorie  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  comme la sous-catégorie strictement pleine de  $\mathbf{C}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))$  stable par colimite spéciale, par décalages et engendrée par les faisceaux Nisnevich avec transferts libres, autrement dit de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  pour une immersion fermée scindée  $Z \hookrightarrow X$ .

*Remarque 3.3.14.* Les préfaisceaux avec transferts  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  sont projectifs. Plus généralement si  $Z \hookrightarrow X$  est une immersion fermée scindée le préfaisceau  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  est projectif. Cela entraîne que les complexes supérieurement bornés de faisceaux Nisnevich avec transferts libres sont des complexes K-projectifs de préfaisceaux.

Les complexes K-projectifs de préfaisceaux étant stables par colimite spéciale, on déduit en particulier de la remarque 3.3.14 que les complexes de préfaisceaux avec transferts appartenant à  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  sont des complexes K-projectifs de préfaisceaux. Le lemme suivant découle immédiatement de la définition 3.3.13.

**Lemme 3.3.15.** Soient  $X \in \text{Sm}_S$  et  $F, G$  des complexes pseudo-K-plats. Le complexe

$$F \otimes_{\text{tr}}^{\bullet} G$$

est pseudo-K-plat.

DÉMONSTRATION. — Par définition, il existe  $F', G' \in \mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  tels que  $F = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F')$  et  $G = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(G')$ . On a donc

$$F \otimes_{\text{tr}}^{\bullet} G = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(\mathcal{O}_{\text{Nis}}(F) \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} \mathcal{O}_{\text{Nis}}(G)) = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F' \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} G').$$

Il suffit donc de montrer que  $F' \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} G'$  appartient à  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$ . La remarque 3.3.11 assure que la sous-catégorie strictement pleine formée des complexes  $F'$  tel que  $F' \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} G'$  appartienne à  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  est stable par colimite spéciale et par décalages. Il suffit donc de voir que, pour toute immersion fermée scindée  $Z \hookrightarrow X$ , le complexe  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} G'$  appartient à  $\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$ . En utilisant le même argument on se ramène au cas où  $G$  est de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y/W]$  pour une immersion fermée scindée  $W \hookrightarrow Y$ . Le lemme découle de l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}\bullet} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y/W] = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X \times_S Y/Z \times_S W].$$

□

**Proposition 3.3.16.** *La catégorie  $\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S) \otimes \mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  est projective pour le bifoncteur  $- \otimes_{\text{tr}} -$ . En particulier ce bifoncteur est dérivable et pour toute immersion fermée scindée  $Z \hookrightarrow X$  et  $W \hookrightarrow Y$ , on a canoniquement*

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y/W] = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[Y/W] = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X \times_S Y/W \times_S Y].$$

DÉMONSTRATION. — En utilisant la remarque 3.3.7 alliée au théorème 3.4 de [122], on sait que tout complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$  admet une résolution pseudo-K-plat autrement dit qu'il existe un quasi-isomorphisme  $P \rightarrow F$  où  $P$  est pseudo-K-plat.

Il suffit de voir que pour des complexes  $F, G$  pseudo-K-plats l'acyclicité de  $F$  ou de  $G$  entraîne l'acyclicité de  $F \otimes_{\text{tr}}^{\bullet} G$ . La démonstration étant identique dans les deux cas, nous allons traiter le cas où  $G$  est acyclique. Par hypothèse, il existe un complexe  $F' \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  tel que  $F = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F')$ . D'après la remarque 3.3.11, la sous-catégorie strictement pleine formée des complexes de préfaisceaux  $F'$  tel que  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F') \otimes_{\text{tr}}^{\bullet} G$  soit acyclique est stable par colimite spéciale et par décalages. On peut donc supposer que  $F'$  (et donc aussi  $F$ ) est de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  pour une immersion fermée scindée  $Z \hookrightarrow X$ . Fixons un complexe  $G' \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  tel que  $G = a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(G')$ .

Soit  $i$  un entier relatif. Le foncteur de troncation « brutale »  $\tau^{\leq i+2}$  qui à un complexe  $E$  associe le complexe

$$\tau^{\leq i+2} E : \dots \rightarrow E^{i+1} \rightarrow E^{i+2} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

commute aux colimites et préserve les suites exactes scindées. Comme les images par  $\tau^{\leq i+2}$  de complexes (supérieurement bornés) de faisceaux Nisnevich avec transferts libres sont de même nature, la remarque 3.3.11 nous assure plus généralement que les images par  $\tau^{\leq i+2}$  d'éléments de  $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  sont des éléments de  $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$ , en outre

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(\tau^{\leq i+2} E) = \tau^{\leq i+2}(a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} E).$$

Notons  $K'$  le complexe  $\tau^{\leq i+2} G'$  ainsi que  $K$  le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts associés et considérons la suite spectrale birégulière d'hypercohomologie

$$E_{pq}^2 = L_p T_{X/Z}(H_q(K')) \implies L_{p+q} T_{X/Z}(K').$$

Comme la cohomologie de  $K$  est concentrée en degré  $i+2$ , le lemme 3.3.9 assure que les termes  $E_{p,q}^2$  sont nuls sauf pour  $q = i+2$ . Cette suite est donc dégénérée et nous fournit un isomorphisme

$$L_i T_{X/Z}(K') = E_{-2, i+2}^2 = 0.$$

D'après la remarque 3.3.14, le complexe  $K'$  est un complexe K-projectif de préfaisceaux avec transferts, cela nous donne

$$H^i(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} K) = H^i(T_{X/Z}(K')) = L_i T_{X/Z}(K') = 0.$$

Il suffit donc de remarquer que par définition de  $K'$  on a

$$H^i(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} G) = H^i(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} K)$$

pour achever la preuve. □



Le produit tensoriel dérivé

$$- \otimes_{\text{tr}}^L - : D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \otimes D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$$

définit une structure tensorielle sur la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts compatible à la structure triangulée.

*Remarque 3.3.17.* La proposition 3.3.16 ne permet pas de conclure que pour un faisceau Nisnevich avec transferts  $F$  le foncteur  $F \otimes_{\text{tr}} -$  est dérivable à droite et encore moins que lorsqu'il existe un foncteur dérivé à droite ce dernier coïncide avec le foncteur  $F \otimes_{\text{tr}}^L -$ . En revanche cette proposition assure tout de même que pour une immersion fermée scindée  $Z \hookrightarrow X$  entre  $S$ -schémas lisses le foncteur  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes_{\text{tr}} -$  admet bien un foncteur dérivé à droite et que ce dernier est égal à  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z] \otimes^L -$ . On en déduit en particulier que  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[S]$  est l'unité de la structure tensorielle.

On peut par ailleurs dériver le Hom interne en un foncteur

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(-, -) : D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))^{\text{op}} \otimes D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \quad (85)$$

De manière à pouvoir justifier la formule d'adjonction usuelle — implicite dans la littérature — nous introduisons la

**Définition 3.3.18.** Nous dirons qu'un complexe  $I$  de faisceaux Nisnevich avec transferts est pseudo-K-injectif lorsque pour tout  $P \in \mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$  acyclique le complexe  $\text{Hom}^{\bullet}(P, I)$  est acyclique. Cette notion possède de bonnes propriétés relatives aux complexes pseudo-K-plats introduits précédemment. On dispose à cet égard du résultat suivant.

**Lemme 3.3.19.** Soient  $F$  un complexe pseudo-K-plat et  $G$  un complexe pseudo-K-injectif. On suppose que  $F$  ou  $G$  est acyclique.

1. Le complexe  $\text{Hom}^{\bullet}(F, G)$  est acyclique.
2. Le complexe  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^{\bullet}(F, G)$  est acyclique.

DÉMONSTRATION. — (1). Lorsque  $F$  est acyclique le complexe  $\text{Hom}^{\bullet}(F, G)$  est acyclique par définition. Supposons que  $G$  soit acyclique. La sous-catégorie strictement pleine formée des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts  $H$  tel que  $\text{Hom}^{\bullet}(H, G)$  soit acyclique est stable par colimites spéciales et par décalages. On peut donc supposer que  $F = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z]$  pour une immersion fermée scindée. Comme on a une suite exacte courte scindée de complexes

$$0 \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X/Z], G) \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], G) \rightarrow \text{Hom}^{\bullet}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[Z], G) \rightarrow 0$$

on se trouve immédiatement ramené au cas où  $F = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  pour un certain  $S$ -schéma lisse de type fini. On doit alors prouver l'acyclicité du complexe

$$\dots \rightarrow G^{n-1}(X) \rightarrow G^n(X) \rightarrow G^{n+1}(X) \rightarrow \dots \quad (86)$$

Fixons un élément  $s \in G^n(X)$  tel que  $d^n(s) = 0$ . Construisons par récurrence un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $C$  de la manière suivante. Pour  $i > n$  on pose  $C^i = 0$ . On définit  $C^n$  comme l'image du morphisme canonique  $s : \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow G^n$  et on pose pour  $i < n$

$$C^i = \ker \left[ G^i \xrightarrow{d^i} G^{i+1}/C^{i+1} \right].$$

Comme  $G$  est acyclique et  $s$  est fermé, notre sous-complexe  $C$  est aussi acyclique. D'après la remarque 3.3.7, il existe une résolution pseudo-K-plate  $u : P \rightarrow C$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- on a  $P^i = 0$  pour  $i > n$ ,
- on a  $P^n = \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$ ,
- le morphisme  $u^n$  coïncide avec l'identité.

Comme  $P$  est pseudo-K-plat et acyclique, on sait par définition que  $\text{Hom}^\bullet(P, G)$  est acyclique. Cela entraîne que le morphisme  $v : P \rightarrow G$  induit par  $u$  est homotope à zéro. Prenons une homotopie

$$h^n : P^n \rightarrow G^{n-1} \quad v^k = h^{k+1} \circ d^k + d^{k-1} \circ h^k.$$

Comme  $u^n$  est égal à l'identité, l'image par  $v^n$  de la section unité de  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  est  $s$ . Compte tenu du fait que  $P^{n+1}$  est nul, la relation d'homotopie précédente nous donne

$$s = v^n(1) = d^{n-1}h^n(1)$$

ce qui prouve que le complexe (86) est bien acyclique.

(2). Fixons un entier relatif  $i$ . Le faisceau de cohomologie  $H^i(\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, G))$  est le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau

$$X \mapsto H^i(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, G))(X).$$

Par ailleurs pour un  $S$ -schéma lisse de type fini, on a

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, G))(X) &= H^i(\mathcal{O}_{\text{Nis}}\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, G)(X)) \\ &= H^i(\text{Hom}^\bullet(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X], \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, G))) \\ &= H^i(\text{Hom}^\bullet(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \otimes_{\text{tr}} F, G)) \end{aligned}$$

Comme  $F$  est pseudo-K-plat, le lemme 3.3.15 assure qu'il en est de même de  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \otimes_{\text{tr}} F$  et il résulte de la définition 3.3.18 que le complexe  $\text{Hom}^\bullet(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \otimes_{\text{tr}} F, G)$  est acyclique.  $\square$

**Définition 3.3.20.** Nous désignons par  $\mathcal{P}^{\text{tr}}(S)$  la sous-catégorie strictement pleine des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts dont les objets sont les complexes pseudo-K-injectifs.

La proposition 3.3.16 nous donne finalement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.21.** *La catégorie  $\mathcal{P}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S) \otimes \mathcal{P}\mathcal{J}^{\text{tr}}(S)$  est injective pour les bifoncteurs*

$$\text{Hom}^\bullet(-, -) \quad \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(-, -).$$

*En particulier on a un isomorphisme fonctoriel canonique*

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(F, R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(G, H)) = R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(F \otimes_{\text{tr}}^L G, H). \quad (87)$$

DÉMONSTRATION. — La première assertion est une reformulation du lemme 3.3.19. Donnons nous des complexes pseudo-K-plats  $F, G$  ainsi qu'un complexe K-injectif  $H$ . L'adjonction (73) nous donne un isomorphisme

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F, \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(G, H)) = \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(F \otimes_{\text{tr}}^\bullet G, H). \quad (88)$$

Si  $E$  est un complexe pseudo-K-plat acyclique, on a de même un isomorphisme

$$\text{Hom}^\bullet(E, \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^\bullet(G, H)) = \text{Hom}^\bullet(E \otimes_{\text{tr}}^\bullet G, H). \quad (89)$$

La proposition 3.3.16 alliée au lemme 3.3.15 assure que  $E \otimes_{\text{tr}}^{\bullet} G$  est un complexe pseudo-K-plat acyclique. Le complexe (89) est donc acyclique ce qui assure que  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^{\bullet}(G, H)$  est pseudo-K-injectif. Notre adjonction (87) est donc une conséquence formelle de (88).  $\square$

*Remarque 3.3.22.* Au cours de la démonstration du corollaire précédent, on a vu que si  $G$  est pseudo-K-injectif et  $F$  est pseudo-K-plat alors  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}^{\bullet}(F, G)$  est pseudo-K-injectif.

*Remarque 3.3.23.* En appliquant le foncteur section globale aux deux membres de (87), on obtient un isomorphisme fonctoriel

$$R\text{Hom}(F, R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(G, H)) = R\text{Hom}(F \otimes_{\text{tr}}^L G, H)$$

et donc en passant aux  $H^0$ , une adjonction (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\text{Hom}(F, R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(G, H)) = \text{Hom}(F \otimes_{\text{tr}}^L G, H).$$

On peut alors vérifier que munie du Hom interne (85) la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts est une catégorie triangulée tensorielle fermée.

### 3.4. Résolution de Godement des faisceaux avec transferts

Dans cette section, nous montrons que la résolution de Godement d'un faisceau Nisnevich ou étale avec transferts est canoniquement munie de transferts. Ces transferts de « nature locale » sont produits par les correspondances locales que nous avons étudiées au chapitre 2. Le cas de la topologie étale étant formellement analogue au cas de la topologie de Nisnevich nous avons traité en détail ce dernier et rassemblé les résultats obtenus dans le cadre étale dans la sous-section 3.4.3.

Les préfaisceaux avec transferts que nous considérons dans cette section sont les préfaisceaux avec transferts sur la catégorie des  $S$ -schémas.

Au vu de la construction des correspondances locales, la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini offre un cadre trop étroit. En effet les faisceaux avec transferts que nous considérons doivent opérer sur les hensélisés en un point des  $S$ -schémas considérés et les correspondances finies entre de tels schémas. Le contre exemple donné dans la remarque 2.1.29 de [32] montre que l'hensélisé d'un  $S$ -schéma lisse de type fini en un point n'est pas nécessairement essentiellement de type fini sur  $S$ . En revanche l'hensélisé d'un  $S$ -schéma formellement lisse en un point étant lui même formellement lisse sur  $S$ , nous pourrions considérer seulement les préfaisceaux sur la catégorie des  $S$ -schémas formellement lisses munis des correspondances finies.

**3.4.1. Rappels sur la résolution de Godement.** — Rappelons qu'une monade dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'un endofoncteur  $M$  de  $\mathcal{C}$  et de transformations naturelles  $\mu : MM \rightarrow M$  et  $\eta : \text{id} \rightarrow M$  pour lesquelles les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta M} & MM & \xleftarrow{M\eta} & M \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \text{id} \\ & & M & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} MMM & \xrightarrow{M\mu} & MM \\ \downarrow \mu M & & \downarrow \mu \\ MM & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

sont commutatifs. Étant donnée une monade  $(M, \mu, \eta)$ , l'un des nombreux avatars de la construction bar permet d'associer à un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  un objet cosimplicial  $B^*(M, C)$  de  $\mathcal{C}$  muni d'une coaugmentation de  $C$  dans ce dernier. Les  $n$ -cosimplexes sont donnés par l'objet  $M^{n+1}C$  de  $\mathcal{C}$ , les codégénérescences par les morphismes

$$\sigma_i^n := M^i \mu M^{n-1-i} : M^{n+1}C \rightarrow M^n C \quad i = 0, \dots, n-1$$

et les cofaces par les morphismes

$$\delta_i^{n-1} := M^i \eta M^{n-i} : M^n C \rightarrow M^{n+1}C \quad i = 0, \dots, n.$$

Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  soient des catégories abéliennes et  $F \vdash G$  des foncteurs adjoints de sources respectives  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . L'adjonction entre  $F$  et  $G$  détermine une monade  $M = GF$  de  $\mathcal{A}$  pour laquelle  $\eta$  est l'unité de l'adjonction et  $\mu$  le morphisme

$$\mu := G\varepsilon F$$

$\varepsilon$  désignant la counité de l'adjonction. La construction précédente permet d'associer fonctoriellement, à un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , l'objet cosimplicial  $B^*(M, A)$ . Ce dernier nous fournit un complexe  $\mathcal{C}B^*(M, A)$  d'objets de  $\mathcal{A}$  de termes  $\mathcal{C}B^n(M, A) = B^n(M, A)$  et dont les différentielles sont données par la somme alternée des morphismes cofaces

$$d^n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i^n ; B^n(M, A) \rightarrow B^{n+1}(M, A)$$

ainsi qu'une coaugmentation

$$A \rightarrow \mathcal{C}B^*(M, A). \quad (90)$$

**Lemme 3.4.1.** *L'image par  $F$  de la coaugmentation (90) est un quasi-isomorphisme. En particulier lorsque le foncteur  $F$  est exact et conservatif le morphisme (90) est un quasi-isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. — Notons  $h_n$  les morphismes induits par la counité  $\varepsilon$

$$\begin{array}{ccc} FB^{n+1}(M, A) & \xrightarrow{h_n} & FB^n(M, A) \\ \parallel & & \parallel \\ (FG)FB^n(M, A) & \xrightarrow{\varepsilon FB^n(M, A)} & FB^n(M, A). \end{array}$$

Pour  $i = 0, \dots, n-1$ , on a les relations

$$F(\delta_i^{n-1}) \circ h^n = h^{n+1} \circ F(\delta_{i+1}^n) \quad h^{n+1} \circ F(\delta_0^n) = \text{id}.$$

En particulier cela donne  $F(d^{n-1}) \circ h^n + h^{n+1} \circ F(d^n) = \text{id}$  ce qui assure que le complexe

$$F \rightarrow B^0(M, A) \rightarrow B^1(M, A) \rightarrow \dots \rightarrow B^n(M, A) \rightarrow \dots$$

est homotope à 0 et prouve le lemme. □

Lorsque l'on se donne un morphisme  $g$  d'un topos annelé  $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  dans un topos annelé  $(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ , on peut appliquer la construction précédente à l'adjonction

$$g^* : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \quad \vdash \quad g_* : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$$

et associer à un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module  $F$  son  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cosimplicial de Godement

$$\mathcal{G}^* F = B^*(g_* g^*, F).$$

Pour simplifier, nous noterons  $G^*F = \mathcal{C}\mathcal{G}^*F$  le complexe de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules associé.

Dans un topos  $\mathcal{X}$  les produits fibrés au-dessus de l'objet final définissent une structure monoïdale symétrique canonique. Étant donnés deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{X}$ , la structure d'anneaux sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  fournit un morphisme de groupes abéliens

$$\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y) \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(p_X^{X,Y}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(p_Y^{X,Y})} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X \times Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X \times Y)$$

faisant de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X \times Y)$  une  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y)$ -algèbre.

**Définition 3.4.2.** Un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module quasi-monoïdal est la donnée d'un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module  $F$  et, pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $\mathcal{X}$ , d'un morphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y)$ -modules

$$\boxtimes_{X,Y}^F : F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y) \longrightarrow F(X \times Y)$$

fonctoriel rendant les diagrammes suivants commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} (F(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Z)) & \xrightarrow{F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \boxtimes_{Y,Z}^F} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y \times Z) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y \times Z}^F} F(X \times (Y \times Z)) \\ \downarrow \text{ass}_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\otimes_{\mathbb{Z}}} & & \downarrow F(\text{ass}_{X,Y,Z}^{\times}) \\ (F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y)) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Z) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F \otimes_{\mathbb{Z}} F(Z)} F(X \times Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Z) & \xrightarrow{\boxtimes_{X \times Y, Z}^F} F((X \times Y) \times Z) \end{array}$$

pour tout objet  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{X}$ . Un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module quasi-monoïdal est dit symétrique lorsque les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} F(X \times Y) & \\ \downarrow \text{sym}_{F(X), F(Y)}^{\otimes} & & \downarrow F(\text{sym}_{X,Y}^{\times}) \\ F(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F(X) & \xrightarrow{\boxtimes_{Y,X}^F} F(Y \times X) & \end{array}$$

sont commutatifs pour tout objet  $X, Y$  de  $\mathcal{X}$ .

Considérons la catégorie  $\text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  dont les objets sont les  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-monoïdaux symétriques et dont les morphismes sont les morphismes entre les  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules sous-jacents pour lesquels les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} F(X \times Y) & \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^G} G(X \times Y) & \end{array}$$

sont commutatifs pour tout objet  $X, Y$  de  $\mathcal{X}$ .

Le lemme suivant résume les propriétés classiques de la résolution de Godement relativement aux produits tensoriels

**Lemme 3.4.3.** Les foncteurs  $g_*$  et  $g^*$  induisent deux foncteurs adjoints

$$g_*^{\otimes} : \text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \quad g_*^* : \text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow \text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

En particulier, il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_\otimes$  de la catégorie  $\text{Mod}_\otimes(\mathcal{O}_X)$  rendant le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_\otimes(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \\ \downarrow \mathcal{G}_\otimes & & \downarrow \mathcal{G} \\ \text{Mod}_\otimes(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \text{Mod}(\mathcal{O}_X). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Dans la preuve qui suit nous noterons  $g_t^*$  le foncteur d'image inverse topologique ainsi que  $a_g$  le morphisme d'anneaux canonique de  $g_t^*\mathcal{O}_Y$  dans  $\mathcal{O}_X$  de sorte que pour un  $\mathcal{O}_Y$ -module  $F$  on a

$$g^*F = \mathcal{O}_X \otimes_{g_t^*\mathcal{O}_Y} g_t^*F.$$

Sachant que par définition le foncteur image inverse  $g_t^*$  commute aux limites projectives finies, lorsque l'on se donne un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-monoïdal symétrique  $(F, \boxtimes_{X,Y}^F)$ , on obtient des morphismes

$$\begin{array}{ccc} F(g_t^*X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(g_t^*Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{g_t^*X, g_t^*Y}^F} & F(g_t^*X \times g_t^*Y) \equiv F(g_t^*(X \times Y)) \\ \parallel & & \parallel \\ g_*F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g_*F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{g_*F}} & g_*F(X \times Y) \end{array}$$

pour tout objet  $X, Y$  de  $\mathcal{Y}$ . Ces derniers définissent une structure quasi-monoïdale symétrique sur le  $\mathcal{O}_Y$ -module  $g_*F$  et en posant

$$g_*^\otimes(F, \boxtimes_{X,Y}^F) = (g_*F, \boxtimes_{X,Y}^{g_*F})$$

on voit que l'on obtient un foncteur de la catégorie  $\text{Mod}_\otimes(\mathcal{O}_X)$  dans la catégorie  $\text{Mod}_\otimes(\mathcal{O}_Y)$ .

Supposons maintenant que  $(G, \boxtimes_{X,Y}^G)$  soit un  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-monoïdal symétrique. Étant donné un objet  $X$  de  $\mathcal{X}$  nous noterons,  $I(X)$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(U, u)$  formés d'un objet  $U$  de  $\mathcal{Y}$  et d'un morphisme

$$X \rightarrow g_t^*U$$

de  $\mathcal{X}$ . Les sections sur un objet  $X$  de  $\mathcal{X}$  de  $g_t^*G$  sont données par

$$g_t^*F(X) = \underset{A \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X}{\text{colim}} \underset{X' \in \mathcal{X}/A}{\lim} \underset{U \in I(X')}{\text{colim}} G(U)$$

Dans la formule ci-dessus, nous appelons isomorphisme local de préfaïceaux est un morphisme qui induit un isomorphisme sur les faisceaux associés. On obtient ainsi des morphismes canoniques de  $g_t^*\mathcal{O}_Y(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g_t^*\mathcal{O}_Y(Y)$ -modules

$$\begin{array}{ccc}
 g_t^* G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g_t^* G(Y) & \stackrel{\text{=====}}{=} & \left[ \begin{array}{ccc} \text{colim}_{A \in \text{PSh}(\mathcal{X})} & \lim_{X' \in \mathcal{X}/A} & \text{colim}_{U \in I(X')} G(U) \\ A \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X & & \end{array} \right] \\
 \downarrow \boxtimes_{X,Y}^{g_t^* G} & & \otimes_{\mathbb{Z}} \\
 & & \left[ \begin{array}{ccc} \text{colim}_{B \in \text{PSh}(\mathcal{X})} & \lim_{Y' \in \mathcal{X}/B} & \text{colim}_{V \in I(Y')} G(V) \\ B \xrightarrow{\text{iso.loc.}} Y & & \end{array} \right] \\
 & & \downarrow \text{can.} \\
 & & \begin{array}{ccc} \text{colim}_{A,B \in \text{PSh}(\mathcal{X})} & \lim_{\substack{X' \in \mathcal{X}/A \\ Y' \in \mathcal{X}/B}} & \text{colim}_{\substack{U \in I(X') \\ V \in I(Y')}} G(U) \otimes_{\mathbb{Z}} G(V) \\ A \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X & B \xrightarrow{\text{iso.loc.}} Y & \end{array} \quad (91) \\
 & & \downarrow \text{morphisme induit par } \boxtimes_{U,V}^G \\
 & & \begin{array}{ccc} \text{colim}_{A,B \in \text{PSh}(\mathcal{X})} & \lim_{\substack{X' \in \mathcal{X}/A \\ Y' \in \mathcal{X}/B}} & \text{colim}_{\substack{U \in I(X') \\ V \in I(Y')}} G(U \times V) \\ A \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X & B \xrightarrow{\text{iso.loc.}} Y & \end{array} \\
 & & \downarrow \text{can.} \\
 g_t^* G(X \times Y) & \stackrel{\text{=====}}{=} & \text{colim}_{C \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X \times Y} \lim_{Z \in \mathcal{X}/C} \text{colim}_{W \in I(Z)} G(W).
 \end{array}$$

Puisque le carré de morphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc}
 g_t^* \mathcal{O}_Y(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g_t^* \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{g_t^* \mathcal{O}_Y}} & g_t^* \mathcal{O}_Y(X \times Y) \\
 \downarrow a_{g,X} \otimes_{\mathbb{Z}} a_{g,Y} & & \downarrow a_{g,X \times Y} \\
 \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{O}_Y}} & \mathcal{O}_X(X \times Y)
 \end{array}$$

est commutatif, en tensorisant le morphisme obtenu via le diagramme (91), on obtient un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{c} \mathcal{O}_X(X) \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(X)} g_t^* G(X) \\ \otimes_{\mathbb{Z}} \\ \mathcal{O}_X(Y) \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(Y)} g_t^* G(Y) \end{array} \right] & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{g_t^* G}} & \mathcal{O}_X(X \times Y) \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(X \times Y)} g_t^* G(X \times Y).
 \end{array}$$

Finalement on obtient une structure de  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-monoïdal symétrique en considérant les morphismes

$$\begin{array}{ccc}
g^*G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g^*G(Y) & \xrightarrow{\text{can.}} & \text{colim}_{A,B \in \text{PSh}(X)} \lim_{\substack{X' \in X/A \\ Y' \in X/B}} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{O}_X(X') \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(X')} g_t^* G(X') \\ \otimes_{\mathbb{Z}} \\ \mathcal{O}_X(Y') \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(Y)} g_t^* G(Y') \end{array} \right] \\
\downarrow \boxtimes_{X,Y}^{g^*F} & & \downarrow \text{morphisme induit par } \boxtimes_{X',Y'}^{g_t^*G} \\
& & \text{colim}_{A,B \in \text{PSh}(X)} \lim_{\substack{X' \in X/A \\ Y' \in X/B}} \mathcal{O}_X(X' \times Y') \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(X' \times Y')} g_t^* G(X' \times Y') \\
& & \downarrow \text{can.} \\
g^*G(X \times Y) & \xlongequal{\quad} & \text{colim}_{C \in \text{PSh}(X)} \lim_{C \xrightarrow{\text{iso.loc.}} X \times Y} \mathcal{O}_X(Z) \otimes_{g_t^* \mathcal{O}_Y(Z)} g_t^* G(Z).
\end{array}$$

En posant

$$g_{\otimes}^*(G, \boxtimes_{X,Y}^G) = (g^*G, \boxtimes_{X,Y}^{g^*G})$$

on obtient un foncteur  $g_{\otimes}^*$  de  $\text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_Y)$  dans  $\text{Mod}_{\otimes}(\mathcal{O}_X)$ .

Pour voir que l'adjonction entre  $g_*$  et  $g^*$  induit une adjonction entre  $g_{\otimes}^*$  et  $g_{\otimes}^*$ , il suffit de remarquer que pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-monoïdal symétrique  $(F, \boxtimes_{X,Y}^F)$ , le carré

$$\begin{array}{ccc}
g^*g_*F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g^*g_*F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{g^*g_*F}} & g^*g_*F(X \times Y) \\
\downarrow \varepsilon_{F,X} \otimes_{\mathbb{Z}} \varepsilon_{F,Y} & & \downarrow \varepsilon_{F,X \times Y} \\
F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X \times Y)
\end{array}$$

est commutatif et que de même pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-monoïdal symétrique  $(G, \boxtimes_{X,Y}^G)$ , le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^G} & G(X \times Y) \\
\downarrow \eta_{G,X} \otimes_{\mathbb{Z}} \eta_{G,Y} & & \downarrow \eta_{G,X \times Y} \\
g_*g^*G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} g_*g^*G(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{g_*g^*G}} & g_*g^*G(X \times Y).
\end{array}$$

Ce qui prouve le lemme. □

En particulier le lemme 3.4.3 assure que la résolution de Godement cosimpliciale d'un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-monoïdal symétrique est canoniquement munie d'une structure de  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-monoïdal cosimplicial. Autrement dit on dispose de morphismes naturels de groupes abéliens cosimpliciaux

$$\boxtimes_{X,Y}^{g^*F} : \mathcal{G}^*F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}^*F(Y) \longrightarrow \mathcal{G}^*F(X \times Y)$$



satisfaisant associativité et symétrie. De plus le lemme 3.4.3 assure que la coaugmentation est compatible avec ces morphismes.

**3.4.2. Résolution de Godement Nisnevich et transferts.** — Nous allons maintenant appliquer les résultats concernant la localisation Nisnevich des correspondances finies que nous avons obtenus au chapitre 2. Nous reprenons les notations de la sous-section 2.2.

Nous allons dans un premier temps préciser la résolution de Godement que nous considérons pour les faisceaux Nisnevich et décrire explicitement la monade dont elle provient — remarque 3.4.5. Pour cela nous notons  $\mathcal{E}$  le topos ponctuel dont la catégorie sous-jacente est celle des ensembles.

*Notation 3.4.4.* Soit  $X$  un  $S$ -schéma. Nous désignons par  $X_{\text{nis}}$  le petit topos Nisnevich de  $X$ . Il s'agit par définition de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur la catégorie  $\text{Et}/X$  des  $X$ -schémas étales munie de la topologie de Nisnevich.

Pour tout point  $x$  d'un  $S$ -schéma  $X$ , le foncteur qui à un faisceau Nisnevich  $F$  associe sa fibre en  $x$

$$F_x = \text{colim}_{U \in (\mathcal{V}_x^h)^{\text{op}}} F(U)$$

est un foncteur fibre du petit topos Nisnevich de  $X$ . La famille de tous ces foncteurs fibres est conservative et nous définit donc un morphisme de topos annelé par  $\mathbb{Z}$

$$\prod_{x \in X} \mathcal{E} \rightarrow X_{\text{nis}}$$

Nous noterons dans la suite  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X$  la monade de la catégorie des petits faisceaux Nisnevich en groupes abéliens sur  $X$  associée à ce morphisme de topos et

$$\eta_F^X : F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F \quad \mu_F^X : \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F$$

les morphismes structuraux.

*Remarque 3.4.5.* Soit  $F$  un faisceau Nisnevich sur  $S$ . Ce dernier nous donne un petit faisceau Nisnevich sur chaque  $S$ -schéma  $X$ . Pour un point  $x \in X$ , on peut identifier de manière canonique la fibre de  $F$  au point  $x$  avec les sections de  $F$  sur le schéma local hensélien  $X_x^h$

$$F_x = F(X_x^h)$$

ce qui nous donne un isomorphisme

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F(X) = \prod_{x \in X} F(X_x^h).$$

Pour une section  $s$  de  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F$  sur  $X$ , on note  $s_x$  sa composante suivant le point  $x$ . Le morphisme structural  $\eta_F^X$  est donné pour un élément  $s$  de  $F(X)$  par

$$\left[ \eta_F(s) \right]_x = F(\iota_{X,x}^h)(s)$$

Les sections sur  $X$  du faisceau  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F$  s'identifient aux produits

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F(X) = \prod_{x \in X} \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F(X_x^{\flat}) = \prod_{x \in X} \prod_{z \in X_x^{\flat}} F\left(\left(X_x^{\flat}\right)_z^{\flat}\right)$$

et le morphisme structural  $\mu_F^X$  coïncide avec la projection sur les composantes associées aux points fermés des  $X_x^{\flat}$ .

Supposons que  $F$  soit un faisceau Nisnevich en groupes abéliens sur  $S$ . On voit qu'en associant à un  $S$ -schéma  $X$  le groupe abélien

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(X) = \mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F(X),$$

on obtient un préfaisceau  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F$  sur  $S$  dont les morphismes structuraux sont donnés par les égalités

$$\left[ \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(g)(s) \right]_x = F\left(g_x^{\flat}\right)(s_{g(x)})$$

où  $x$  est un point de  $X$ ,  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas et  $s$  un élément de  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(Y)$ . La restriction de  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F$  au petit site Nisnevich de  $X$  coïncide avec le faisceau  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X F$ , ce qui assure que  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F$  est un faisceau Nisnevich.

**Proposition 3.4.6.** *Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)$  rendant le carré suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}} \\ \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Nis}}^{\mathbb{Z}}(S). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que pour un faisceau Nisnevich avec transferts  $F$ , le faisceau Nisnevich  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F$  est canoniquement muni de transferts et que les morphismes

$$\eta_F : F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}} F \quad \mu_F : \mathcal{G}_{\text{Nis}} \mathcal{G}_{\text{Nis}} F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}} F$$

sont des morphismes de faisceaux Nisnevich avec transferts. Étant donnée une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$ , on peut associer à une section  $s$  de  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(Y)$  la section de  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(X)$  donnée par

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\alpha)(s)_x = \sum_{y \in Y} F(\alpha_{x,y})(s_y).$$

On obtient ainsi un morphisme de groupes abéliens  $\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\alpha)$ . Lorsque l'on se donne une correspondance finie  $\beta \in c_S(Y, Z)$ , la formule de composition (59) du lemme 2.2.11 nous assure que pour un point  $x$  de  $X$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\beta \circ \alpha)(s)_x &= \sum_{z \in Z} F((\beta \circ \alpha)_{x,z})(s_z) = \sum_{z \in Z} \sum_{y \in Y} F(\beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y})(s_z) \\ &= \sum_{z \in Z} \sum_{y \in Y} F(\alpha_{x,y}) \left[ F(\beta_{y,z})(s_z) \right] = \sum_{y \in Y} F(\alpha_{x,y}) \left[ \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\beta)(s)_y \right] \\ &= \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\alpha) \left[ \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\beta)(s) \right]_x \end{aligned}$$

et donc que cette définition est fonctorielle :

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\beta \circ \alpha) = \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\alpha) \circ \mathcal{G}_{\text{Nis}} F(\beta).$$

Par ailleurs pour un morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas, la seconde assertion du lemme 2.2.11 nous donne

$$\mathcal{G}_{\text{Nis}}F([g])(s)_x = F([g_x])(s_{g(x)}) = F(g_x)(s_{g(x)}) = \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(g)(s)_x.$$

Les morphismes  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)$  étendent donc la structure usuelle de préfaisceau en une structure de préfaisceau avec transferts. La construction des correspondances locales utilisées assure que

$$\begin{aligned} F(\alpha)(s)_x &= F(\alpha \circ [t_{X,x}^h])(s) = \sum_y F([t_{Y,y}^h] \circ \alpha_{x,y})(s) = \sum_y F(\alpha_{x,y})(s_y) \\ &= \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)(\eta_F(s))_x \end{aligned}$$

autrement dit que  $\eta_F$  est un morphisme de faisceaux avec transferts. Il reste à montrer que  $\mu_F$  est aussi un morphisme de faisceaux Nisnevich avec transferts. Pour une section  $s$  appartenant à  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}\mathcal{G}_{\text{Nis}}F(X)$  on obtient en utilisant la troisième assertion du lemme 2.2.11

$$\begin{aligned} \mu_F(\mathcal{G}_{\text{Nis}}\mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)(s))_x &= \sum_{y \in Y} \left[ \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha_{x,y})(s_y) \right]_x = \sum_{y \in Y} \sum_{z \in Y_y^h} F((\alpha_{x,y})_{x,z})(s_{y,z}) \\ &= \sum_{y \in Y} F(\alpha_{x,y})(s_{y,y}) = \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)(\mu_F(s)). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Le lemme 3.4.6 assure en particulier que la résolution cosimpliciale de Godement  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^*F$  d'un faisceau Nisnevich avec transferts est canoniquement munie de transferts et qu'à fortiori le complexe  $G_{\text{Nis}}^*F$  est un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts quasi-isomorphe à  $F$  dans la catégorie des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts. Cela entraîne en particulier que les préfaisceaux de cohomologie Nisnevich

$$X \mapsto H_{\text{Nis}}^j(X, F)$$

d'un faisceau Nisnevich avec transferts sont canoniquement munis de transferts. Nous renvoyons au lemme 3.3.2 pour une autre manière d'obtenir ce résultat.

Nous allons maintenant voir que les transferts « naturels » précédemment construits sur la résolution de Godement sont en outre compatibles avec la structure tensorielle de cette dernière.

*Remarque 3.4.7.* Étant donné un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique  $(F, \boxtimes_{X,Y}^F)$  le lemme 3.4.3 assure que  $\mathcal{G}_{\text{Nis}}F$  est canoniquement un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique autrement dit muni d'une famille de morphismes de groupes abéliens

$$\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} : \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(X) \otimes \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(X \times_S Y)$$

compatibles aux isomorphismes d'associativité et de symétrie. Ce morphisme est en fait donné par les relations

$$\left[ \boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} (s \otimes t) \right]_e = F(\mathbf{m}_{X,Y,e}^h) \left[ \boxtimes_{X_x^h, Y_y^h}^F (s_x \otimes t_y) \right]$$

où  $s \in \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(X)$ ,  $t \in \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(Y)$  et  $e$  désigne un point du produit  $X \times_S Y$  de projection  $x$  et  $y$ .

Notons  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$  la catégorie dont les objets sont les faisceaux Nisnevich avec transferts munis en tant que faisceaux Nisnevich d'une structure quasi-monoïdale symétrique rendant les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X') \otimes F(Y') & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X' \times_S Y') \\ \downarrow F(\alpha) \otimes F(\beta) & & \downarrow F(\alpha \otimes \beta) \\ F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X \times_S Y) \end{array}$$

commutatifs pour toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  et dont les morphismes sont les morphismes de faisceaux Nisnevich avec transferts compatibles à la structure quasi-monoïdale autrement dit rendant les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X \times_S Y) \\ \downarrow u_X \otimes u_Y & & \downarrow u_{X \times_S Y} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^G} & G(X \times_S Y) \end{array}$$

pour tout  $S$ -schéma  $X, Y$ . Nous appellerons un objet de cette catégorie un faisceau Nisnevich avec transferts quasi-monoïdal symétrique. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant.

**Proposition 3.4.8.** *Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}}$  de la catégorie  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$  rendant les carrés suivants commutatifs*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S) & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Nis},\otimes} \\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S) & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que  $(F, \boxtimes_{X,Y}^F)$  soit un faisceau Nisnevich avec transferts quasi-monoïdal symétrique. En utilisant les lemmes 3.4.3 et 3.4.6, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X') \otimes \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(Y') & \xrightarrow{\boxtimes_{X',Y'}^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F}} & \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X' \times_S Y') \\ \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(\alpha) \otimes \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(\beta) & & \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(\alpha \otimes \beta) \\ \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X) \otimes \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F}} & \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X \times_S Y) \end{array} \quad (92)$$

est commutatif pour toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$ . Notons  $E$  le produit  $X \times_S Y$  et  $E'$  le produit  $X' \times_S Y'$ . Considérons un point  $e$  de  $E$  de projection  $x$  et  $y$

ainsi que des sections  $s \in \mathcal{G}_{\text{Nis}}(X'), t \in \mathcal{G}_{\text{Nis}}(Y')$ . En utilisant la remarque 3.4.7 nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha \otimes \beta) \left[ \boxtimes_{X',Y'}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} (s \otimes t) \right]_e &= \sum_{e' \in E'} F((\alpha \otimes \beta)_{e,e'}) \left[ \boxtimes_{X',Y'}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} (s \otimes t) \right]_{e'} \\ &= \sum_{e' \in E'} F((\alpha \otimes \beta)_{e,e'}) F(\mathbf{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}}) \left[ \boxtimes_{(X')_{x'},(Y')_{y'}}^F (s_{x'} \otimes t_{y'}) \right] \\ &= \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} F \left( \sum_{e' \in E'_{x'y'}} [\mathbf{m}_{X',Y',e'}^{\mathfrak{h}}] \circ (\alpha \otimes \beta)_{e,e'} \right) \left[ \boxtimes_{(X')_{x'},(Y')_{y'}}^F (s_{x'} \otimes t_{y'}) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2.12, cette dernière égalité peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha \otimes \beta) \left[ \boxtimes_{X',Y'}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} (s \otimes t) \right]_e &= \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} F \left( (\alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'}) \circ [\mathbf{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}] \right) \left[ \boxtimes_{(X')_{x'},(Y')_{y'}}^F (s_{x'} \otimes t_{y'}) \right] \\ &= \sum_{\substack{x' \in X' \\ y' \in Y'}} F(\mathbf{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}) \left[ \boxtimes_{X_x,Y_y}^F (F(\alpha_{x,x'})(s_{x'}) \otimes F(\beta_{y,y'})(t_{y'})) \right] \\ &= F(\mathbf{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}) \left[ \boxtimes_{X_x,Y_y}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} (\mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)(s)_x \otimes \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\beta)(t)_y) \right] \\ &= \boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\text{Nis}}F} \left[ \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\alpha)(s) \otimes \mathcal{G}_{\text{Nis}}F(\beta)(t) \right]_e. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la commutativité du carré (92).  $\square$

Le lemme 3.4.3 assure que la cohomologie d'un faisceau Nisnevich quasi-monoïdal symétrique est munie d'un produit associatif et commutatif

$$H^p(X, F) \otimes H^q(Y, F) \xrightarrow{\otimes_{X,Y}^F} H^{p+q}(X \times_S Y, F) \quad (93)$$

induit par la structure quasi-monoïdale symétrique sur la résolution de Godement. Ce produit est commutatif au sens gradué, autrement dit tel que

$$a \otimes_{X,Y}^F b = (-1)^{p+q} b \otimes_{Y,X}^F a$$

pour un élément  $a$  de  $H^p(X, F)$  et un élément  $b$  de  $H^q(X, F)$  et compatible au produit induit par  $F$  sur le  $H^0$ . En particulier on dispose d'un cup-produit associatif et commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\smile_X^F}{\curvearrowright} & \\ H^p(X, F) \otimes H^q(X, F) & \xrightarrow{\otimes_{X,X}^F} & H^{p+q}(X \times_S X, F) \xrightarrow{\Delta_X^*} H^{p+q}(X, F) \end{array} \quad (94)$$

munissant  $H^*(X, F)$  d'une structure d'algèbre graduée commutative.

Lorsque  $F$  est en outre un faisceau Nisnevich avec transferts quasi-monoïdal symétrique, le lemme 3.4.8 assure que les produits (93) sont compatibles aux transferts *i.e.* que les carrés

$$\begin{array}{ccc} H^p(X', F) \otimes H^q(Y', F) & \xrightarrow{\otimes_{X', Y'}^F} & H^{p+q}(X' \times_S Y', F) \\ \downarrow H^p(\alpha, F) \otimes H^q(\beta, F) & & \downarrow H^{p+q}(\alpha \otimes \beta, F) \\ H^p(X, F) \otimes H^q(Y, F) & \xrightarrow{\otimes_{X, Y}^F} & H^{p+q}(X \times_S Y, F) \end{array}$$

sont commutatifs pour toute correspondance  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$ .

*Remarque 3.4.9.* Pour une correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, Y)$  les carrés

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y, F) \otimes H^q(Y, F) & \xrightarrow{\smile_Y^F} & H^{p+q}(Y, F) \\ \downarrow H^p(\alpha, F) \otimes H^q(\alpha, F) & & \downarrow H^{p+q}(\alpha, F) \\ H^p(X, F) \otimes H^q(X, F) & \xrightarrow{\smile_X^F} & H^{p+q}(X, F) \end{array}$$

ne sont pas nécessairement commutatifs — nous renvoyons d'ailleurs à la remarque 2.1.4 à ce propos. Les cup-produits (94) ne sont donc pas à priori compatibles aux transferts.

**3.4.3. Résolution de Godement étale et transferts.** — Nous nous contentons dans cette sous-section d'énoncer les résultats dans le cas de la topologie étale : les démonstrations étant identiques à celles données pour la topologie de Nisnevich. Nous reprenons les notations adoptées dans la sous-section 2.3.

La résolution de Godement que nous utilisons dans le cadre étale est obtenue à partir de la famille conservative de points introduite à la remarque 2.3.1. Nous avons vu que pour un bon point géométrique  $\bar{x}$  d'un  $S$ -schéma  $X$ , le foncteur qui à un faisceau étale  $F$  associe sa fibre au point  $\bar{x}$

$$F_{\bar{x}} := \operatorname{colim}_{U \in (\mathcal{V}_{\bar{x}}^{sh})^{\text{op}}} F(U)$$

est un foncteur fibre du petit topos étale  $X_{\text{et}}$  — dans ce qui précède  $\mathcal{V}_{\bar{x}}^{sh}$  désigne la catégorie des voisinages étales de  $\bar{x}$ . La famille de ces foncteurs fibres est conservative d'après la remarque 2.3.1 et définit donc un morphisme de topos annelé par  $\mathbb{Z}$

$$\coprod_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X}} \mathcal{E} \rightarrow X_{\text{et}}.$$

Nous noterons dans la suite  $\mathcal{G}_{\text{Et}}^X$  la monade de la catégorie des petits faisceaux étales de groupes abéliens sur  $X$  associée à ce morphisme de topos et

$$\eta_F^X : F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F \quad \mu_F^X : \mathcal{G}_{\text{Et}}^X \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F \rightarrow \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F$$

les morphismes structuraux.

La remarque suivante donne une description explicite de la monade dont provient la résolution de Godement que nous considérons dans le cadre étale.

*Remarque 3.4.10.* Soit  $F$  un faisceau étale sur  $S$ . Ce dernier nous donne un petit faisceau étale sur chaque  $S$ -schéma  $X$ . Pour un point bon point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , on peut identifier de manière canonique la fibre de  $F$  au point  $\bar{x}$  avec les sections de  $F$  sur le schéma local strictement hensélien  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$

$$F_{\bar{x}} = F(X_{\bar{x}}^{\text{sh}})$$

ce qui nous donne un isomorphisme

$$\mathcal{G}_{\text{Et}}^X F(X) = \prod_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X}} F(X_{\bar{x}}^{\text{sh}}).$$

Pour une section  $s$  de  $\mathcal{G}_{\text{Et}} F$  sur  $X$ , on note  $s_{\bar{x}}$  sa composante suivant le bon point géométrique  $\bar{x}$ . Le morphisme structural  $\eta_F^X$  est donné pour un élément  $s$  de  $F(X)$  par

$$\left[ \eta_F(s) \right]_{\bar{x}} = F(\iota_{X, \bar{x}}^{\text{sh}})(s).$$

Les sections sur  $X$  du faisceau  $\mathcal{G}_{\text{Et}}^X \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F$  s'identifient aux produits

$$\mathcal{G}_{\text{Et}}^X \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F(X) = \prod_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X}} \mathcal{G}_{\text{Et}}^X F(X_{\bar{x}}^{\text{sh}}) = \prod_{\substack{\bar{x} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X}} \prod_{\substack{\bar{z} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } X_{\bar{x}}^{\text{sh}}}} F\left(\left(X_{\bar{x}}^{\text{sh}}\right)_{\bar{z}}^{\text{sh}}\right)$$

et le morphisme structural  $\mu_F^X$  coïncide avec la projection sur les composantes associées aux points fermés des  $X_{\bar{x}}^{\text{sh}}$ .

Supposons que  $F$  soit un faisceau étale en groupes abéliens sur  $S$ . On voit qu'en associant à un  $S$ -schéma  $X$  le groupe abélien

$$\mathcal{G}_{\text{Et}} F(X) = \mathcal{G}_{\text{Et}}^X(X)$$

on obtient un préfaisceau  $\mathcal{G}_{\text{Et}} F$  sur  $S$  dont les morphismes structuraux sont donnés par les égalités

$$\left[ \mathcal{G}_{\text{Et}} F(g)(s) \right]_{\bar{x}} = F\left(g_{\bar{x}}^{\text{sh}}\right)(s_{g \circ \bar{x}})$$

où  $\bar{x}$  est un bon point géométrique de  $X$ ,  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas et  $s$  un élément de  $\mathcal{G}_{\text{Et}} F(Y)$ . La restriction de  $\mathcal{G}_{\text{Et}} F$  au petit site étale de  $X$  coïncide avec le faisceau  $\mathcal{G}_{\text{Et}}^X F$ , ce qui assure que  $\mathcal{G}_{\text{Et}} F$  est un faisceau étale. En utilisant cette fois les résultats du paragraphe 2.3 on obtient le lemme suivant.

**Proposition 3.4.11.** *Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\text{Et}}^{\text{tr}}$  de la catégorie  $\text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S)$  rendant le carré suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Et}}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\text{Et}}^{\text{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\text{Et}} \\ \text{Sh}_{\text{Et}}^{\text{tr}}(S) & \longrightarrow & \text{Sh}_{\text{Et}}^{\mathbb{Z}}(S). \end{array}$$

Notons  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$  la catégorie dont les objets sont les faisceaux étales avec transferts munis en tant que faisceaux étales d'une structure quasi-monoïdale symétrique rendant les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X') \otimes F(Y') & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X' \times_S Y') \\ \downarrow F(\alpha) \otimes F(\beta) & & \downarrow F(\alpha \otimes \beta) \\ F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X \times_S Y) \end{array}$$

commutatifs pour toute correspondance finie  $\alpha \in c_S(X, X')$  et  $\beta \in c_S(Y, Y')$  et dont les morphismes sont les morphismes de faisceaux étales avec transferts compatibles à la structure quasi-monoïdale autrement dit rendant les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^F} & F(X \times_S Y) \\ \downarrow u_X \otimes u_Y & & \downarrow u_{X \times_S Y} \\ G(X) \otimes G(Y) & \xrightarrow{\boxtimes_{X,Y}^G} & G(X \times_S Y) \end{array}$$

pour tout  $S$ -schéma  $X, Y$ . Nous appellerons un objet de cette catégorie un faisceau étale avec transferts quasi-monoïdal symétrique. Les résultats du paragraphe 2.3 nous donnent de même le lemme suivant.

**Proposition 3.4.12.** *Il existe une monade canonique  $\mathcal{G}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}}$  de la catégorie  $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$  rendant les carrés suivants commutatifs*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}^{\mathrm{tr}}(S) & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S) \\ \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}^{\mathrm{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}} & & \downarrow \mathcal{G}_{\mathrm{Et},\otimes} \\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}^{\mathrm{tr}}(S) & \longleftarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Et},\otimes}^{\mathrm{tr}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis},\otimes}^{\mathbb{Z}}(S). \end{array}$$



## CHAPITRE 4

### MOTIFS MIXTES DE VOEVODSKY

Avec ce chapitre, nous tenons dans un premier temps à préciser les définitions des catégories de motifs que nous utilisons. En effet dans le texte de référence [133], le schéma de base considéré est un corps et pour les besoins de la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato, les constructions sont étendues à des schémas simpliciaux lisses sur un corps dans [137]. Notre approche nous permettant notamment d’obtenir des foncteurs de réalisations  $\ell$ -adiques pour les motifs mixtes géométriques sur des schémas noethériens séparés, il nous a paru nécessaire, faute d’une définition explicite dans la littérature, de mettre en évidence les définitions des motifs que nous considérons. Bien entendu, la plupart des résultats de [133] sont valables plus généralement sur une base quelconque, bien qu’il y ait parfois lieu de faire certaines modifications mineures <sup>(1)</sup>.

D’autre part nous étendons aux catégories de motifs mixtes géométriques les propriétés démontrées dans le chapitre 2 pour la catégorie des schémas lisses de type fini munis des correspondances finies. On obtient ainsi un résultat — proposition 4.1.29 — donnant le comportement des catégories de motifs mixtes géométriques par rapport à certaines limites projectives de schémas.

Nous consacrons le reste de ce chapitre — le schéma de base étant alors le spectre d’un corps parfait — à donner une « description naïve » de l’isomorphisme entre les groupes de Chow supérieurs de Bloch et la cohomologie motivique construit par V. Voevodsky dans [136]. Pour cela nous avons développé les propriétés des morphismes de Gysin pour les motifs mixtes de Voevodsky suivant en cela les constructions faites par M. Levine pour les motifs mixtes qu’il a introduits dans [98]. Ces résultats ont été obtenus indépendamment par F. Déglise [33]. Ces constructions nous permettent, dans la section 4.5, de donner une construction naïve d’un morphisme classe de cycle en cohomologie motivique dont nous étudions les propriétés. Nous montrons — sous-section 4.5.3 — que ce morphisme coïncide avec l’isomorphisme de V. Voevodsky. Cette description naïve nous sera utile pour vérifier la proposition 5.4.8.

---

<sup>(1)</sup>Comme me l’a fait remarquer Fabien Morel cette formulation pourrait laisser à penser aux lecteurs connaissant l’article [133] que la théorie des faisceaux invariants par homotopie est la même que sur un corps ce qui n’est pas le cas et pose des problèmes non triviaux tout à fait intéressants. Il est effectivement préférable de préciser que les résultats de *loc.cit.* dont nous avons besoin dans ce travail sont valables plus généralement au prix de quelques modifications mineures et que les problèmes mentionnés par Fabien Morel n’interviennent pas dans cette thèse.

### 4.1. Catégories de motifs mixtes

Il est possible de donner une description relativement « simple et compacte » de la catégorie des motifs mixtes géométriques de Voevodsky. En revanche cette dernière s'avère inadéquate pour le calcul de la cohomologie motivique pour laquelle une approche de nature plus faisceautique est requise. Nous rappelons maintenant ces deux approches.

Tous les préfaisceaux avec transferts apparaissant dans ce chapitre sont définis sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini.

**4.1.1. Point de vue faisceautique.** — La catégorie des motifs mixtes effectifs est obtenue par une localisation de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts par rapport à une sous-catégorie triangulée épaisse trivialisant la droite affine. Cette catégorie est fournie par le lemme suivant.

**Lemme 4.1.1.** *Les sous-catégories épaisses de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$  stables par sommes directes engendrées respectivement par :*

1. *les objets  $E$  pour lesquels il existe un objet  $F$  de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$  et un triangle distingué*

$$F \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \longrightarrow F \longrightarrow E \xrightarrow{+1}$$

*le premier morphisme étant induit par la projection canonique.*

2. *les objets  $E$  pour lesquels il existe un  $S$ -schéma lisse  $X$  et un triangle distingué*

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] \longrightarrow E \xrightarrow{+1}$$

*le premier morphisme étant induit par la projection canonique.*

*coïncident.*

**DÉMONSTRATION.** — Ce résultat découle formellement du fait que les faisceaux Nisnevich avec transferts  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]$  où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini engendrent la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts.  $\square$

Convenons de noter  $E_{\mathbb{A}^1}$  la sous-catégorie épaisse de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts du lemme 4.1.1. Dans la suite les objets de cette dernière seront appelés  $\mathbb{A}^1$ -nuls. Nous adoptons alors la

**Définition 4.1.2.** La catégorie des motifs mixtes effectifs est le quotient

$$DM^{\mathrm{eff}}(S) = D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))/E_{\mathbb{A}^1}$$

de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts par la sous-catégorie épaisse des objets  $\mathbb{A}^1$ -nuls.

**Remarque 4.1.3.** La catégorie des motifs mixtes effectifs  $DM^{\mathrm{eff}}(S)$  est pseudo-abélienne. En effet cela résulte de la proposition 3.2 de [20] puisque les sommes directes quelconques sont représentables.

En se restreignant dans la définition précédente aux complexes supérieurement bornés on obtient la sous-catégorie  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)$  des motifs effectifs « supérieurement bornés ». Cette catégorie est aussi pseudo-abélienne bien que les sommes directes quelconques n’y soient pas représentables.

Soit  $X$  un  $S$ -schéma lisse de type fini. Par définition on appelle motif effectif associé à  $X$  l’image  $M(X)$  du faisceau Nisnevich avec transferts  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)$ . On obtient ainsi le « foncteur motif » sur la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini

$$M : \text{Sm}_S \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}(S)$$

Nous noterons souvent  $g_*$  l’image d’un morphisme de schéma  $g$  par le foncteur  $M$ . On remarquera que ce foncteur est covariant, alors que dans [98] le motif associé par M. Levine à un  $S$ -schéma lisse de type fini est de nature cohomologique donc contravariant. Plus généralement si  $i : U \hookrightarrow X$  est une immersion, on peut définir le motif  $M(X/U)$  comme l’image dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$  du conoyau du morphisme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  induit par  $i$ .

Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. Si  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $X$  on définit le motif relatif associé à la paire fermée  $(X, Z)$  par

$$M_Z(X) = M(X/X \setminus Z).$$

Il résulte de la définition que ce motif ne dépend que de la structure réduite de  $Z$  et que l’on a un triangle distingué dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)$

$$M(X \setminus Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M_Z(X) \xrightarrow{+1} .$$

Il est en outre fonctoriel par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées.

**Définition 4.1.4.** On appelle motif de Tate l’image  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)$  du complexe de faisceau Nisnevich avec transferts  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}][-2]$ . Nous notons ce motif  $\mathbb{Z}(1)$ .

Les motifs de Voevodsky étant covariants, ce motif de Tate correspond en fait au motif de Lefschetz des conventions cohomologiques.

**Lemme 4.1.5.** On a des isomorphismes dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)$

$$\mathbb{Z}(1) = M(\mathbb{P}_S^1/\{1\})[-2] = M(\mathbb{G}_m/\{1\})[-1].$$

DÉMONSTRATION. — Le carré cartésien excisif

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{A}_S^1 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_S^1 \end{array}$$

donne un isomorphisme  $\mathbb{Z}(1)[2] = M(\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}) = M(\mathbb{P}_S^1/\{0\}) = M(\mathbb{P}^1/\{1\})$ . Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\})[-1] & \longrightarrow & M(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & M(\mathbb{A}_S^1) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow \phi & & \parallel & & \downarrow \\ \xleftarrow{+1} M(\mathbb{G}_m/\{1\}) & \longleftarrow & M(\mathbb{G}_m) & \longleftarrow & M(\{1\}). \end{array}$$

Ce dernier nous donne la partie inférieure d'un octaèdre

$$\begin{array}{ccccc}
 M(\mathbb{A}_S^1 / \setminus \{0\})[-1] & \xrightarrow{\phi} & M(\mathbb{G}_m/1) & & \\
 \downarrow +1 & \searrow & \text{commutatif} & \nearrow & \\
 & & M(\mathbb{G}_m) & & \\
 \text{distingué} & & & & \text{distingué} \\
 & \swarrow & \text{commutatif} & \searrow & \\
 M(\mathbb{A}^1) & \xleftarrow{\quad} & M(\{1\}) & \xrightarrow{\quad} & \\
 & & \uparrow +1 & & 
 \end{array}$$

et l'axiome de l'octaèdre assure l'existence de la partie supérieure

$$\begin{array}{ccccc}
 M(\mathbb{A}_S^1 / \setminus \{0\})[-1] & \xrightarrow{\phi} & M(\mathbb{G}_m/1) & & \\
 \downarrow +1 & \swarrow & \text{distingué} & \nearrow & \\
 & & C & & \\
 \text{commutatif} & & & & \text{commutatif} \\
 & \swarrow & \text{distingué} & \searrow & \\
 M(\mathbb{A}^1) & \xleftarrow{\quad} & M(\{1\}) & \xrightarrow{\quad} & \\
 & & \uparrow +1 & & 
 \end{array}$$

Il résulte de l'invariance par homotopie que  $C = 0$  ce qui prouve que  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

D'après le résultat de compacité du lemme 3.3.4, la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts est engendrée par ses objets compacts. La proposition 9.1.19 et le théorème 8.3.3 de [109] nous assure donc l'existence d'un foncteur de localisation de Bousfield :

**Lemme 4.1.6.** *Le foncteur de localisation*

$$D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S)$$

admet un adjoint à droite.

Rappelons que dans les catégories triangulées la localisation à la Bousfield consiste — étant donnée une sous-catégorie épaisse  $\mathcal{E}$  d'une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  — à montrer l'existence d'un adjoint à droite du foncteur  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{E}$ . Cela revient à isoler une sous-catégorie pleine  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{T}$  pour laquelle le foncteur triangulé composé de l'inclusion et du foncteur de  $\mathcal{T}$  dans le quotient de Verdier  $\mathcal{T}/\mathcal{E}$  est une équivalence. Le seul candidat naturel est la sous-catégorie triangulée des objets  $\mathcal{E}$ -locaux — on remarquera en effet que les objets d'une telle catégorie  $\mathcal{L}$  sont nécessairement  $\mathcal{E}$ -locaux.

Convenons de noter pour une sous-catégorie épaisse  $\mathcal{E}$  d'une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  par  $W_{\mathcal{E}}$  l'ensemble des  $\mathcal{E}$ -équivalences faibles, autrement dit des morphismes  $u : T' \rightarrow T$  de  $\mathcal{T}$  pour lesquels il existe un triangle distingué

$$T' \xrightarrow{u} T \rightarrow T'' \rightarrow T'[1]$$

tel que  $T''$  appartienne à  $\mathcal{E}$ . Rappelons qu'un objet  $T$  de  $\mathcal{T}$  est dit  $\mathcal{E}$ -local lorsqu'il possède les deux propriétés équivalentes suivantes.

1. La restriction du foncteur  $\mathcal{T}(-, T)$  à  $\mathcal{E}$  est nulle.

2. Pour tout morphisme  $w \in W_{\mathcal{E}}$  le morphisme  $\mathcal{T}(w, T)$  est un isomorphisme (autrement dit  $T$  voit les morphismes de  $W_{\mathcal{E}}$  comme des isomorphismes).

On sait d'après le lemme 9.1.5 de [109] que le foncteur la restriction du foncteur de localisation  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{E}$  à la sous-catégorie pleine des objets  $\mathcal{E}$ -locaux est pleinement fidèle. En outre le théorème 9.1.13 de *loc.cit.* nous assure que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe un foncteur de localisation à la Bousfield pour la paire  $(\mathcal{T}, \mathcal{E})$  ce qui signifie l'existence d'un adjoint à droite du foncteur canonique  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{E}$ .
2. La restriction du foncteur de localisation  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{E}$  à la sous-catégorie triangulée des objets  $\mathcal{E}$ -locaux est pleinement fidèle (donc une équivalence).

La localisation à la Bousfield existe donc lorsque l'on a « suffisamment d'objets  $\mathcal{E}$ -locaux pour décrire le quotient de Verdier de  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{E}$ .

Un objet  $F$  de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts est alors dit  $\mathbb{A}^1$ -local lorsqu'il est  $E_{\mathbb{A}^1}$ -local. Dans la suite nous noterons

$$D_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$$

la sous-catégorie triangulée formée des objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux. Le lemme 4.1.6 assure l'existence de suffisamment d'objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. En fait on peut aisément donner une construction explicite d'un foncteur de localisation à la Bousfield pour la  $\mathbb{A}^1$ -localisation. Nous allons maintenant donner la caractérisation usuelle des complexes  $\mathbb{A}^1$ -locaux — proposition 4.1.12. Auparavant nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Pour un  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$ , nous notons  $s_0$  et  $s_1$  respectivement les sections nulle et unité du fibré en droites  $\mathbb{A}_X^1$ .

**Lemme 4.1.7.** *Pour qu'un préfaisceau avec transferts  $F$  soit invariant par homotopie il faut et il suffit que pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  le morphisme*

$$s_0^* - s_1^* : F(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow F(X)$$

*soit nul, autrement dit que le morphisme de préfaisceaux avec transferts*

$$s_0^* - s_1^* : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}_S^1, F) \rightarrow F$$

*soit nul.*

DÉMONSTRATION. — La condition est évidemment nécessaire. En effet en notant  $p$  la projection de  $\mathbb{A}_X^1$  sur  $X$ , l'hypothèse que  $p^*$  est un isomorphisme entraîne que les morphismes  $s_0^*$  et  $s_1^*$  coïncident avec l'isomorphisme réciproque, ce qui assure leur égalité. Elle est aussi suffisante. Pour cela il suffit de vérifier que sous cette condition on a  $p^* \circ s_0^* = \mathrm{id}$ . Notons  $\mu : \mathbb{A}_S^1 \times_S \mathbb{A}_S^1 \rightarrow \mathbb{A}_S^1$  la multiplication du  $S$ -schéma en anneaux  $\mathbb{A}_S^1$  ainsi que

$$\sigma_0 : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \times_S \mathbb{A}_X^1 \quad \sigma_1 : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow \mathbb{A}_S^1 \times_S \mathbb{A}_X^1$$

les sections nulle et unité. Il suffit alors de voir que

$$\begin{aligned} (\mu \times_S \mathrm{id}_X) \circ \sigma_0 &= s_0 \circ p \\ (\mu \times_S \mathrm{id}_X) \circ \sigma_1 &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

pour conclure. □

*Notation 4.1.8.* Soit  $X$  un  $S$ -schéma lisse de type fini. Dans cette sous-section, nous désignerons par  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X]$  le cône du morphisme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_X^1]$  induit par la section nulle  $s_0$  du fibré en droites  $\mathbb{A}_X^1$ . Sachant que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1 \times_S \mathbb{A}_S^1] \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mu]} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[s_0] \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[s_0] \uparrow & & \uparrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[s_0] \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] \xlongequal{\quad} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] \end{array}$$

est commutatif, la multiplication  $\mu : \mathbb{A}_S^1 \times_S \mathbb{A}_S^1 \rightarrow \mathbb{A}_S^1$  du schéma en anneaux  $\mathbb{A}_S^1$  induit une multiplication naturelle

$$\mu : \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S].$$

À un faisceau Nisnevich avec transferts  $F$ , on peut associer le faisceau Nisnevich avec transferts  $\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$  ainsi que le morphisme canonique de complexes

$$s_1^* : \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow F$$

où  $s_1^*$  est le morphisme induit par la section unité  $s_1$  de  $\mathbb{A}_S^1$  via la composée

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] \xrightarrow{s_1} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S].$$

*Remarque 4.1.9.* Par définition le morphisme

$$s_0^* : \underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow F$$

induit par la section nulle est nul.

Par dérivation, on obtient un foncteur

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) : D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$$

muni d'une transformation naturelle

$$s_1^* : R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], -) \rightarrow \text{id}.$$

**Lemme 4.1.10.** *Pour tout  $F \in D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$  l'objet*

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$$

*est  $\mathbb{A}^1$ -nul.*

DÉMONSTRATION. — Le morphisme

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \rightarrow R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$$

adjoint du morphisme

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$$

induit par la multiplication  $\mu$  introduite dans la notation 4.1.8, fournit un inverse à gauche du morphisme

$$R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S]$$

obtenu à partir du morphisme

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[S] \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}}[s_1]} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S].$$

Cela entraîne que  $R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$  est un facteur direct de  $R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S]$ . Il suffit donc de constater que par construction  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S]$  est  $\mathbb{A}^1$ -nul.  $\square$

**Lemme 4.1.11.** *Soit  $F$  un objet de  $D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'objet*

$$R\text{Hom}_{\text{tr}}(E, F)$$

*est nul pour tout objet  $\mathbb{A}^1$ -nul  $E$ .*

2. *L'objet*

$$R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$$

*est nul.*

3. *Le morphisme*

$$s_1^* : R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow F$$

*induit par la section unité  $s_1$  de  $\mathbb{A}_S^1$  est nul.*

DÉMONSTRATION. — La condition 3) est une conséquence de la condition 2). Réciproquement supposons 3) satisfaite. Il s'agit de voir que pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout entier  $n$  (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n], R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) = 0.$$

Fixons un morphisme

$$h : \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \rightarrow F.$$

En notant  $\bar{h}$  le morphisme

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \rightarrow R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)$$

obtenu par adjonction à partir du morphisme

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mu]} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \xrightarrow{h} F$$

on a une factorisation

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X][n] \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \xrightarrow{\bar{h}} R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \xrightarrow{s_1^*} F$$

$\xrightarrow{\quad h \quad}$

ce qui prouve que  $h = 0$ .

Comme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S]$  est  $\mathbb{A}^1$ -nul la condition 2) est une conséquence de la condition 1). Réciproquement supposons 2) satisfaite. Soit  $X$  un  $S$ -schéma lisse de type fini. L'objet

$$R\text{Hom}_{\text{tr}}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], F)$$

est nul puisque par hypothèse, pour tout objet  $G$  de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$ , on a (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G, R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], F)) &= \mathrm{Hom}(G \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], F) \\ &= \mathrm{Hom}(G \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \\ &= \mathrm{Hom}(G \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}([\mathbb{A}_S^1/S], F)) = 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que  $E_{\mathbb{A}^1}$  est engendrée par les  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X]$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la caractérisation des objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux que nous avons mentionnée précédemment.

**Proposition 4.1.12.** *Soit  $F$  un objet de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $F$  est  $\mathbb{A}^1$ -local.
2. L'objet  $R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(E, F)$  est nul pour tout objet  $\mathbb{A}^1$ -nul  $E$ .
3. Pour tout entier relatif  $n$ , le préfaisceau sur  $\mathrm{Sm}_S$

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F[n])$$

est invariant par homotopie.

4. Le morphisme induit par la projection

$$F \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F)$$

est un isomorphisme.

5. Le morphisme

$$s_0^* - s_1^* : R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F) \rightarrow F$$

induit par la section nulle  $s_0$  et la section  $s_1$  de  $\mathbb{A}_S^1$  est nul.

DÉMONSTRATION. — Notons  $C_X$  le cône du morphisme  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]$  induit par la projection. On a un triangle distingué dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] \rightarrow C_X \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1][1]. \quad (95)$$

Par ailleurs comme la catégorie  $E_{\mathbb{A}^1}$  est la sous-catégorie triangulée épaisse et stable par somme directe engendrée par les  $C_X$ , un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$  est  $\mathbb{A}^1$ -local si et seulement si (le Hom étant calculé dans la catégorie dérivée)

$$\mathrm{Hom}(C_X, F[n]) = 0$$

pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout entier relatif  $n$ . L'équivalence des conditions 1) et 3) résulte alors de la suite exacte longue (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1], F[n-1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(C_X, F[n]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F[n]) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1], F[n]) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

induite par le triangle distingué (95).



Les conditions 5) et 3) sont équivalentes. En effet il suffit de remarquer que 5) est satisfaite si et seulement si pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout entier relatif  $n$  le morphisme

$$R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F[n])) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F[n])$$

est nul, ce qui revient à dire en passant à la cohomologie que pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout entier relatif  $n$  le morphisme (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F))[n]) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], F[n])$$

est nul. L'équivalence avec la condition 3) résulte alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F)) &= R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X] \otimes_{\mathrm{tr}}^L \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F) \\ &= R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1], F) \end{aligned}$$

et de la remarque 4.1.7. De même les conditions 4) et 3) sont équivalentes.

Par définition, on a un triangle distingué

$$R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1], F) \xrightarrow{s_0^*} F \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F)[1].$$

Sachant que la condition 4) est satisfaite si et seulement si le morphisme induit par  $s_0^*$  soit un isomorphisme, on voit en utilisant le lemme 4.1.11 que les conditions 2) et 4) sont équivalentes. Ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

*Remarque 4.1.13.* En particulier on voit, en vertu du lemme 3.3.2, qu'un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts  $F$  est  $\mathbb{A}^1$ -local si et seulement si il est *strictement invariant* par homotopie, ce qui signifie que les morphismes

$$H_{\mathrm{Nis}}^n(X \times_S \mathbb{A}^1, F) \rightarrow H_{\mathrm{Nis}}^n(X, F)$$

sont des isomorphismes pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et tout entier relatif  $n$ .

Dans la construction du foncteur de  $\mathbb{A}^1$ -localisation à la Bousfield, nous utilisons en outre la remarque générale suivante.

*Remarque 4.1.14.* Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne de Grothendieck et  $\mathcal{E}$  une sous-catégorie épaisse de  $D(\mathcal{A})$  stable par somme directe quelconque. Pour tout système inductif

$$\mathbb{N} \rightarrow C(\mathcal{A}) ; n \mapsto E_n$$

d'objets de  $\mathcal{A}$  tel que les  $E_n$  appartiennent à  $\mathcal{E}$  alors la colimite  $E$  des  $E_n$  appartient aussi à  $\mathcal{E}$ . En effet notons  $\eta_n : E_n \rightarrow E_{n+1}$  les morphismes de transition. La limite télescopique  $\mathrm{Tel}(E_n)$  des  $E_n$ , autrement dit le cône du morphisme de complexes d'objets de  $\mathcal{A}$

$$\bigoplus_i E_i \xrightarrow{\eta} \bigoplus_i E_i$$

donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{E_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\eta_0 & \mathrm{id}_{E_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\eta_1 & \mathrm{id}_{E_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\eta_2 & \mathrm{id}_{E_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

appartient par hypothèse à  $\mathcal{E}$ . Il en est donc de même de  $E$  puisque le morphisme canonique  $\mathrm{Tel}(E_n) \rightarrow E$  est un quasi-isomorphisme. En particulier le cône du morphisme  $E_0 \rightarrow E$  étant la colimite des cônes des morphismes  $E_0 \rightarrow E_n$  on voit que le morphisme canonique  $E_0 \rightarrow E_n$  est une  $\mathcal{E}$ -équivalence faible dès lors que les  $\eta_n$  sont des  $\mathcal{E}$ -équivalences faibles.

Nous pouvons maintenant passer à la construction d'un foncteur de  $\mathbb{A}^1$ -localisation à la Bousfield. Soit  $F$  un complexe de faisceau Nisnevich avec transferts. En considérant le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(1)(F) := \mathrm{cone} \left( \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], F) \xrightarrow{s_1^*} F \right),$$

on obtient ainsi un foncteur

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(1) : \mathrm{C}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)) \rightarrow \mathrm{C}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$$

Par récurrence on définit alors pour un entier  $n \geq 1$  un foncteur

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n) := L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(1) \circ L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n-1).$$

En notant  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(0)(-)$  le foncteur identité, on a un morphisme naturel  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(0)(F) \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(1)(F)$  et donc pour  $n \geq 0$  des morphismes canoniques

$$\eta^n : L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n)(F) \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n+1)(F)$$

on peut donc considérer la colimite des  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n)$

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F) := \mathrm{colim}_n L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n)(F).$$

La construction précédente est faite pour obtenir la proposition

**Proposition 4.1.15.** *Le foncteur  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(-)$  est dérivable et induit un foncteur triangulé*

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}} : \mathrm{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)) \rightarrow \mathrm{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)). \quad (96)$$

Pour tout objet  $F$  de  $\mathrm{D}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$ , l'objet  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)$  est  $\mathbb{A}^1$ -local et l'augmentation

$$\eta_F : F \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}F \quad (97)$$

est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible.

DÉMONSTRATION. — Soit  $F$  un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts pseudo-K-injectif. En utilisant la remarque 3.3.22, on voit que pour tout  $n$  le complexe  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(1)(F)$  est pseudo-K-injectif. Cela assure, via le corollaire 3.3.21, que le foncteur  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(-)$  est bien dérivable et la première assertion en découle. Par ailleurs l'augmentation (97) est bien une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible. En effet en utilisant la remarque 4.1.14, il suffit de voir que pour tout  $n$  le morphisme  $\eta^n$  est une  $\mathbb{A}^1$ -équivalence faible ce qui résulte du lemme 4.1.10.

Il reste à voir que l'on obtient effectivement un objet  $\mathbb{A}^1$ -local. Fixons un  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  et un entier relatif  $i$ . En utilisant la définition des objets  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X]$  et le lemme 3.3.4, on voit que l'on a un isomorphisme canonique (les Hom étant calculés dans la catégorie dérivée)

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)[i]) = \mathrm{colim}_n \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(n)(F)[i]) \quad (98)$$

les morphismes de transition étant fournis par les  $\eta^n$ . Par construction les composées

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}(n)}(F)[i]) \xrightarrow{s_1^*} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}(n)}(F)[i]) \xrightarrow{\eta^n} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}(n+1)}(F)[i])$$

sont nulles. L'isomorphisme (98) assure ainsi que le morphisme

$$s_1^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_X^1/X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)[i]) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)[i])$$

est nul. On en déduit que le morphisme

$$s_1^* : R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)) \rightarrow L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)$$

est nul et donc d'après la proposition 4.1.12 que l'objet  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(F)$  est bien  $\mathbb{A}^1$ -local.  $\square$

**Corollaire 4.1.16.** *Le foncteur (96) est triangulé et possède les deux propriétés suivantes :*

1. *L'image d'un  $\mathbb{A}^1$ -isomorphisme est un isomorphisme,*
2. *le foncteur induit*

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}} : D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))/E_{\mathbb{A}^1} \rightarrow D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$$

*est un adjoint à droite du foncteur de localisation.*

DÉMONSTRATION. — On peut reformuler la proposition 4.1.15, sous la forme des deux assertions suivantes.

- La restriction du foncteur de localisation à la sous-catégorie pleine des objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux est une équivalence de catégories.
- Le foncteur  $L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}}(-)$  prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine des objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux et est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion.

Le corollaire s'en déduit.  $\square$

*Remarque 4.1.17.* Nous avons identifié un peu abusivement le foncteur de  $\mathbb{A}^1$ -localisation

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}} : D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$$

au foncteur induit sur la catégorie des motifs mixtes effectifs

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\mathrm{tr}} : DM^{\mathrm{eff}}(S) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)).$$

La structure de catégorie tensorielle fermée de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$  induit une structure analogue sur la catégorie des motifs effectifs. Pour cela on a besoin du

**Lemme 4.1.18.** *Soient  $F, G$  des objets de  $D(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$ .*

1. *Si  $F$  ou  $G$  est  $\mathbb{A}^1$ -nul alors  $F \otimes_{\mathrm{tr}}^L G$  est  $\mathbb{A}^1$ -nul.*
2. *Si  $G$  est  $\mathbb{A}^1$ -local, alors  $R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(F, G)$  est  $\mathbb{A}^1$ -local.*

DÉMONSTRATION. — La première assertion résulte immédiatement de la définition des objets  $\mathbb{A}^1$ -nul. La seconde découle en vertu de la proposition 4.1.12 de l'isomorphisme

$$R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S], R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(F, G)) = R\mathrm{Hom}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S] \otimes_{\mathrm{tr}}^L F, G)$$

puisque  $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}_S^1/S]$  est  $\mathbb{A}^1$ -nul.  $\square$

Ce dernier assure que le produit tensoriel induit un foncteur

$$- \otimes - : DM^{\text{eff}}(S) \otimes DM^{\text{eff}}(S) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S) \quad (99)$$

qui munit  $DM^{\text{eff}}(S)$  d'une structure tensorielle. Pour un entier  $n$  positif nous posons  $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$  dans  $DM^{\text{eff}}(S)$  et plus généralement pour un motif  $M \in DM^{\text{eff}}(S)$  nous posons  $M(n) = M \otimes \mathbb{Z}(n)$ .

On prendra garde que le foncteur de localisation catégorique  $D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S)$  est tensoriel pour les structures considérées tandis que le foncteur de  $\mathbb{A}^1$ -localisation

$$L_{\mathbb{A}^1}^{\text{tr}} : DM^{\text{eff}}(S) \rightarrow D_{\mathbb{A}^1}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)).$$

ne l'est pas. En général le produit tensoriel de deux objets  $\mathbb{A}^1$ -locaux n'est pas  $\mathbb{A}^1$ -local. Le produit tensoriel sur  $D_{\mathbb{A}^1}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$  correspondant à celui des motifs via l'équivalence canonique est donné par

$$F \otimes_{\text{tr}}^{L, \mathbb{A}^1} G := L_{\mathbb{A}^1}^{\text{tr}}(F \otimes_{\text{tr}}^L G).$$

Le Hom-interne de la catégorie des motifs effectifs est donné par

$$\underline{\text{Hom}}(M, N) := Q_{\mathbb{A}^1} R\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(L_{\mathbb{A}^1}^{\text{tr}}(M), L_{\mathbb{A}^1}^{\text{tr}}(N))$$

où  $Q_{\mathbb{A}^1} : D(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S)) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S)$  est le foncteur de localisation catégorique. Le lemme 4.1.18 assure que cette définition fournit bien un adjoint à droite au produit tensoriel (99) et que  $DM^{\text{eff}}(S)$  est ainsi une catégorie tensorielle fermée.

**4.1.2. Point de vue géométrique.** — Nous abordons avec cette sous-section la description plus géométrique des motifs mixtes. Il s'avère en effet possible de donner une description très simple de la sous-catégorie triangulée des objets compacts de  $DM^{\text{eff}}(S)$  qui soit analogue à celle du théorème 3.2.6 de [133], à la différence près que l'on doit remplacer la topologie de Zariski par la topologie Nisnevich. Nous introduisons donc la

**Définition 4.1.19.** La catégorie  $\underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S)$  est la catégorie triangulée

$$\underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S) = K^b(\text{SmCor}_S)/E_{gm}(S)$$

obtenue par passage au quotient par la sous-catégorie triangulée épaisse  $E_{gm}(S)$  de  $K^b(\text{SmCor}_S)$  engendrée par les complexes :

– *Homotopie* :

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{A}_X^1] & \xrightarrow{[\pi_{\mathbb{A}_X^1/X}]} & [X] \\ & \uparrow \text{\scriptsize \(\mathbb{A}\)} & \\ & \text{degré 0} & \end{array} \quad (100)$$

où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini et  $\pi$  la projection de  $\mathbb{A}_X^1$  sur  $X$ ,

– *Mayer-Vietoris pour la topologie de Nisnevich* :

$$\begin{array}{ccc} [U \times_X V] & \xrightarrow{[j_U] \oplus [j_V]} & [U] \oplus [V] \xrightarrow{[i_U] \oplus [-i_V]} [X] \\ & & \uparrow \text{\scriptsize \(\mathbb{A}\)} \\ & & \text{degré 0} \end{array} \quad (101)$$

pour tout carré distingué élémentaire pour la topologie de Nisnevich de la forme (67).

*Remarque 4.1.20.* Sachant que le complexe (100) est le cône dans  $\mathbf{C}^b(\mathrm{SmCor}_S)$  du morphisme  $[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow [X]$  induit par la projection et que le complexe (101) est le cône du morphisme canonique entre le cône du morphisme de  $[U \times_X V]$  dans  $[U] \oplus [V]$  et  $[X]$ , un foncteur triangulé

$$F : \mathbf{K}^b(\mathrm{SmCor}_S) \rightarrow \mathcal{T}$$

se prolonge à la catégorie  $\underline{DM}_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. Le morphisme  $F(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow F(X)$  induit par la projection est un isomorphisme.
2. Le triangle de Mayer-Vietoris

$$F(U \times_X V) \rightarrow F(U) \oplus F(V) \rightarrow F(X) \rightarrow F(U \times_X V)[1]$$

est distingué.

**Définition 4.1.21.** La catégorie des motifs géométriques effectifs que nous noterons

$$DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$$

est l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie triangulée  $\underline{DM}_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$ .

*Remarque 4.1.22.* La catégorie introduite à la définition 4.1.21 possède une structure naturelle de catégorie triangulée d'après le théorème 1.5 de [10].

Nous notons  $M_{gm}$  le foncteur canonique

$$M_{gm} : \mathrm{Sm}_S \rightarrow DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$$

qui à un  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  associe son motif géométrique  $M_{gm}(X)$  image de l'objet  $[X]$  de  $\mathrm{SmCor}_S$  dans la catégorie des motifs mixtes géométriques effectifs.

La justification du fait que la topologie de Zariski soit suffisante pour décrire la catégorie des motifs mixtes géométriques sur un corps parfait réside dans le théorème 3.1.12 de [133] qui assure que la topologie de Zariski et la topologie de Nisnevich produise la même cohomologie pour les faisceaux avec transferts invariants par homotopie sur un corps parfait. En prenant la topologie de Nisnevich dans le cas général, on dispose de l'analogie de la proposition 3.2.6 de [133].

**Proposition 4.1.23.** *Il existe un foncteur triangulé tensoriel*

$$\iota : DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S) \rightarrow DM^{\mathrm{eff}}(S)$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{K}^b(\mathrm{SmCor}_S) & \longrightarrow & D^-(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)) \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{Sm}_S & \xrightarrow{M_{gm}} & DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S) & \xrightarrow{\iota} & DM^{\mathrm{eff}}(S) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & M
 \end{array}$$

est commutatif.

2.  $\iota$  est pleinement fidèle et son image essentielle coïncide avec la sous-catégorie de  $DM^{\mathrm{eff}}(S)$  formée des objets compacts.

DÉMONSTRATION. — Le lemme 3.3.5 assure que le foncteur  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  induit une équivalence de catégories triangulées

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))/E_{MV}(S) \longrightarrow \mathbf{D}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))$$

$E_{MV}(S)$  étant la sous-catégorie épaisse de la catégorie dérivée des préfaisceaux avec transferts engendrée par les complexes de Mayer-Vietoris

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[U \times_X V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[U] \oplus \mathbb{Z}_{\text{tr}}[V] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X] \quad (102)$$

associés à des carrés distingués pour la topologie de Nisnevich. Compte tenu de la définition 4.1.2 on voit alors en notant  $\mathcal{E}_{gm}(S)$  la sous-catégorie épaisse — de la catégorie dérivée des préfaisceaux avec transferts — stable par somme directe engendrée par les complexes

- $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini,
- les complexes de Mayer-Vietoris (102) associés aux carrés distingués pour la topologie de Nisnevich,

que le foncteur  $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$  induit une équivalence de catégories triangulées

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))/\mathcal{E}_{gm}(S) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S).$$

Par ailleurs le foncteur  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[-] : \text{SmCor}_S \rightarrow \text{PSh}^{\text{tr}}(S)$  induit un foncteur

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[-] : \mathbf{K}^b(\text{SmCor}_S) \longrightarrow \mathbf{D}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S)). \quad (103)$$

Comme les objets de la forme  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  sont projectifs dans la catégorie des préfaisceaux avec transferts le foncteur (103) est pleinement fidèle. Sachant que la catégorie  $E_{gm}$  de la définition 4.1.19 vérifie

$$E_{gm}(S) = \mathcal{E}_{gm}(S) \cap \mathbf{K}^b(\text{SmCor}_S)$$

on obtient finalement un foncteur triangulé pleinement fidèle

$$\iota : \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S).$$

La remarque 4.1.3 nous assure alors que ce foncteur se prolonge en un foncteur pleinement fidèle

$$\iota : DM_{gm}^{\text{eff}}(S) \rightarrow DM^{\text{eff}}(S)$$

qui par construction vérifie la première condition.

Il reste à voir que l'image essentielle de ce foncteur coïncide avec la sous-catégorie des objets compacts. Le foncteur de  $\mathbb{A}^1$ -localisation de la proposition 4.1.15 commutant aux sommes directes, l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{DM^{\text{eff}}(S)}(M, -) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{Sh}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(S))}(M, L_{\mathbb{A}^1}^{\text{tr}}(-))$$

assure que l'image dans  $DM^{\text{eff}}(S)$  d'un complexe de faisceau Nisnevich avec transferts est compacte si et seulement ce dernier est compact dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. Notre assertion découle alors de ce que la sous-catégorie des objets compacts de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts est la sous-catégorie épaisse engendrée par les  $\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$  où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini.  $\square$

Les motifs non effectifs sont obtenus en inversant formellement le motif de Tate de la définition 4.1.4 — on remarquera que le fait que la catégorie des motifs géométriques effectifs soit pseudo-abélienne assure que le motif de Tate est bien un motif géométrique effectif. Le procédé est le suivant.

On pose  $DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(n) := DM_{gm}^{\text{eff}}(S)$  ainsi que  $DM_{-}^{\text{eff}}(S)(n) := DM_{-}^{\text{eff}}(S)$ . On dispose alors d'un 2-système inductif, indicé par l'ensemble ordonné  $\mathbb{Z}$ , de catégories triangulées tensorielles

$$n \mapsto DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(n)$$

avec pour foncteurs de transition si  $m \geq n$

$$- \otimes \mathbb{Z}(m - n) : \begin{cases} DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(n) \rightarrow DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(m) \\ DM_{-}^{\text{eff}}(S)(n) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}(S)(m) \end{cases}$$

Par définition les catégories des motifs mixtes non effectifs sont données par les 2-colimites de ces systèmes

$$DM_{gm}(S) := 2\text{-colim}_n DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(n) \quad DM_{-}(S) := 2\text{-colim}_n DM_{-}^{\text{eff}}(S)(n).$$

Concrètement cela se traduit de la manière suivante.

- Les objets de  $DM_{gm}(S)$  catégorie sont les couples  $(M, n)$  formés d'un motif  $M \in DM_{gm}^{\text{eff}}(S)$  et d'un entier  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Les morphismes sont donnés par la relation

$$\text{Hom}_{DM_{gm}(S)}((M, n), (N, m)) = \text{colim}_{k \geq n, m} \text{Hom}_{DM_{gm}^{\text{eff}}(S)}(M(k - n), N(k - m)).$$

On dispose naturellement d'une description analogue pour  $DM_{-}(S)$ . En particulier pour tout  $M \in DM_{-}^{\text{eff}}(S)$ , on a un isomorphisme canonique  $(M(n), 0) = (M, -n)$  ce qui amène à poser dans  $DM_{-}(S)$

$$(M, m)(n) = (M, m - n).$$

Les catégories triangulées  $DM_{gm}(S)$  et  $DM_{-}(S)$  héritent d'une structure tensorielle. En effet il s'agit de voir que la permutation cyclique des facteurs du motif  $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$  est l'identité dans  $DM^{\text{eff}}(S)$ . Cette propriété résulte du lemme suivant [78, lemme 3.13].

**Lemme 4.1.24.** *Soit  $c_{1,2} = (3, 2, 1) \in \Sigma_3$ . Il existe un morphisme  $h$  de faisceaux Nisnevich avec transferts rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} & \xrightarrow{h_0 = \text{id}} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} \\ \searrow \text{morphisme induit par } s_0 & & \downarrow \\ & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \xrightarrow{h} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} & (104) \\ \nearrow \text{morphisme induit par } s_1 & & \uparrow \\ \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} & \xrightarrow{h_1 = c_{1,2}} & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} \end{array}$$

commutatif

DÉMONSTRATION. — On dispose d'une action naturelle

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\text{GL}_3] \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3}.$$

Par ailleurs il existe un chemin  $\omega : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow \text{GL}_3$  tel que l'on ait  $\omega \circ s_0 = 1$  et  $\omega \circ s_1 = c_{1,2}$ . Il suffit donc de prendre le morphisme induit par  $\omega$

$$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3} \otimes_{\text{tr}} \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}_S^1/\mathbb{A}_S^1 \setminus \{0\}]^{\otimes_{\text{tr}} 3}$$

pour obtenir un morphisme  $h$  rendant le diagramme (104) commutatif.  $\square$

*Remarque 4.1.25.* Le foncteur  $\iota$  de la proposition 4.1.23 induit un foncteur triangulé tensoriel

$$DM_{gm}(S) \rightarrow DM_-(S)$$

qui est pleinement fidèle.

Pour pouvoir considérer les motifs mixtes non effectifs — sans imposer à ces derniers la condition d'être supérieurement bornés — il faudrait considérer une construction du type  $\mathbb{P}^1$ -spectre comme dans [144, 78].

**4.1.3. Commutation aux limites projectives.** — Dans cette sous-section, nous étendons aux catégories de motifs mixtes géométriques les propriétés démontrées dans le chapitre 2 pour la catégorie des schémas lisses de type fini munis des correspondances finies. On obtient ainsi un résultat — proposition 4.1.29 — donnant le comportement des catégories de motifs mixtes géométriques par rapport à certaines limites projectives de schémas.

Nous reprenons les notations et les hypothèses de la sous-section 2.1.3. Autrement dit dans cette sous-section notre hypothèse est la suivante.

**Le schéma  $S$  est régulier et limite projective d'un système projectif de schémas réguliers  $\lambda \mapsto S_\lambda$  dont les morphismes de transition sont plats et affines.**

Supposons donné un 2-foncteur

$$\mathcal{C}_- : \Lambda \rightarrow \text{CAT} ; \lambda \mapsto \mathcal{C}_\lambda$$

où  $\text{CAT}$  désigne la 2-catégorie des catégories essentiellement petites et notons pour  $\mu \geq \lambda$  par  $F_{\lambda,\mu}$  le foncteur de transition  $\mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{C}_\mu$ .

*Remarque 4.1.26.* Dans la suite il est utile de noter que la 2-colimite  $\mathcal{C}$  des  $\mathcal{C}_\lambda$  admet la description élémentaire suivante.

- Un objet de  $\mathcal{C}$  est la donnée  $(C, \lambda)$  d'un élément  $\lambda \in \Lambda$  et d'un objet  $C$  de  $\mathcal{C}_\lambda$ .
- Les morphismes entre deux objets  $(C, \lambda)$  et  $(C', \lambda')$  de  $\mathcal{C}$  sont donnés par

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}((C, \lambda), (C', \lambda')) = \text{colim}_{\mu \geq \lambda, \lambda'} \text{Hom}_{\mathcal{C}_\mu}(F_{\lambda,\mu}(C), F_{\lambda',\mu}(C')).$$

Lorsque les  $\mathcal{C}_\lambda$  sont des catégories additives et que les foncteurs  $F_{\lambda,\mu}$  sont additifs, la catégorie  $\mathcal{C}$  est naturellement une catégorie additive et il s'agit aussi de la 2-colimite de  $\mathcal{C}_\lambda$  dans la 2-catégorie  $\text{CAT}^{\text{add}}$  des catégories additives.

On dispose du lemme suivant. On remarquera la nécessité dans ce dernier de se restreindre aux complexes bornés.



**Lemme 4.1.27.** *Supposons donné un 2-foncteur*

$$\mathcal{C}_- : \Lambda \rightarrow \text{CAT}^{\text{add}} ; \lambda \mapsto \mathcal{C}_\lambda$$

*et notons  $\mathcal{C}$  la 2-colimite des  $\mathcal{C}_\lambda$ . Le foncteur canonique*

$$2\text{-colim}_\lambda \text{K}^b(\mathcal{C}_\lambda) \rightarrow \text{K}^b(\mathcal{C})$$

*est une équivalence de catégories triangulées.*

DÉMONSTRATION. — Notons  $F_\lambda$  le foncteur additif canonique de  $\mathcal{C}_\lambda$  dans  $\mathcal{C}$ . De la description précédente des 2-colimites, il résulte que le foncteur

$$2\text{-colim}_\lambda \text{C}^b(\mathcal{C}_\lambda) \rightarrow \text{C}^b(\mathcal{C})$$

est une équivalence de catégories. Un morphisme  $c : C \rightarrow C'$  de complexes d'objets de  $\mathcal{C}$  est donc l'image d'un morphisme  $c_\lambda : C_\lambda \rightarrow C'_\lambda$  de complexes d'objets de  $\mathcal{C}_\lambda$  par le foncteur  $\text{C}^b(F_\lambda)$ . Il suffit alors juste de remarquer que  $c$  est une équivalence d'homotopie si et seulement si il existe  $\mu \geq \lambda$  tel que  $\text{C}^b(F_{\lambda,\mu})(c_\lambda)$  soit une équivalence d'homotopie dans  $\text{C}^b(\mathcal{C}_\mu)$ .  $\square$

En utilisant le corollaire 2.1.9, le lemme précédent nous donne

**Corollaire 4.1.28.** *Le foncteur canonique*

$$2\text{-colim}_\lambda \text{K}^b(\text{SmCor}_{S_\lambda}) \rightarrow \text{K}^b(\text{SmCor}_S) \tag{105}$$

*est une équivalence de catégories triangulées.*

DÉMONSTRATION. — Le lemme 4.1.27 entraîne que le foncteur canonique

$$2\text{-colim}_\lambda \text{K}^b(\text{SmCor}_{S_\lambda}) \rightarrow \text{K}^b(2\text{-colim}_\lambda \text{SmCor}_{S_\lambda})$$

est une équivalence de catégories. Le fait que le foncteur (105) soit une équivalence de catégories découle du corollaire 2.1.9 via le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-colim}_\lambda \text{K}^b(\text{SmCor}_{S_\lambda}) & \longrightarrow & \text{K}^b(2\text{-colim}_\lambda \text{SmCor}_{S_\lambda}) \xrightarrow{\text{K}^b(45)} \text{K}^b(\text{SmCor}_S). \\ & \searrow (105) \curvearrowright & \end{array}$$

$\square$

**Proposition 4.1.29.** *La sous-catégorie épaisse  $E_{gm}(S)$  est la 2-colimite des catégories  $E_{gm}(S_\lambda)$  et les foncteurs canoniques*

$$2\text{-colim}_\lambda \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S_\lambda) \longrightarrow \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S) \tag{106}$$

$$2\text{-colim}_\lambda DM_{gm}^{\text{eff}}(S_\lambda) \longrightarrow DM_{gm}^{\text{eff}}(S) \tag{107}$$

$$2\text{-colim}_\lambda DM_{gm}(S_\lambda) \longrightarrow DM_{gm}(S) \tag{108}$$

*sont des équivalences de catégories.*

DÉMONSTRATION. — Remarquons tout d'abord qu'étant donné un carré distingué pour la topologie de Nisnevich sur  $S_\lambda$

$$\begin{array}{ccc} U_\lambda \times_{X_\lambda} V_\lambda & \longrightarrow & V_\lambda \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U_\lambda & \longrightarrow & X_\lambda \end{array} \quad (109)$$

le carré obtenu par changement de base

$$\begin{array}{ccc} (S \times_{S_\lambda} U_\lambda) \times_{(S \times_{S_\lambda} X_\lambda)} (S \times_{S_\lambda} V_\lambda) & \longrightarrow & S \times_{S_\lambda} V_\lambda \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S \times_{S_\lambda} U_\lambda & \longrightarrow & S \times_{S_\lambda} X_\lambda \end{array} \quad (110)$$

est distingué pour la topologie de Nisnevich sur  $S$ . La définition des catégories épaisses  $E_{gm}(S_\lambda)$  et  $E_{gm}(S)$  entraîne donc que le foncteur (105) induit un foncteur

$$2\text{-colim}_\lambda E_{gm}(S_\lambda) \longrightarrow E_{gm}(S).$$

D'après le corollaire 4.1.28 ce dernier est pleinement fidèle, en ce qui concerne la première assertion, il suffit donc de voir que les objets de  $\mathbb{K}^b(\text{SmCor}_S)$  de la forme

$$[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow [X] \quad [U \times_X V] \rightarrow [U] \oplus [V] \rightarrow [X]$$

où  $X$  est un  $S$ -schéma lisse de type fini et

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \quad (111)$$

un carré distingué pour la topologie de Nisnevich sur  $S$  proviennent à isomorphisme près d'éléments de la 2-colimite des  $E_{gm}(S_\lambda)$ . Pour le premier complexe il s'agit d'une conséquence immédiate de l'assertion (ii) du théorème 8.2.2 de [55]. Pour le second complexe, il suffit de remarquer que le théorème 8.10.5 de *loc.cit.* entraîne l'existence d'un  $\lambda \in \Lambda$  et d'un carré distingué pour la topologie Nisnevich de  $S_\lambda$  de la forme (109) tel que le carré (111) soit isomorphe au carré (110) obtenu par changement de base.

Montrons maintenant que le foncteur (106) est une équivalence de catégorie triangulée. On sait déjà grâce au corollaire 4.1.28 que ce dernier est essentiellement surjectif. Il suffit donc de prouver sa pleine fidélité. Pour simplifier les notations nous posons

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\lambda &= \mathbb{K}^b(\text{SmCor}_{S_\lambda}) & \mathbb{K} &= \mathbb{K}^b(\text{SmCor}_S) \\ \mathbb{D}_\lambda &:= \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S_\lambda) & \mathbb{D} &:= \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\mathbb{E} := 2\text{-colim}_\lambda \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(\lambda).$$

Convenons en outre de noter par  $\mathfrak{S}_\lambda$  (resp.  $\mathfrak{S}$ ) la sous-catégorie de  $\mathbb{K}_\lambda$  (resp.  $\mathbb{K}$ ) ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes de  $\mathbb{K}_\lambda$  (resp.  $\mathbb{K}$ ) qui deviennent des isomorphismes dans  $\mathbb{D}_\lambda$  (resp.  $\mathbb{D}$ ). On peut reformuler l'assertion que nous venons de prouver

concernant les catégories  $E_{gm}^r$  en disant que pour tout objet  $M \in \mathbb{K}_\lambda$  et tout objet  $M' \in \mathbb{K}_{\lambda'}$  on a un isomorphisme naturel

$$\operatorname{colim}_{\mu \geq \lambda, \lambda'} \mathcal{S}_\mu(F_{\lambda, \mu}(M), F_{\lambda', \mu}(M')) = \mathcal{S}(\Phi(M, \lambda), \Phi(M', \lambda')) \quad (112)$$

où  $\Phi$  désigne l'isomorphisme (105).

Notons  $\Psi$  le morphisme (106) et fixons des objets  $(M, \lambda)$  et  $(M', \lambda')$  de  $\mathbb{D}$ . En utilisant la description de la remarque 4.1.26 on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbb{D}}((M, \lambda), (M', \lambda')) &= \operatorname{colim}_{\mu} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda, \mu}(M), F_{\lambda', \mu}(M')) \\ &= \operatorname{colim}_{\mu} \operatorname{colim}_{\substack{L \in \mathbb{K}_\mu \\ s \in \mathcal{S}_\mu(F_{\lambda', \mu}(M'), L)}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda, \mu}(M), L). \end{aligned}$$

D'autre part en utilisant le corollaire 4.1.28 ainsi que les isomorphismes (112) on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbb{D}}(\Psi(M, \lambda), \Psi(M', \lambda')) &= \operatorname{colim}_{\substack{K \in \mathbb{K} \\ \sigma \in \mathcal{S}(\Phi(M', \lambda'), K)}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\Phi(M, \lambda), K) \\ &= \operatorname{colim}_{\mu} \operatorname{colim}_{\substack{K \in \mathbb{K}_\mu \\ \sigma \in (\Phi(M', \lambda'), \Phi(K, \mu))}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\Phi(M, \lambda), \Phi(K, \mu)) \\ &= \operatorname{colim}_{\mu} \operatorname{colim}_{\substack{K \in \mathbb{K}_\mu \\ \sigma \in \mathcal{S}_\mu(F_{\lambda', \mu}(M'), K)}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}_\mu}(F_{\lambda, \mu}(M), K). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la pleine fidélité recherchée.

Notons  $(-)^{\natural}$  le 2-foncteur qui à une catégorie associe son enveloppe pseudo-abélienne. Le morphisme canonique

$$2\text{-colim}_{\lambda} (\mathcal{C}_{\lambda}^{\natural}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\natural}$$

est une équivalence de catégories comme on le voit à partir de la propriété universelle des 2-colimites et de la pseudo-abélianisation. En particulier le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-colim}_{\lambda} \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda})^{\natural} & \xrightarrow{\text{equiv.}} & [2\text{-colim}_{\lambda} \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda})]^{\natural} \xrightarrow{(106)^{\natural}} \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S)^{\natural} \\ \parallel & & \parallel \\ 2\text{-colim}_{\lambda} \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda}) & \xrightarrow{(107)} & \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S) \end{array}$$

entraîne que (107) est aussi une équivalence de catégorie.

Quant à la dernière assertion, il suffit en utilisant les notations de la sous-section 4.1.2 de remarquer que

$$\begin{aligned}
2\text{-colim}_{\lambda} DM_{gm}(S_{\lambda}) &= 2\text{-colim}_{\lambda} 2\text{-colim}_n \left[ DM_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda})(n) \right] \\
&= 2\text{-colim}_n 2\text{-colim}_{\lambda} \left[ DM_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda})(n) \right] \\
&= 2\text{-colim}_n \left[ 2\text{-colim}_{\lambda} DM_{gm}^{\text{eff}}(S_{\lambda}) \right](n) \\
&= 2\text{-colim}_n DM_{gm}^{\text{eff}}(S)(n) = DM_{gm}(S).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

**Dans le reste de ce chapitre nous supposons que le schéma  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ .**

Les considérations qui suivent ne nous sont pas utiles en ce qui concerne la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique. En revanche elles nous permettent de montrer que sur un corps parfait, le morphisme induit par ce foncteur entre la cohomologie motivique et la cohomologie  $\ell$ -adique est compatible aux morphismes classes de cycles  $\ell$ -adiques via l'isomorphisme construit par V. Voevodsky dans [136].

Nous avons été amené pour cela à étudier une question intéressante en soi. Il s'agit de la functorialité des morphismes de Gysin motiviques que nous utilisons pour construire « naïvement » un morphisme classes de cycles motiviques.

Le fait que nous soyons sur un corps parfait interviendra notamment via l'utilisation fréquente du théorème suivant démontré par V. Voevodsky dans [135, corollaire 4.10].

**Théorème (dit de simplification).** *Soit  $k$  un corps parfait. Le foncteur induit par le motif de Tate*

$$- \otimes \mathbb{Z}(1) : DM_{-}^{\text{eff}}(k) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}(k)$$

*est pleinement fidèle. En particulier le foncteur  $DM_{-}^{\text{eff}}(k) \rightarrow DM_{-}(k)$  est pleinement fidèle.*

## 4.2. Cohomologie motivique et groupes de Chow supérieurs de Bloch

Dans cette section nous rappelons la construction l'isomorphisme de comparaison entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs de Bloch obtenu par V. Voevodsky dans [136]. Nous détaillons certaines propriétés — implicites dans la littérature — de cet isomorphisme et notamment la compatibilité, produits d'intersection, cup-produits de cet isomorphisme. Rappelons que la cohomologie motivique d'un  $k$ -schéma lisse de type fini est définie par

$$\begin{aligned}
H^p(X, \mathbb{Z}(q)) &:= \text{Hom}_{DM_{gm}^{\text{eff}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]) \\
&= \text{Hom}_{DM_{-}^{\text{eff}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p])
\end{aligned}$$

Nous utiliserons parfois la notation  $H^{p,q}(X)$  pour désigner le groupe de cohomologie motivique précédent. Cette définition serait valable plus généralement pour un schéma  $S$  quelconque. En revanche dans le cas des corps parfait, le théorème de simplification de Voevodsky assure que la

cohomologie motivique est aussi obtenue en calculant le Hom dans la catégorie des motifs non effectifs

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathbb{Z}(q)) &:= \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]) \\ &= \text{Hom}_{DM_-(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]) \end{aligned}$$

**4.2.1. L’isomorphisme de E. Friedlander et A. Suslin.** — Le résultat essentiel permettant d’identifier la cohomologie motivique aux groupes de Chow supérieurs est le lemme de déplacement prouvé par A. Suslin dans [126, théorème 2.1]. Ce résultat permet de calculer les groupes de Chow supérieurs à partir du sous-complexe des cycles équidimensionnels et s’est vu donner une interprétation motivique dans [39, §12].

E. Friedlander et A. Suslin introduisent dans *loc.cit.* le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\mathbb{Z}^{\text{FS}}(n) := z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)[-2n] \tag{113}$$

dont l’image dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$  correspond, suivant les considérations de [133], au « motif à support compact de  $\mathbb{A}^n$  ». Les complexes (4.2.3) possèdent une structure multiplicative naturelle. On dispose en effet de morphismes canoniques dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts

$$z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \otimes_{\text{tr}}^L z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^m, 0) \rightarrow z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \otimes_{\text{tr}} z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^m, 0) \rightarrow z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0). \tag{114}$$

vérifiant associativité et commutativité. Le premier morphisme de (114) est le morphisme naturel qui se déduit de la construction du produit tensoriel dérivé que nous avons rappelée dans la sous-section 3.3.2. Le second morphisme de (114) provient du morphisme de préfaisceaux avec transferts

$$z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^m, 0) \rightarrow z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0)$$

donné, au niveau des sections sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ , par les morphismes

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{Y, Z \in \text{Sm}_k} \begin{array}{l} z_{\text{equi}}(\mathbb{A}_Y^n/Y, 0) \otimes z_{\text{equi}}(\mathbb{A}_Z^m/Z, 0) \\ \otimes c_k(X, Y \times Z) \end{array} & \xrightarrow[\text{cycles}]{\text{produit des}} & \bigoplus_{Y, Z \in \text{Sm}_k} \begin{array}{l} z_{\text{equi}}(\mathbb{A}_{Y \times Z}^{n+m}/Y \times Z, 0) \\ \otimes c_k(X, Y \times Z) \end{array} \\ \downarrow (115) & & \downarrow \text{structure de préfaisceau} \\ \left[ z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \otimes_{\text{tr}}^{\text{pr}} z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^m, 0) \right](X) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & z_{\text{equi}}(\mathbb{A}_X^{n+m}/X, 0) \\ & & \parallel \\ & & z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0)(X), \end{array}$$

la surjection (115) étant obtenue via la formule (72).

**Définition 4.2.1.** Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse. On pose

$$H_{\text{FS}}^p(X, \mathbb{Z}(q)) := \text{Hom}_{DM^{\text{eff}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}^{\text{FS}}(q)[p])$$

Les morphismes (114) nous donnent, dans la catégories dérivées des faisceaux Nisnevich avec transferts, des morphismes associatifs et commutatifs

$$\mathbb{Z}^{\text{FS}}(n) \otimes_{\text{tr}}^L \mathbb{Z}^{\text{FS}}(m) \rightarrow \mathbb{Z}^{\text{FS}}(n+m)$$

qui munissent, d'après le lemme 12.4 de [39], d'une structure d'algèbre graduée associative et commutative les groupes abéliens gradués

$$H_{\text{FS}}^*(X, \mathbb{Z}(*)) := \bigoplus_{p,q} H_{\text{FS}}^p(X, \mathbb{Z}(q)) \quad X \in \text{Sm}_k.$$

D'après le corollaire 12.2 de [39], le lemme de déplacement de A. Suslin [126, théorème 2.1], admet pour conséquence fondamentale la proposition suivante.

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. On a des isomorphismes canoniques*

$$\text{CH}^p(X, q) \xrightarrow{\text{cl}_{\text{FS}, X}^{p,q}} H_{\text{FS}}^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)).$$

Les propriétés de ces isomorphismes sont données dans le lemme suivant. La première assertion de ce dernier fait l'objet du corollaire 2.4 de [143], la seconde se démontre de même.

**Lemme 4.2.3.** *Soient  $X, Y$  des  $k$ -schémas lisses de type fini.*

1. *Les carrés ci-dessous sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^p(X, q) \otimes \text{CH}^r(Y, s) & \xrightarrow{\text{cl}_{\text{FS}, X}^{p,q} \otimes \text{cl}_{\text{FS}, Y}^{r,s}} & H_{\text{FS}}^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) \otimes H_{\text{FS}}^{2r-s}(Y, \mathbb{Z}(r)) \\ \downarrow \times & & \downarrow \times \\ \text{CH}^{p+r}(X \times Y, q+s) & \xrightarrow{\text{cl}_{\text{FS}, X \times Y}^{p+r, q+s}} & H_{\text{FS}}^{2p+2r-q-s}(X \times Y, \mathbb{Z}(p+r)). \end{array}$$

2. *Soit  $g : X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme. Le carré ci-dessous est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^p(Y, q) & \xrightarrow{\text{cl}_{\text{FS}, Y}^{p,q}} & H_{\text{FS}}^{2p-q}(Y, \mathbb{Z}(p)) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ \text{CH}^p(X, q) & \xrightarrow{\text{cl}_{\text{FS}, X}^{p,q}} & H_{\text{FS}}^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)). \end{array}$$

**4.2.2. Comparaison des deux théories.** — Nous rappelons maintenant la construction de l'isomorphisme de [136]. Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. En associant à un sous-schéma fermé intègre de  $X \times \mathbb{P}^n$  fini et équidimensionnel sur  $X$  sa restriction à l'ouvert  $X \times \mathbb{A}^n$ , on obtient un morphisme de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\Psi_n : \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{P}^n] \rightarrow \mathcal{Z}_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{P}^n]/\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{P}^{n-1}] \xrightarrow{\Psi_n} & z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \\
 & \downarrow & \downarrow \Pi_n \\
 \mathbb{Z}(n)[2n] & \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{P}^n]/\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{P}^n \setminus \{0\}] \longrightarrow & z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)/F_n \\
 \text{iso dans } DM_-^{\text{eff}}(k) & \uparrow & \uparrow \\
 (\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}^1]/\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}])^{\otimes_{\text{tr}} n} & \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}^n]/\mathbb{Z}_{\text{tr}}[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}] & \nearrow \Phi'_n \\
 & \searrow \Phi_n & \uparrow \\
 & & z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)
 \end{array} \tag{116}$$

Dans le diagramme ci-dessus,  $F_n$  désigne le sous-faisceau avec transferts de  $z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)$  dont les sections sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$  sont données par le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de  $X \times \mathbb{A}^n$  qui sont quasi-finis équidimensionnels sur  $X$  et dont le support est contenu dans  $X \times (\mathbb{A}^n \setminus \{0\})$ .

D'après [136], les morphismes apparaissant dans le diagramme (116) sont des isomorphismes dans  $DM_-^{\text{eff}}(k)$ . En particulier on obtient des isomorphismes dans  $DM_-^{\text{eff}}(k)$

$$\mathbb{Z}(n) \xrightarrow{(\Pi_n^{-1} \circ \Phi_n)[-2n]} \mathbb{Z}^{\text{FS}}(n) \tag{117}$$

qui induisent, pour tout  $k$ -schéma lisse de type fini, des isomorphismes  $H_{\text{FS}}^p(X, \mathbb{Z}(q)) \xrightarrow{\phi_X^{p,q}} H^p(X, \mathbb{Z}(q))$ . En utilisant les isomorphismes de E. Friedlander et A. Suslin on obtient finalement des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{CH}^p(X, q) & \\
 \swarrow c_{\text{FS}, X}^{p,q} & & \searrow c_X^{p,q} \\
 H_{\text{FS}}^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) & \xrightarrow{\phi_X^{2p-q,p}} & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p))
 \end{array} \tag{118}$$

identifiant les groupes de cohomologie motivique aux groupes de Chow supérieurs de Bloch. En utilisant le lemme 4.2.3 ainsi que les définitions précédentes, on obtient immédiatement le lemme suivant

**Lemme 4.2.4.** *Soit  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $k$ -schémas lisses de type fini. Le carré ci-dessous est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CH}^p(Y, q) & \xrightarrow{c_Y^{p,q}} & H^{2p-q}(Y, \mathbb{Z}(p)) \\
 \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\
 \text{CH}^p(X, q) & \xrightarrow{c_X^{p,q}} & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)).
 \end{array}$$

De même les isomorphismes de (118) sont compatibles aux produits définis sur les diverses théories cohomologiques :

**Lemme 4.2.5.** *Soient  $X, Y$  des  $k$ -schémas lisses de type fini. Les carrés*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X, q) \otimes \mathrm{CH}^r(Y, s) & \xrightarrow{c_X^{p,q} \otimes c_Y^{r,s}} & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) \otimes H^{2r-s}(Y, \mathbb{Z}(r)) \\ \downarrow \times & & \downarrow \times \\ \mathrm{CH}^{p+r}(X \times Y, q+s) & \xrightarrow{c_{X \times Y}^{p+r, q+s}} & H^{2p+2r-q-s}(X \times Y, \mathbb{Z}(p+r)) \end{array}$$

sont commutatifs.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 4.2.3, il suffit de voir que les isomorphismes  $\phi_X^{p,q}$  sont compatibles aux produits définis de part et d'autre. Ceci résulte de la définition des isomorphismes (117). En effet, pour tout  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ , le produit des cycles nous donne des morphismes

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{Y, Z \in \mathrm{Sm}_k} F_n(Y) \otimes F_m(Z) & \xrightarrow{\text{produit des cycles}} & \bigoplus_{Y, Z \in \mathrm{Sm}_k} F_{n+m}(Y \times Z) \otimes c_k(X, Y \times Z) \\ \otimes c_k(X, Y \times Z) & & \\ \downarrow & & \downarrow \text{structure de préfaisceau} \\ (F_n \otimes_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{pr}} F_m)(X) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & F_{n+m}(X) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (F_n \otimes_{\mathrm{tr}} F_m)(X) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \end{array}$$

avec transferts

compatible avec le second morphisme de (114). On obtient ainsi un carré commutatif de faisceaux Nisnevich avec transferts

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^n, 0) \otimes_{\mathrm{tr}} \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^m, 0) & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0) \\ \downarrow \Pi_n \otimes_{\mathrm{tr}} \Pi_m & & \downarrow \Pi_{n+m} \\ \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)/F_n \otimes_{\mathrm{tr}} \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^m, 0)/F_m & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0)/F_{n+m}. \end{array}$$

Notre assertion est alors une conséquence de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}])^{\otimes_{\mathrm{tr}} n} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}])^{\otimes_{\mathrm{tr}} n+m} \\ \otimes_{\mathrm{tr}} & & \downarrow \\ (\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}])^{\otimes_{\mathrm{tr}} m} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^n]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^{n+m}]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^{n+m} \setminus \{0\}] \\ \otimes_{\mathrm{tr}} & & \downarrow \Phi'_{n+m} \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^m]/\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[\mathbb{A}^m \setminus \{0\}] & \longrightarrow & \\ \downarrow \Phi'_n \otimes_{\mathrm{tr}} \Phi'_m & & \downarrow \\ \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^n, 0)/F_n \otimes_{\mathrm{tr}} \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^m, 0)/F_m & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{\mathrm{equi}}(\mathbb{A}^{n+m}, 0)/F_{n+m}. \end{array}$$

Φ<sub>n</sub> ⊗<sub>tr</sub> Φ<sub>m</sub>

Φ<sub>n+m</sub>

□



Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 entraînent finalement la compatibilité des isomorphismes de (118) au produit d'intersection des cycles et au cup-produit.

**Corollaire 4.2.6.** *Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. Les carrés*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X, q) \otimes \mathrm{CH}^r(X, s) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^{p,q} \otimes \mathrm{cl}_X^{r,s}} & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) \otimes H^{2r-s}(X, \mathbb{Z}(r)) \\ \downarrow \smile & & \downarrow \smile \\ \mathrm{CH}^{p+r}(X, q+s) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^{p+r, q+s}} & H^{2p+2r-q-s}(X, \mathbb{Z}(p+r)) \end{array}$$

sont commutatifs.

### 4.3. Classes de Chern et de Thom

À titre de préparation pour la construction des « morphismes classes de cycles naïfs », nous rappelons dans la sous-section suivante les principales propriétés des classes de Chern et de Thom.

**4.3.1. Classes de Chern.** — Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. Nous avons vu dans la sous-section 4.2.2 l'existence d'un isomorphisme

$$\mathrm{cl}_X^n : \mathrm{CH}^n(X) \xrightarrow{\sim} H^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)).$$

Dans [49] A. Grothendieck a développé la théorie des classes de Chern des fibrés à valeurs dans les groupes de Chow. Il associe à un fibré vectoriel  $E$  de rang fini sur un  $k$ -schéma lisse de type fini et à un entier  $n$ , un cycle

$$c_n(E) \in \mathrm{CH}^n(X).$$

Pour fixer notre convention de signe dans la définition des classes de Chern, nous prenons pour relation de définition des classes de Chern supérieures en fonction de la première classe de Chern la formule

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q (c_q(E) \circ \pi_{\mathbb{P}(E)*}) \smile c_1(\lambda_E)^{n-q} = 0 \quad c_0(E) := 1$$

dans laquelle  $\lambda_E$  désigne le fibré en droites canonique sur  $\mathbb{P}(E)$ .

*Remarque 4.3.1.* Par convention, lorsque  $E$  est un fibré de rang  $n$ , les classes de Chern  $c_i(E)$  sont nulles pour  $i > n$ . On définit la classe de Chern totale  $c(E)$  de  $E$  comme l'élément de l'algèbre graduée  $\mathrm{CH}^*(X)$  dont la composante homogène de degré  $n$  n'est autre que la  $n$ -ème classe de Chern de  $E$ .

Cela permet par transport de définir les classes de Chern motivique.

**Définition 4.3.2.** Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang fini. Pour tout entier naturel  $n$ , le morphisme de  $DM_{gm}(k)$

$$\mathfrak{c}_n(E) : M(X) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$$

image de  $c_n(E) \in \mathrm{CH}^n(X)$  par le morphisme  $\mathrm{cl}_X^n$  est appelé la  $n$ -ème classe de Chern motivique de  $E$ .

Nous avons vu avec les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 que les isomorphismes  $\mathfrak{c}_X^n$  fournissent un isomorphisme fonctoriel d'anneaux gradués entre la théorie de Chow  $\mathrm{CH}^*(X)$  et la cohomologie motivique  $H^{2*}(X, \mathbb{Z}(*))$ . Cela entraîne que les classes de Chern motiviques jouissent des mêmes propriétés que les classes de Chern définies par A. Grothendieck. En particulier les classes de Chern supérieures vérifient les relations

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q (\mathfrak{c}_q(E) \circ \pi_{\mathbb{P}(E)*}) \smile \mathfrak{c}_1(\lambda_E)^{n-q} = 0 \quad \mathfrak{c}_0(E) := \pi_{X*}$$

et possèdent les propriétés rappelées dans le lemme suivant.

**Lemme 4.3.3.** *Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini.*

1. (Fonctorialité) Si  $g : Y \rightarrow X$  est un morphisme de  $k$ -schémas lisses de type fini, on a

$$\mathfrak{c}_i(g^*E) = \mathfrak{c}_i(E) \circ g_*.$$

2. (Formule de Whitney) Étant donnée une suite exacte

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels de rang fini sur  $X$ , on a

$$\mathfrak{c}(E) = \mathfrak{c}(E') \smile \mathfrak{c}(E'').$$

**Définition 4.3.4.** Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ . Pour un entier  $q$ , on note  $\mathfrak{l}_q(E)$  le morphisme

$$\mathfrak{l}_q(E) = \mathfrak{c}_1(\lambda_E)^q \smile \pi_{\mathbb{P}(E)/X*} : M(\mathbb{P}(E)) \rightarrow M(X)(q)[2q]$$

dans lequel  $\lambda_E$  désigne le fibré en droites canonique sur  $\mathbb{P}(E)$ . On pose en outre

$$\mathfrak{l}(E) = \sum_{q=0}^{n-1} \mathfrak{l}_q(E) : M(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q].$$

On dispose alors de la formule du fibré projectif démontrée par V. Voevodsky dans [128, 133]. Ce résultat est en fait essentiellement équivalent à l'existence de l'isomorphisme de Thom — proposition 4.3.13. D'ailleurs dans le chapitre III de [98], M. Levine déduit au théorème 1.3.2 la formule du fibré projectif de l'isomorphisme de Thom — l'existence de ce dernier faisant parti des relations imposées lors de la construction des motifs mixtes de [98].

**Proposition 4.3.5.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ . Le morphisme*

$$\mathfrak{l}(E) : M(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q]$$

de la définition 4.3.4 est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. — En utilisant la propriété de Mayer-Vietoris, on peut se ramener dans un premier temps au cas où  $E$  est un fibré trivial. Tout revient donc à vérifier que le morphisme

$$\mathfrak{l}(\mathbb{A}^{n+1}) : M(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(n)[2n]$$

est un isomorphisme. Considérons le recouvrement Zariski standard de  $\mathbb{P}^n$  par  $\mathbb{A}^n$  et  $\mathbb{P}^n \setminus \{0\}$ , le triangle distingué de Mayer-Vietoris s'écrit alors

$$M(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus M(\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow M(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}[1] \oplus \mathbb{Z}(n)[2n]$$

compte tenu du fait que l'intersection des deux ouverts n'est autre que  $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$  et que  $M(\mathbb{P}^n \setminus \{0\}) = M(\mathbb{P}^{n-1})$ . Dans la preuve du théorème 4.2.7 de [128], il est mis en évidence un isomorphisme

$$M(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(n)[2n - 1]$$

s'inscrivant dans un morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}^{n-1}) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow \iota(\mathbb{A}^n) & & \downarrow \iota(\mathbb{A}^{n+1}) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(n)[2n - 1] & \longrightarrow & \bigoplus_{q=0}^{n-1} \mathbb{Z}(q)[2q] & \longrightarrow & \bigoplus_{q=0}^n \mathbb{Z}(q)[2q] \xrightarrow{+1} \end{array}$$

Le résultat se déduit alors par récurrence sur  $n$ . □

*Remarque 4.3.6.* Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur un  $k$ -schéma lisse de type fini. Comme dans le paragraphe 1.3.3 de [98, Chapitre III], il résulte de l'invariance par homotopie, de la propriété de Mayer-Vietoris et de la formule du fibré projectif de la proposition 4.3.5 que les morphismes

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(\mathrm{Sp}(E), \mathbb{Z}(q))$$

sont injectifs. Dans ce qui précède  $\mathrm{Sp}(E)$  désigne comme dans *loc.cit.* le schéma de décomposition en fibrés en droites de  $E$ . L'image inverse de  $E$  sur ce dernier est par construction une somme directe de fibrés en droites et par functorialité ceci permet de réduire la preuve d'égalité entre « classes caractéristiques » au cas des fibrés en droites.

**4.3.2. Classes de Thom.** — Rappelons dans un premier temps la définition du motif de Thom [108, 138] associé à un fibré vectoriel.

*Définition 4.3.7.* Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang fini sur  $X$ . On appelle motif de Thom de  $E$  le motif

$$M\mathrm{Th}(E) := M_X(E)$$

de  $E$  à support dans la section nulle.

Ces motifs admettent une description en terme de la fermeture projective  $\mathbb{P}(\overline{E})$  de  $E$ . On dispose en effet du résultat suivant.

*Lemme 4.3.8.* Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang fini sur  $X$ . On a un isomorphisme canonique

$$M\mathrm{Th}(E) = M(\mathbb{P}(\overline{E})/\mathbb{P}(E)).$$

DÉMONSTRATION. — Considérons l'immersion ouverte canonique

$$E \hookrightarrow \mathbb{P}(\overline{E})$$

où  $E$  est identifié au complémentaire de l'hyperplan projectif à l'infini  $\mathbb{P}(E)$  ainsi que l'ouvert  $\mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X$  de  $\mathbb{P}(\overline{E})$ . Le carré cartésien associé à ce recouvrement est de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X & \longrightarrow & \mathbb{P}(\overline{E}) \end{array}$$

et l'on a donc un isomorphisme canonique

$$M\mathrm{Th}(E) = M(\mathbb{P}(\overline{E})/(\mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X)).$$

D'après le corollaire 8.6.4 de [51], l'immersion fermée  $\mathbb{P}(E) \hookrightarrow \mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X$  s'identifie naturellement à la section nulle d'un fibré en droites sur  $\mathbb{P}(E)$ . Cela donne  $M(\mathbb{P}(E)) = M(\mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X)$  en utilisant l'invariance par homotopie et on en déduit un isomorphisme canonique

$$M\mathrm{Th}(E) = M(\mathbb{P}(\overline{E})/(\mathbb{P}(\overline{E}) \setminus X)) = M(\mathbb{P}(\overline{E})/\mathbb{P}(E))$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

En particulier on dispose d'un triangle distingué canonique

$$M(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{\iota_{\infty*}} M(\mathbb{P}(\overline{E})) \xrightarrow{\theta_E} M\mathrm{Th}(E) \xrightarrow{+1} . \quad (119)$$

**Définition 4.3.9.** Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur un  $k$ -schéma lisse de type fini. La classe de Thom du fibré  $E$  est le morphisme de  $DM_{gm}(k)$

$$\overline{\mathrm{tc}}(E) : M(\mathbb{P}(\overline{E})) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$$

donné en fonction des classes de Chern de  $E$  par la relation

$$\overline{\mathrm{tc}}(E) := \sum_{q=0}^n (-1)^{n-q} \left[ \mathbf{c}_q(E) \circ \pi_{\mathbb{P}(\overline{E})/X*} \right] \smile \mathbf{c}_1(\lambda_{\overline{E}})^{n-q}. \quad (120)$$

*Remarque 4.3.10.* Compte tenu de la définition 4.3.4, la relation (120) donnant la classe de Thom peut être reformulée sous la forme du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(\overline{E})) & \xrightarrow{\iota(\overline{E})} & \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q] \\ & \searrow \overline{\mathrm{tc}}(E) \circ \pi_{\mathbb{P}(\overline{E})/X*} & \downarrow \sum_{q=0}^n (-1)^q \cdot \mathbf{c}_{n-q}(E)(q)[2q] \\ & & M(X)(n)[2n] \end{array}$$

dans lequel  $\cdot \mathbf{c}_{n-q}(E)(q)[2q] : M(X)(q)[2q] \rightarrow M(X)(n)[2n]$  désigne le morphisme naturel déduit de  $\mathbf{c}_{n-q}(E)$ .

**Lemme 4.3.11.** Le carré

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\iota_{\infty*}} & M(\mathbb{P}(\overline{E})) \\ \downarrow \iota(E) & & \downarrow \iota(\overline{E}) \\ \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q] & \xleftarrow{\text{projection}} & \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q], \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de remarquer l’immersion à l’infini de  $\mathbb{P}(E)$  dans  $\mathbb{P}(\overline{E})$  induit un isomorphisme  $\lambda_E = \iota_{\infty}^* \lambda_{\overline{E}}$ . Il résulte alors de la functorialité des classes de Chern que  $\mathbf{c}_1(\lambda_E)^q = \mathbf{c}_1(\lambda_{\overline{E}}) \circ \iota_{\infty*}$  et le résultat découle de la définition 4.3.4.  $\square$

Il résulte du lemme 4.3.11 que le triangle distingué (119) est scindé. Il induit donc une suite exacte courte scindée — les Hom étant calculés dans  $DM_{gm}(k)$  —

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M\text{Th}(E), \mathbb{Z}(n)[2n]) \rightarrow \text{Hom}(M(\mathbb{P}(\overline{E})), \mathbb{Z}(n)[2n]) \rightarrow \text{Hom}(M(\mathbb{P}(E)), \mathbb{Z}(n)[2n]) \rightarrow 0.$$

Sachant que la relation de définition des classes de Chern entraîne que  $\overline{\mathbf{t}}\mathbf{c}(E) \circ i_{\infty*} = 0$ , on voit donc que la classe  $\overline{\mathbf{t}}\mathbf{c}(E)$  admet un unique antécédent  $\mathbf{t}\mathbf{c}(E)$  par le morphisme

$$\text{Hom}_{DM_{gm}}(M\text{Th}(E), \mathbb{Z}(n)[2n]) \rightarrow \text{Hom}_{DM_{gm}}(M(\mathbb{P}(\overline{E})), \mathbb{Z}(n)[2n]).$$

**Définition 4.3.12.** Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur un  $k$ -schéma lisse de type fini. On appelle morphisme de Thom de  $E$ , le morphisme de  $DM_{gm}(k)$

$$\mathbf{t}(E) = \mathbf{t}\mathbf{c}(E) \sim \pi_{\mathbb{P}(\overline{E})/X*} : M\text{Th}(E) \rightarrow M(X)(n)[2n] \tag{121}$$

donnée par la classe de Thom  $\mathbf{t}\mathbf{c}(E)$

Ce morphisme est en fait compatible avec les morphismes de la définition 4.3.4 qui décomposent le motif d’un fibré projectif. On dispose en effet de la proposition suivante.

**Proposition 4.3.13.** Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ . Le morphisme de Thom (121) est un isomorphisme dont l’inverse est donné par

$$\mathbf{t}(E)^{-1} = (-1)^n \theta_{E*} \circ \mathbf{t}(\overline{E})^{-1} \circ \iota$$

où le morphisme  $\iota$  est l’inclusion canonique

$$\iota : M(X)(n)[2n] \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q].$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $\phi_E$  le morphisme

$$M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{q=0}^n M(q)[2q] \xrightarrow[\mathbf{t}(\overline{E})^{-1}]{} M(\mathbb{P}(\overline{E})) \xrightarrow[\theta_E]{} M\text{Th}(E).$$

$\phi_E$  (courbe au-dessus)

Il résulte du lemme 4.3.11 que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\iota_{\infty*}} & M(\mathbb{P}(\overline{E})) & \xrightarrow{\theta_E} & M\text{Th}(E) & \xrightarrow{+1} & \longrightarrow \\ \uparrow \mathbf{t}(E)^{-1} & & \uparrow \mathbf{t}(\overline{E})^{-1} & & \uparrow \phi_E & & \\ \xleftarrow{+1} \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q] & \xleftarrow{\text{projection}} & \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q] & \xleftarrow{\iota} & M(X)(n)[2n] & & \end{array}$$

est commutatif. Les lignes de ce dernier étant des triangles distingués, le fait que  $\phi_E$  soit un isomorphisme découle alors d’une application classique de l’axiome de l’octaèdre. En effet le

diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M(X)(n)[2n] & \xrightarrow{\phi_E} & M\text{Th}(E) \\
 \uparrow +1 & \swarrow \text{commutatif} & \uparrow +1 \\
 & \text{distingué} & M(\mathbb{P}(\bar{E})) \text{ distingué} \\
 & \searrow \text{commutatif} & \swarrow \theta_E \\
 \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q] & \xleftarrow{\iota(E)} & M(\mathbb{P}(E))
 \end{array}$$

est la partie inférieure d'un octaèdre. On peut donc le compléter en un octaèdre dont la partie supérieure est de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 M(X)(n)[2n] & \xrightarrow{\phi_E} & M\text{Th}(E) \\
 \uparrow +1 & \swarrow +1 \text{ distingué} & \uparrow +1 \\
 & \text{commutatif} & C \text{ commutatif} \\
 & \searrow \text{distingué} & \swarrow +1 \\
 \bigoplus_{q=0}^{n-1} M(X)(q)[2q] & \xleftarrow{\iota(E)} & M(\mathbb{P}(E))
 \end{array}$$

pour un objet  $C \in DM_{gm}(k)$ . Comme  $\iota(E)$  est un isomorphisme, on a  $C = 0$  ce qui prouve bien que  $\phi_E$  est un isomorphisme. Le fait que le morphisme de Thom soit un isomorphisme d'inverse  $(-1)^n \phi_E$  découle alors de la remarque 4.3.10 et du diagramme commutatif suivant qui en résulte

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q] & \xrightarrow{\iota(\bar{E})^{-1}} & M(\mathbb{P}(\bar{E})) & \xrightarrow{\theta_E} & M\text{Th}(E) \\
 \uparrow \iota & \searrow & \downarrow \iota(E) & & \downarrow \iota(E) \\
 M(X)(n)[2n] & \xrightarrow{\iota} & \bigoplus_{q=0}^n M(X)(q)[2q] & \xrightarrow{\sum_{q=0}^n (-1)^q \cdot c_{n-q}(E)} & M(X)(n)[2n].
 \end{array}$$

$(-1)^n \text{id}$

□

Dans la suite nous utiliserons le lemme suivant pour montrer que la « classe de cycle naïve » d'un diviseur de Cartier est donnée par la première classe de Chern du fibré en droite qui lui est associé — lemme 4.5.4.

**Lemme 4.3.14.** *Soit  $E$  un fibré en droites sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ . Le carré*

$$\begin{array}{ccc}
 M(E) & \longrightarrow & M\text{Th}(E) \\
 \downarrow & & \downarrow \iota c(E) \\
 M(X) & \xrightarrow{c_1(E)} & \mathbb{Z}(1)[2]
 \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. — Considérons l’immersion ouverte canonique

$$E \hookrightarrow \mathbb{P}(\overline{E})$$

où  $E$  est identifié au complémentaire de l’hyperplan projectif à l’infini  $\mathbb{P}(E)$ . Il découle de la remarque 4.3.10 que l’on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & M(E) \\
 & \swarrow^{(\pi_{E/X*}, 0)} & \downarrow \\
 M(X) \oplus M(X)(1)[2] & \xleftarrow{\iota(\overline{E})} & M(\mathbb{P}(\overline{E})) \\
 & \searrow_{\overline{\mathfrak{t}}(E)} & \downarrow \\
 & & \mathbb{Z}(1)[2] \\
 & \swarrow_{c_1(E) - \pi_{X*}(1)[2]} & \\
 & & 
 \end{array}$$

Le lemme s’en déduit □

Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E, F$  des fibrés vectoriels de rang fini. Convenons de noter  $p, q$  les projections

$$E \xleftarrow{p} E \oplus F \xrightarrow{q} F.$$

Les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
 F & \longrightarrow & E \oplus F \\
 \pi_{F/X} \downarrow & \square & \downarrow p \\
 X & \longrightarrow & E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & E \oplus F \\
 \pi_{E/X} \downarrow & \square & \downarrow q \\
 X & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

nous donnent des morphismes naturels dans  $DM_{gm}(k)$

$$M_{\pi_{F/X}}(p) : M_F(E \oplus F) \rightarrow MTh(F) \qquad M_{\pi_{E/X}}(q) : M_E(E \oplus F) \rightarrow MTh(F).$$

En utilisant la formule de Whitney et la relation de définition des classes de Thom, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 4.3.15.** *Soient  $E, F$  des fibrés vectoriels de rang fini sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ . On a*

$$\mathfrak{t}(E \oplus F) = [M_{\pi_{F/X}}(p) \circ \mathfrak{t}(E)] \smile [M_{\pi_{E/X}}(q) \circ \mathfrak{t}(F)].$$

*Remarque 4.3.16.* Autrement dit en notant  $n$  le rang du fibré  $E$  et  $m$  celui de  $F$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 MTh(E \oplus F) & \xrightarrow{M_{\pi_{E/X}}(q) \smile [M_{\pi_{F/X}}(p) \circ \mathfrak{t}(E)]} & MTh(F)(n)[2n] \\
 \searrow_{\mathfrak{t}(E \oplus F)} & & \swarrow_{\mathfrak{t}(F)(n)[2n]} \\
 & & M(X)(n+m)[2(n+m)].
 \end{array}$$

Il est montré à la proposition 8.3.26 et au lemme 8.3.29 de [32] que les morphismes de Thom satisfont la proposition suivante que nous utiliserons systématiquement pour établir les propriétés des morphismes de Gysin et des morphismes « classes de cycles ».

**Proposition 4.3.17.** *Soient  $X$  un schéma lisse et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ .*

1. *Soient  $g : Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas lisses,  $F$  un fibré de rang  $m$  sur  $Y$  et  $u$  un monomorphisme de fibré de  $F$  dans  $g^*E$ , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M\mathrm{Th}(F) & \xrightarrow{M\mathrm{Th}(u)} & M\mathrm{Th}(E) \\ \downarrow \mathfrak{t}(Y) & & \downarrow \mathfrak{t}(E) \\ M(Y)(m)[2m] & \xrightarrow{g^*(n)[2n] \sim \mathfrak{c}_{n-m}(g^*E/F)} & M(X)(n)[2n]. \end{array}$$

2. *On suppose  $E$  de rang 1. On note  $\mathcal{E}$  le  $\mathcal{O}_X$ -module inversible associé et  $E^{(r)}$  désigne le fibré vectoriel associé à  $\mathcal{E}^r$ ,  $r$  étant un entier positif non nul. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M\mathrm{Th}(E) & \longrightarrow & M\mathrm{Th}(E^{(r)}) \\ \downarrow \mathfrak{t}(E) & & \downarrow \mathfrak{t}(E^{(r)}) \\ M(X)(n)[2n] & \xrightarrow{r \cdot \mathrm{id}} & M(X)(n)[2n]. \end{array}$$

#### 4.4. Morphismes de Gysin motiviques

Dans la construction des morphismes de Gysin, les espaces de déformation au cône normal jouent un rôle essentiel dans la mesure où ils remplacent en géométrie algébrique les constructions du type « voisinage tubulaire » de la topologie. La sous-section suivante est l'occasion pour nous de préciser les espaces que nous utilisons et de rappeler la construction du morphisme de pureté homotopique de F. Morel et V. Voevodsky [108].

**4.4.1. Isomorphisme de pureté.** — Dans ce travail les espaces de déformation au cône normal que nous considérons sont les versions fibrées sur  $\mathbb{A}^1$  — dans le chapitre 5 de [43] W. Fulton introduit les versions fibrées sur  $\mathbb{P}^1$ . Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de ce dernier. Nous notons  $D_Z(X)$  l'espace de déformation donné par l'éclatement de  $Z$  dans  $\mathbb{A}_X^1$  —  $Z$  étant identifié à un sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_X^1$  via la section nulle —

$$D_Z(X) := B_Z(\mathbb{A}_X^1).$$

En remarquant que le fibré projectif normal de l'immersion de  $Z$  dans  $\mathbb{A}_X^1$  n'est autre que la fermeture projective du fibré normal  $N_Z X$ , cette déformation prend place dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\overline{N_Z X}) & \xrightarrow{\rho_{X,Z}} & D_Z(X) & \xleftarrow{\varrho_{X,Z}} & X \\ \uparrow s \quad \downarrow \pi & & \downarrow \omega_{X,Z} & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \times \{0\} & \xrightarrow{s_0} & X \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{s_1} & X \times \{1\} \end{array} \tag{122}$$

où  $s$  est la restriction à  $Z$  de la section canonique  $s$  de  $\omega$  sur  $Z \times \mathbb{A}^1$  donnée par le morphisme

$$s : Z \times \mathbb{A}^1 = B_Z(Z \times \mathbb{A}^1) \rightarrow D_Z(X).$$



Nous utilisons parfois comme espace de déformation au cône normal un ouvert de  $D_Z(X)$ . Le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z & \xlongequal{\quad} & Z \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

nous donne une immersion fermée de  $B_Z(X)$  dans  $D_Z(X)$  s'insérant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B_Z(X) & \longrightarrow & D_Z(X)|_0 & \longrightarrow & D_Z(X) \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & X & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

et nous notons  $D_Z^\circ(X)$  l'ouvert de  $D_Z(X)$  donné par

$$D_Z^\circ(X) := D_Z(X) \setminus B_Z(X).$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} D_Z(X)|_0 &= B_Z(X) \cup \mathbb{P}(\overline{N_Z X}) \\ B_Z(X) \cap \mathbb{P}(\overline{N_Z X}) &= Z, \end{aligned}$$

la déformation  $D_Z^\circ(X)$  s'introduit donc dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N_Z X & \xrightarrow{\rho_{X,Z}^\circ} & D_Z^\circ(X) & \xleftarrow{\varrho_{X,Z}^\circ} & X \\ \downarrow & & \downarrow \omega_{X,Z}^\circ & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \times \{0\} & \xrightarrow{s_0} & X \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{s_1} & X \times \{1\} \end{array}$$

Le théorème de pureté homotopique démontré par F. Morel et V. Voevodsky dans [108] s'énonce dans le cadre des motifs mixtes de la manière suivante.

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$ . Les morphismes induits par la déformation au cône normal*

$$\begin{aligned} M_Z(\mathbb{P}(\overline{N_Z X})) &\xrightarrow{\rho_{X,Z}^\circ} M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z(X)) \xleftarrow{\varrho_{X,Z}^\circ} M_Z(X) \\ M\text{Th}(N_Z X) &\xrightarrow{\rho_{X,Z}^\circ} M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z^\circ(X)) \xleftarrow{\varrho_{X,Z}^\circ} M_Z(X) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes dans  $DM_-^{\text{eff}}(k)$ .

DÉMONSTRATION. — Nous considérons le cas de l'espace de déformation  $D_Z(X)$ , la démonstration étant analogue pour ce qui concerne  $D_Z^\circ(X)$ . Remarquons tout d'abord que pour un diagramme d'excision étale

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{étale} \\ Z & \xrightarrow[\text{fermée}]{\text{immersion}} & X \end{array}$$

les morphismes canoniques apparaissant verticalement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M_W(U) & \xrightarrow{\varrho_{U,W}} & M_{W \times \mathbb{A}^1}(D_W(U)) & \xleftarrow{\rho_{U,W}} & M\mathrm{Th}(N_W U). \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_Z(X) & \xrightarrow{\varrho_{X,Z}} & M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z(X)) & \xleftarrow{\rho_{X,Z}} & M\mathrm{Th}(N_Z X). \end{array}$$

sont des isomorphismes dans  $DM_{-}^{\mathrm{eff}}(k)$ . Il s'ensuit donc que le morphisme  $\varrho_{X,Z}$  (resp.  $\rho_{X,Z}$ ) est un isomorphisme si et seulement si le morphisme  $\varrho_{U,W}$  (resp.  $\rho_{U,W}$ ) en est un.

Par une descente étale on peut alors se ramener au cas où l'immersion fermée n'est autre que l'immersion canonique via la section nulle  $X \hookrightarrow \mathbb{A}_X^n$ . En effet supposons que les morphismes  $\varrho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  et  $\rho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  soient des isomorphismes pour tout  $k$ -schéma lisse de type fini. Soit  $i : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée triviale *i.e.* donnée à un morphisme étale près par l'immersion de l'espace affine  $\mathbb{A}^{n-c}$  dans  $\mathbb{A}^n$ . On a alors un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z \times_{\mathbb{A}^{n-c}} Z & \longrightarrow & X \times_{\mathbb{A}^n} \mathbb{A}_Z^c \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{étale} \\ \mathbb{A}^{n-c} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \end{array}$$

comme le morphisme  $Z \rightarrow \mathbb{A}^{n-c}$  est étale, le sous-schéma fermé  $Z \times_{\mathbb{A}^{n-c}} Z$  de  $X \times_{\mathbb{A}^n} \mathbb{A}_Z^c$  s'identifie à la réunion disjointe d'un sous-schéma fermé  $Y$  et d'une copie de  $Z$ . Considérons le schéma  $U := X \times_{\mathbb{A}^n} \mathbb{A}_Z^c \setminus Y$ , alors par construction on a deux diagrammes d'excision étale

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{étale} \\ Z & \xrightarrow[\text{fermée}]{\text{immersion}} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{étale} \\ Z & \xrightarrow[\text{fermée}]{\text{immersion}} & \mathbb{A}_Z^c \end{array}$$

ce qui prouve que  $\varrho_{Z,X}$  et  $\rho_{Z,X}$  sont bien des isomorphismes dans le cas où l'immersion est triviale. Supposons maintenant que l'immersion fermée soit quelconque. Puisque les schémas considérés sont lisses, elle est en fait localement triviale pour la topologie de Zariski et le résultat ce déduit du cas précédent par récurrence sur le nombre d'ouverts. Il reste donc à démontrer que les morphismes  $\varrho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  et  $\rho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  sont bien des  $\mathbb{A}^1$ -équivalences faibles. Dans ce cas, l'espace de déformation  $D_X(\mathbb{A}_X^n)$  est particulièrement simple et n'est autre que le schéma

$$D_X(\mathbb{A}_X^n) = X \times \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{P}^n.$$

La projection canonique de  $D_X(\mathbb{A}_X^n)$  sur  $\mathbb{P}_X^n$  induit un isomorphisme

$$\alpha_X : M_{X \times \mathbb{A}^1}(D_X(\mathbb{A}_X^n)) = M_X(\mathbb{P}_X^n)$$

telle que la composée  $\alpha_X \circ \rho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  soit l'identité de  $M_X(\mathbb{P}_X^n)$ , ce qui prouve que  $\rho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  est bien un isomorphisme. D'autre part cette même projection induit via  $\varrho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  l'isomorphisme canonique de motifs  $M_X(\mathbb{A}_X^n) = M_X(\mathbb{P}_X^n)$ . On en déduit que  $\varrho_{X,\mathbb{A}_X^n}$  est aussi un isomorphisme et la proposition se trouve démontrée.  $\square$

Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 4.3.8, on dispose d'un isomorphisme canonique  $M\mathrm{Th}(N_Z X) = M_Z(\mathbb{P}(\overline{N_Z X}))$ . On peut voir que les morphismes de la proposition 4.4.1 sont

compatibles avec cet isomorphisme, autrement dit que le diagramme suivant est commutatif dans  $DM_{-}^{\text{eff}}(k)$

$$\begin{array}{ccc} M_Z(\mathbb{P}(\overline{N_Z X})) & \xrightarrow{\rho_{X,Z}} & M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z(X)) \\ \text{iso.} \uparrow & & \uparrow \text{iso.} \\ M\text{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{\rho_{X,Z}^{\circ}} & M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z^{\circ}(X)) \xleftarrow{\varrho_{X,Z}^{\circ}} M_Z(X). \end{array}$$

**Définition 4.4.2.** Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$ . On appelle isomorphisme de pureté l'isomorphisme

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \xrightarrow{\varrho_{X,Z}^{\circ}} M_{Z \times \mathbb{A}^1}(D_Z^{\circ}(X)) \xrightarrow{(\rho_{X,Z}^{\circ})^{-1}} M\text{Th}(N_Z X). \quad (123)$$

donné par la proposition 4.4.1.

L'isomorphisme de pureté associé à l'immersion fermée de la section nulle dans un fibré vectoriel est compatible aux classes de Thom. Ainsi on dispose du lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

**Lemme 4.4.3.** Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \text{tc}(E) & \\ & \curvearrowright & \\ M\text{Th}(E) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_{X,E}} & M\text{Th}(N_X E) \xrightarrow{\text{tc}(N_X E)} \mathbb{Z}(n)[2n] \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Dans ce cas la déformation au cône normal se réduit au schéma  $D_X^{\circ} E = EA^1$ . En utilisant la proposition 4.3.17 on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(N_X E) & \xrightarrow{\rho_{E,X^*}^{\circ}} & M_{X \mathbb{A}^1}(EA^1) \xleftarrow{\varrho_{X,E^*}^{\circ}} M\text{Th}(E) \\ & \searrow \text{tc}(N_X E) & \downarrow M_{\nu}(\pi) \circ \text{tc}(E) \\ & & \mathbb{Z}(n)[2n] \end{array}$$

où  $\pi$  (resp.  $\nu$ ) désigne la projection de  $EA^1$  (resp.  $X \mathbb{A}^1$ ) sur  $E$  (resp.  $X$ ). Le lemme s'en déduit.  $\square$

**4.4.2. Cas d'une immersion fermée.** — Nous étudions dans cette sous-section la fonctorialité du morphisme de Gysin motivique dans le cas des immersions fermées. Précisons tout d'abord la définition de ce dernier.

**Définition 4.4.4.** Soient  $X, Z$  des  $k$ -schémas lisses de type fini et  $i : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée purement de codimension  $c$ . On appelle morphisme de Gysin associé à  $i$  le composé

$$i^* : M_Z(X) \xrightarrow{\mathfrak{p}_{X,Z}} M\text{Th}(N_Z X) \xrightarrow{\text{t}(N_Z X)} M(Z)(c)[2c]$$

où  $\mathfrak{p}_{X,Z}$  est l'isomorphisme de pureté (123) et  $\text{t}(N_Z X)$  l'isomorphisme de Thom associé au fibré normal.

A partir de la proposition 4.3.13 et du triangle de Mayer-Vietoris

$$M(X \setminus Z) \xrightarrow{j^*} M(X) \rightarrow M_Z(X) \xrightarrow{+1}$$

on obtient le triangle distingué de Gysin

$$M(X \setminus Z) \xrightarrow{j^*} M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(c)[2c] \xrightarrow{+1} \quad (124)$$

et la suite exacte longue de Gysin en cohomologie motivique

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^{p-2c}(Z, \mathbb{Z}(q-c)) &\rightarrow H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(X \setminus Z, \mathbb{Z}(q)) \\ &\rightarrow H^{p+1-2c}(Z, \mathbb{Z}(q-c)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

*Remarque 4.4.5.* Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini,  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$  et  $E$  un fibré vectoriel de rang fini sur  $X$ . On a une décomposition canonique

$$N_Z E = N_Z X \oplus i_{Z,X}^* E.$$

En effet d'après la proposition 19.1.5 (iii) page 186 de [56], on a la suite exacte de fibrés normaux

$$0 \rightarrow N_Z X \rightarrow N_Z E \rightarrow i_{Z,X}^* N_X E \rightarrow 0.$$

Le fibré normal de  $X$  dans  $E$  s'identifie naturellement à  $E$  et le morphisme  $N_Z X \rightarrow N_Z E$  admet une rétraction induite par la projection de  $E$  sur  $X$ , la suite exacte précédente est donc scindée et on a la décomposition voulue.

Pour simplifier nous utiliserons dans la suite la notation

$$M\{n\} := M(n)[2n]$$

dans  $DM_{gm}(k)$ . Parfois nous noterons le produit fibré sur  $k$  par la juxtaposition des schémas. Ces conventions s'étendent aussi à la sous-section suivante. Pour établir les propriétés élémentaires de functorialité du morphisme de Gysin nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.4.6.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini,  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$  purement de codimension  $c$  et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ . Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(E) & \xrightarrow{\iota(E)} & M(X)\{n\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_Z(E) & & M_Z(X)\{n\} \\ & \swarrow i_{Z,E}^* & \nwarrow i_{Z,X}^* \\ & M(Z)\{n+c\}. & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $W$  le sous-schéma fermé de codimension  $c$  de  $E$  défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & E \\ \nu \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

ainsi que le sous-schéma fermé

$$[Z\mathbb{A}^1] \hookrightarrow D_W(E)$$

transformé strict de l'immersion fermée de  $Z\mathbb{A}^1$  dans  $E\mathbb{A}^1$  par l'éclatement définissant la déformation au cône normal  $D_W(E)$ . On peut alors considérer la déformation au cône normal

$$D_{Z,W}(E) = D_{[Z\mathbb{A}^1]}[D_W(E)]$$

associée à l'immersion de  $[Z\mathbb{A}^1]$  dans  $D_W(E)$ . Le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & D_W E \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z & \longrightarrow & [Z\mathbb{A}^1] \end{array}$$

nous donne un morphisme naturel de  $D_Z(E)$  dans  $D_{Z,W}(E)$  et on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & M(E) & \xlongequal{\pi_*} & M(X) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M_Z(E) & \xlongequal{\quad} & M_Z(E) & \longleftarrow & M_W(E) & \xrightarrow{\pi_*} & M_Z(X) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z(E)] & \rightarrow & M_{[Z\mathbb{A}^1]}[D_{Z,W}(E)] & \leftarrow & M_{Z\mathbb{A}^1}[D_W(E)] & \leftarrow & M_{W\mathbb{A}^1}[D_W(E)] & \rightarrow & M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z(X)] \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M\text{Th}(N_Z E) & \rightarrow & M\text{Th}[N_{[Z\mathbb{A}^1]}D_W(E)] & \leftarrow & M_Z(N_W E) & \leftarrow & M\text{Th}(N_W E) & \rightarrow & M\text{Th}(N_Z X) \end{array}$$

Considérons alors les morphismes  $\Theta$  et  $\theta$  défini par

$$\begin{array}{ccccccc} M(E) & \xlongequal{\quad} & M(E) & \xrightarrow{\text{tc}(E)} & \mathbb{Z}\{n\} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ M(D_W(E)) & \xrightarrow{\omega_{E,W}} & M(E\mathbb{A}^1) & \longrightarrow & M(E) & \xrightarrow{\text{tc}(E)} & \mathbb{Z}\{n\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \parallel \\ M(N_W E) & \longrightarrow & M(W) & \longrightarrow & M(E) & \xrightarrow{\text{tc}(E)} & \mathbb{Z}\{n\}. \end{array}$$

$\Theta$  (dotted arrow from  $M(E)$  to  $M(E)$ )  
 $\theta$  (dotted arrow from  $M(N_W E)$  to  $M(E)$ )

Ces derniers rendent le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
M\mathrm{Th}(E) & \xrightarrow{\quad \mathfrak{t}(E) \quad} & & & M(X)\{n\} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
M_Z(E) & \xrightarrow{\quad M_\nu(\pi) \sim \mathfrak{t}(E) \quad} & & & M_Z(X)\{n\} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z(E)] & \longrightarrow & M_{[Z\mathbb{A}^1]}[D_{Z,W}(E)] & \longleftarrow & M_{Z\mathbb{A}^1}[D_W(E)] \longrightarrow M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z(X)]\{n\} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
M\mathrm{Th}(N_Z E) & \longrightarrow & M\mathrm{Th}[N_{[Z\mathbb{A}^1]}D_W(E)] & \longleftarrow & M_Z(N_W E) \longrightarrow M\mathrm{Th}(N_Z X)\{n\}
\end{array}$$

$M_{\nu\mathbb{A}^1}[D_\nu\pi] \sim \Theta$  (between  $M_{Z\mathbb{A}^1}[D_W(E)]$  and  $M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z(X)]\{n\}$ )  
 $M\mathrm{Th}(N_\nu\pi) \sim \theta$  (between  $M_Z(N_W E)$  and  $M\mathrm{Th}(N_Z X)\{n\}$ )

D'après la remarque 4.4.5 on a une décomposition canonique

$$N_Z E = N_Z X \oplus i_{Z,X}^* E$$

et le lemme 4.3.15 assure que le diagramme est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
& & M\mathrm{Th}(N_\nu\pi) \sim \theta \\
& & \longleftarrow M_Z(N_W E) \longrightarrow M\mathrm{Th}(N_Z X)\{n\} \\
& \uparrow & \downarrow \mathfrak{t}(N_Z X)\{n\} \\
M\mathrm{Th}[N_{[Z\mathbb{A}^1]}D_W(E)] & \longleftarrow & M_Z(N_W E) \longrightarrow M\mathrm{Th}(N_Z X)\{n\} \\
& \uparrow & \downarrow \mathfrak{t}(N_Z E) \\
M\mathrm{Th}(N_Z E) & \xrightarrow{\quad \mathfrak{t}(N_Z E) \quad} & M(Z)\{c+d\}.
\end{array}$$

Ce qui prouve le résultat □

**Lemme 4.4.7.** Soient  $X, Z$  des  $k$ -schémas lisses de type fini et

$$W \xrightarrow{i_{W,Z}} Z \xleftarrow{i_{Z,X}} X$$

des immersions fermées purement de codimension respective  $c$  et  $d$ . Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
M_Z(X) & \xrightarrow{\quad \mathfrak{p}_{X,Z} \quad} & M\mathrm{Th}(N_Z X) \xrightarrow{\quad \text{can.} \quad} M_W(N_Z X) \\
\downarrow & & \downarrow i_{W,N_Z X}^* \\
M_W(X) & \xrightarrow{\quad i_{W,X}^* \quad} & M(W)\{c+d\}.
\end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Considérons le sous-schéma fermé

$$[W\mathbb{A}^1] \hookrightarrow D_Z(X)$$

transformé strict de l'immersion fermée de  $W\mathbb{A}^1$  dans  $X\mathbb{A}^1$  par l'éclatement définissant la déformation au cône normal  $D_Z(X)$  et notons  $[W\mathbb{A}^1]^\circ$  sa restriction à l'ouvert  $D_Z^\circ(X)$ . On peut alors considérer la déformation au cône normal

$$D_{W,Z}^\circ(X) := D_{[W\mathbb{A}^1]^\circ}^\circ [D_Z^\circ(X)]$$

associée à l'immersion fermée de  $[W\mathbb{A}^1]^\circ$  dans  $D_Z^\circ(X)$ . On a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} N_Z X & \longrightarrow & D_Z^\circ(X) & \longleftarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ W & \longrightarrow & [W\mathbb{A}^1]^\circ & \longleftarrow & W \end{array}$$

et donc des morphismes naturels

$$D_W^\circ(N_Z X) \longrightarrow D_{W,Z}^\circ(X) \longleftarrow D_W^\circ(X).$$

Ces derniers induisent des isomorphismes de motifs rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{p}_{X,Z} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ M\text{Th}(N_Z X) & \longrightarrow & M_{Z\mathbb{A}^1}[D_Z^\circ(X)] & \longleftarrow & M_Z(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_W(N_Z X) & \longrightarrow & M_{[W \times \mathbb{A}^1]^\circ}[D_Z^\circ(X)] & \longleftarrow & M_W(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{p}_{N_Z X, W} \curvearrowleft M_{W \times \mathbb{A}^1}[D_W^\circ(N_Z X)] & \longrightarrow & M_{[W\mathbb{A}^1]^\circ \mathbb{A}^1}[D_{W,Z}^\circ(X)] & \longleftarrow & M_{W \times \mathbb{A}^1}[D_W^\circ(X)] \curvearrowright \text{p}_{X, W} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M\text{Th}(N_W N_Z X) & \longrightarrow & M\text{Th}[N_{[W\mathbb{A}^1]^\circ}(D_Z^\circ(X))] & \longleftarrow & M\text{Th}(N_W X) \end{array}$$

et le résultat découle de la functorialité des morphismes de Thom de la proposition 4.3.17.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la functorialité des morphismes de Gysin, plus précisément on a la proposition :

**Proposition 4.4.8.** *Soient  $X, Z, W$  des  $k$ -schémas lisses de type fini et*

$$W \xrightarrow{i_{W,Z}} Z \xrightarrow{i_{Z,X}} X$$

*des immersions fermées purement de codimension respective  $c$  et  $d$ . Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{c\} & \longrightarrow & M_W(Z)\{c\} \\ \downarrow & & & & \downarrow i_{W,Z}^*\{c\} \\ M_W(X) & \xrightarrow{i_{W,X}^*} & M(W)\{c+d\} & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — D'après les lemmes 4.4.6 et 4.4.7, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 M_W(X) & \longleftarrow & M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & \\
 & & \downarrow p_{X,Z} & & \\
 & & M\text{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{t(N_Z X)} & M(Z)\{c\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M_W(N_Z X) & & M_W(Z)\{c\} \\
 & & \downarrow i_{W,N_Z X}^* & & \downarrow \\
 & & M(W)\{c+d\} & \xleftarrow{i_{W,Z}^*} & \\
 & \swarrow i_{W,X}^* & & & \searrow
 \end{array}$$

Ce qui prouve la proposition. □

On dispose aussi de la formule de changement de base propre pour les immersions fermées.

**Proposition 4.4.9.** *Étant donné un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{i_{Z,X}} & X \\
 h \downarrow & \square & \downarrow g \\
 W & \xrightarrow{i_{W,Y}} & Y
 \end{array}$$

de schémas lisses dans lequel  $i_{W,Y}$  est une immersion fermée purement de codimension  $c$ .

1. Si  $i_{Z,X}$  est une immersion fermée purement de codimension  $d$ , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{d\} \\
 M_h(g) \downarrow & & \downarrow M(h)\{d\} \smile_{c_e(E)} \\
 M_W(Y) & \xrightarrow{i_{W,Y}^*} & M(W)\{c\}
 \end{array}$$

est commutatif où  $E = h^*N_W Y/N_Z X$  désigne le fibré d'excès d'intersection et  $e$  son rang.

2. En particulier si l'immersion  $i_{W,Y}$  est transverse au morphisme  $g$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{c\} \\
 M_h(g) \downarrow & & \downarrow M(h)\{c\} \\
 M_W(Y) & \xrightarrow{i_{W,Y}^*} & M(W)\{c\}
 \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. — Le carré considéré étant cartésien, le morphisme de fibrés vectoriels

$$N'_h g : N_Z X \rightarrow h^* N_W Y$$

est un monomorphisme et son quotient  $E$  est de rang  $e = c - d$ . Remarquons tout d'abord que le second point est une conséquence immédiate du premier. En effet si  $i_{W,Y}$  et  $g$  sont transverses,



$Z$  est un sous-schéma fermé de  $X$  de codimension pure  $c$ , le morphisme canonique  $N'_h g$  est un isomorphisme et le morphisme

$$M(h)\{d\} \sim \mathbf{c}_e(E)$$

est ainsi égal au morphisme  $M(h)\{c\}$ . Le premier point quant à lui est une conséquence de la proposition 4.3.17 et de la functorialité du morphisme de pureté, puisque en vertu de ces résultats, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 M_Z(X) & \xrightarrow{M_h(g)} & & \xrightarrow{} & M_W(Y) \\
 \downarrow \mathfrak{p}_{Z,X} & \searrow^{M\text{Th}(N_h g)} & & \searrow & \downarrow \mathfrak{p}_{W,Y} \\
 M\text{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{M\text{Th}(N'_h g)} & M\text{Th}(h^* N_W Y) & \xrightarrow{} & M\text{Th}(N_W Y) \\
 \downarrow \mathfrak{t}(N_Z X) & & \downarrow \mathfrak{t}(h^* N_W Y) & & \downarrow \mathfrak{t}(N_W Y) \\
 M(Z)\{d\} & \xrightarrow{M(Z)\{d\} \sim \mathbf{c}_e(E)} & M(Z)\{c\} & \xrightarrow{M(h)\{c\}} & M(W)\{c\}.
 \end{array}$$

$M(h)\{d\} \sim \mathbf{c}_e(E)$

□

**Proposition 4.4.10.** Soient  $X$  un schéma lisse et  $Z \xrightarrow{i_{Z,X}} X$  une immersion fermée où  $Z$  un sous-schéma lisse purement de codimension  $c$ . Soient

$$a : M(Z) \rightarrow M \qquad b : M_Z(X) \rightarrow N$$

des morphismes de  $DM_{gm}$ , on a alors l'égalité

$$\left[ a \sim b \circ (i_{Z,X})_* \right] \{c\} \circ i_{Z,X}^* = \left[ a\{c\} \circ i_{Z,X}^* \right] \sim b$$

en tant que morphisme de  $M_Z(X)$  dans  $(M \otimes N)\{c\}$ .

DÉMONSTRATION. — D'après la proposition 4.4.9 appliqué au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{i_{Z,X}} & X \\
 \downarrow Zi_{ZX} \circ \Delta_Z & \square & \downarrow \Delta_X \\
 ZX & \xrightarrow{i_{Z,X} X} & XX
 \end{array}$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{c\} \\
 \downarrow M(\Delta_X, \Delta_Z) & & \downarrow M(Zi_{ZX} \circ \Delta_Z)\{c\} \\
 M_{ZX}(XX) & \xrightarrow{i_{Z,X}^* XX} & M(ZX)\{c\}
 \end{array}$$

est commutatif. En remarquant que  $i_{ZX,XX}^* = i_{Z,X}^* \otimes M(X)$ , on a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a\{c\} \otimes N} & M\{c\} \otimes N \xleftarrow{a\{c\} \otimes b} \\
 & \searrow & \uparrow \\
 M(Z)\{c\} \otimes N & \xleftarrow{M(Z)\{c\} \otimes b} & M(Z)\{c\} \otimes M_Z(X) = M(Z)\{c\} \otimes M_Z(X) \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & M_Z(X) \otimes M_Z(X) & M(Z)\{c\} \otimes M(Z) \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & M_{\Delta_Z}(\Delta_X) & M(Z)\{c\} \otimes M(Z) \\
 & \uparrow & \parallel \\
 M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{c\} \xrightarrow{M(\Delta_Z)\{c\}} M(Z \times Z)\{c\}
 \end{array}
 \end{array}$$

ce qui prouve la formule de projection. □

**4.4.3. Cas d'un morphisme projectif.** — Nous introduisons maintenant le morphisme de Gysin associé à un morphisme projectif. Nous supposons dans cette sous-section que les schémas sont quasi-projectifs lisses sur  $k$ . Cela assure l'existence d'une famille ample de fibrés en droites sur les schémas que nous considérons. Pour un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$ , on dispose ainsi d'une immersion fermée du fibré projectif associé  $\mathbb{P}(E)$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^n$ .

**Définition 4.4.11.** Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n + 1$  sur  $X$ . On appelle morphisme de Gysin associé à la projection  $\pi_{\mathbb{P}(E)/X}$  de  $\mathbb{P}(E)$  sur sa base, le morphisme canonique

$$\pi_{\mathbb{P}(E)/X}^* := (-1)^n \iota_n^{-1}(E)\{-n\} : M(X) \rightarrow M(\mathbb{P}(E))\{-n\}$$

où  $\iota_n^{-1}(E)$  désigne le morphisme canonique de  $M(X)\{n\}$  dans  $M(\mathbb{P}(E))$ .

Le lemme suivant permet de définir le morphisme de Gysin associé à n'importe quel morphisme projectif de dimension pure.

**Lemme 4.4.12.** Soient  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif purement de dimension  $d$  et  $g = \pi_{\mathbb{P}(E)/Y} \circ i$  une décomposition de  $g$  en une immersion fermée purement de codimension  $c$  suivie d'une projection canonique

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}} Y$$

où  $E$  est un fibré vectoriel sur  $Y$  de rang  $n + 1$  où  $n = c - d$ . Alors le morphisme

$$M(Y) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}^*} M(\mathbb{P}(E))\{-n\} \xrightarrow{i^*\{-n\}} M(X)\{d\}$$

ne dépend que de  $g$ .

DÉMONSTRATION. — Supposons que l'on ait deux factorisations

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{P}(E) & \\
 i_{X,\mathbb{P}(E)} \nearrow & & \searrow \pi_{\mathbb{P}(E)/Y} \\
 X & & Y \\
 i_{X,\mathbb{P}(F)} \searrow & & \nearrow \pi_{\mathbb{P}(F)/Y} \\
 & \mathbb{P}(F) &
 \end{array}$$

où  $E$  et  $F$  sont des fibrés vectoriels sur  $Y$  de rang respectifs  $n_E + 1$  et  $n_F + 1$ . On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}(E) & \xleftarrow{i_{X, \mathbb{P}(E)}} & X & \xrightarrow{i_{X, \mathbb{P}(F)}} & \mathbb{P}(F) \\
 \searrow \mathbb{P}(i) & & & & \swarrow \mathbb{P}(j) \\
 & & \mathbb{P}(E \oplus F) & & \\
 \downarrow \pi_{\mathbb{P}(E \oplus F)/Y} & & & & \\
 & & Y & & 
 \end{array}$$

$\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}$  (à gauche),  $\pi_{\mathbb{P}(F)/Y}$  (à droite),  $\pi_{\mathbb{P}(E \oplus F)/Y}$  (en bas),  $\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}$  (en bas à gauche),  $\pi_{\mathbb{P}(F)/Y}$  (en bas à droite)

dans lequel  $i$  et  $j$  désigne respectivement les inclusions de  $E$  et  $F$  dans  $E \oplus F$ , ce qui permet de supposer qu'il existe un monomorphisme de fibrés vectoriels  $u : E \rightarrow F$ . Notons pour simplifier  $i$  l'immersion fermée de  $\mathbb{P}(E)$  dans  $\mathbb{P}(F)$  induite par le monomorphisme  $u$  et  $n$  la différence entre le rang de  $F$  et le rang de  $E$ . Tout revient à démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M(Y) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}(F)/Y}^*} M(\mathbb{P}(F))\{-n_F\} & \longrightarrow & M_{\mathbb{P}(E)}(\mathbb{P}(F))\{-n_F\} \\
 \downarrow & & \downarrow i^*\{-n_F\} \\
 & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}^*} & M(\mathbb{P}(E))\{-n_E\}
 \end{array}$$

est commutatif. Pour cela nous allons donner une description en « coordonnées » du morphisme de Gysin associé à l'immersion fermée de  $\mathbb{P}(E)$  dans  $\mathbb{P}(F)$ . En notant  $\mathfrak{m}_{r,s}$  le morphisme de  $M(Y)\{s\}$  dans  $M(Y)\{r+n\}$

$$\mathfrak{m}_{r,s} := \iota_r\{E\}\{n\} \circ i^* \circ \iota_s^{-1}(F)$$

induit par le morphisme de Gysin, on obtient une matrice  $\mathfrak{m}$  de taille  $n_E \times n_F$  à coefficients dans  $H^{*,*}(Y)$ . Fixons un entier  $r = 0, \dots, n_E$  d'après la formule de projection de la proposition 4.4.10

$$\begin{aligned}
 \iota_r(E)\{n\} \circ i^* &= \left[ \pi_{\mathbb{P}(E)/Y*} \smile (\mathfrak{c}_1(\lambda_F)^r \circ i_*) \right] \{n\} \circ i^* \\
 &= \left[ \pi_{\mathbb{P}(E)/Y*} \{n\} \circ i^* \right] \smile \mathfrak{c}_1(\lambda_F)^r.
 \end{aligned}$$

En utilisant la relation de définition des classes de Thom en fonction des classes de Chern, on voit que le morphisme  $\pi_{\mathbb{P}(E)/Y*} \{n\} \circ i^*$  est de la forme

$$\pi_{\mathbb{P}(E)/Y*} \{n\} \circ i^* = (-1)^n \iota_n(F) + \sum_{k=1}^n \left[ \mathfrak{n}_k \circ \pi_{\mathbb{P}(F)/Y*} \right] \smile \iota_{n-k}(F)$$

où  $\mathfrak{n}_k$  est un morphisme du motif  $M(Y)$  dans  $\mathbb{Z}\{k\}$ . On en déduit que

$$\mathfrak{m}_{r,s} = \begin{cases} 0 & \text{pour } s > r + n \\ (-1)^n & \text{pour } s = r + n \end{cases}$$

et en particulier

$$(-1)^{n_E} \iota_{n_E}^{-1}(E)\{n\} = i^* \circ \pi_{\mathbb{P}(F)/Y}^* \{n_F\}.$$

On a ainsi  $\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}^* = i^* \{-n_F\} \circ \pi_{\mathbb{P}(F)/Y}^*$  ce qui prouve le lemme. □

Lorsque  $g : X \rightarrow Y$  est un morphisme projectif purement de dimension  $d$  entre  $k$ -schémas quasi-projectifs lisses, nous appellerons morphisme de Gysin associé à  $g$  la composée

$$M(Y) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}(E)/Y}^*} M(\mathbb{P}(E))\{-n\} \xrightarrow{i^*\{-n\}} M(X)\{d\}$$

qui ne dépend d'après le lemme 4.4.12 que de  $g$  et non de la factorisation choisi.

Nous allons maintenant étudier le morphisme de Gysin associé aux morphismes projectifs de dimension pure.

**Lemme 4.4.13.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse, et  $n, m$  des entiers positifs. On a la relation*

$$p^*\{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^n/X}^* \circ q^*\{-m\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^m/X}^* = i_{n,m}^*\{-n-m-nm\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^{nm+n+m}/X}^*$$

où  $i_{n,m}$  désigne l'immersion fermée de Segre

$$i_{n,m} : \mathbb{P}_X^n \times_X \mathbb{P}_X^m \hookrightarrow \mathbb{P}_X^{nm+n+m}$$

et  $p$  (resp.  $q$ ) la projection canonique de  $\mathbb{P}_X^n \times_X \mathbb{P}_X^m$  sur son premier facteur (resp. second facteur).

DÉMONSTRATION. — Posons pour simplifier les notations  $N = nm + n + m$  et

$$\mathbb{P}_X^{n,m} := \mathbb{P}_X^n \times_X \mathbb{P}_X^m.$$

Soient  $s \leq n$  et  $t \leq m$  des entiers, et  $\mathfrak{l}_{s,t}$  le morphisme du motif de  $\mathbb{P}_X^{n,m}$  dans  $M(X)\{s+t\}$  donné par

$$\mathfrak{l}_{s,t} := \pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X*} \circ \left[ \mathbf{c}_1(\lambda_{n+1})^s \circ p_* \circ \mathbf{c}_1(\lambda_{m+1})^t \circ q_* \right].$$

En utilisant la décomposition canonique des motifs de fibrés projectifs, les morphismes  $\mathfrak{l}_{s,t}$ , induisent un isomorphisme canonique

$$M(\mathbb{P}_X^{n,m}) = \bigoplus_{s=0}^n \bigoplus_{t=0}^m M(X)\{s+t\}.$$

Dans la suite de la démonstration, on notera  $\mathfrak{l}_r$  le morphisme  $\mathfrak{l}_r := \mathfrak{l}_r(\mathbb{A}_X^{N+1})$ . Remarquons tout d'abord que par définition des morphismes de Gysin associés aux projections, on a

$$p^*\{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^n/X}^* \circ q^*\{-m\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^m/X}^* = (-1)^{n+m} \mathfrak{l}_{n,m}^{-1}\{-n-m\}.$$

D'autre part le plongement de Segre est compatible aux fibrés en droites canoniques *i.e.*

$$i_{n,m}^* \lambda_{N+1} = p^* \lambda_{n+1} \oplus q^* \lambda_{m+1}$$

en particulier d'après la functorialité des classes de Chern et la formule de Whitney, on a pour  $r \leq n+m$

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_r \circ (i_{n,m})_* &= \left[ \pi_{\mathbb{P}_X^N/X*} \circ \mathbf{c}_1(\lambda_{N+1})^r \right] \circ (i_{n,m})_* \\ &= \pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X*} \circ \left[ \sum_{s+t=r} \mathbf{c}_1(\lambda_{n+1})^s \circ p_* \circ \mathbf{c}_1(\lambda_{m+1})^t \circ q_* \right] = \sum_{s+t=r} \mathfrak{l}_{s,t}. \end{aligned}$$

La formule de projection de la proposition 4.4.10 assure que l'on a

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{s+t=r} \iota_{s,t}\{nm\} \right] \circ i_{n,m}^* &= \left[ \pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X^*} \smile \mathbf{c}_1(\lambda_{N+1})^r \circ (i_{n,m})_* \right] \{nm\} \circ i_{n,m}^* \\ &= \left[ \pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X^*} \{nm\} \circ i_{n,m}^* \right] \smile \mathbf{c}_1(\lambda_{N+1})^r. \end{aligned}$$

En utilisant la relation de définition des classes de Thom en fonction des classes de Chern, on voit que le morphisme  $\pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X^*} \{nm\} \circ i_{n,m}^*$  est de la forme

$$\pi_{\mathbb{P}_X^{n,m}/X^*} \{nm\} \circ i_{n,m}^* = (-1)^{nm} \iota_{n+m} + \sum_{k=1}^{nm} \left[ \mathbf{n}_k \circ \pi_{\mathbb{P}_X^N/X^*} \right] \smile \iota_{nm-k}$$

où les  $\mathbf{n}_k$  sont des morphismes de  $M(X)$  dans  $\mathbb{Z}\{k\}$ . On en déduit finalement une relation de la forme

$$\left[ \sum_{s+t=r} \iota_{s,t}\{nm\} \right] \circ i_{n,m}^* = (-1)^{nm} \iota_{nm+r} + \sum_{k=1}^{nm} \left[ \mathbf{n}_k \circ \pi_{\mathbb{P}_X^N/X^*} \right] \smile \iota_{nm+r-k}$$

ce qui donne en particulier

$$(-1)^N i_{n,m}^* \{-N\} \circ \iota_N^{-1} \{-N\} = (-1)^{n+m} \iota_{n,m}^{-1} \{-n-m\}$$

et le lemme se trouve démontré.  $\square$

**Lemme 4.4.14.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse et  $n$  un entier positif. Étant donnée une immersion fermée purement de codimension  $c$*

$$i_{Z,X} : Z \hookrightarrow X$$

où  $Z$  est un schéma lisse, les morphismes de Gysin associé au carré cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_Z^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_X^n \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

satisfont la relation

$$\pi_{\mathbb{P}_Z^n/Z^*}^* \{c\} \circ i_{Z,X}^* = i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n}^* \{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_X^n/X^*}^*.$$

DÉMONSTRATION. — Fixons un entier positif  $r \leq n$ . En utilisant la formule de projection de la proposition 4.4.10 et la functorialité des classes de Chern, on a

$$\begin{aligned} \iota_r \{c\} \circ i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n}^* &= \left[ \pi_{\mathbb{P}_Z^n/Z^*} \smile \mathbf{c}_1(\lambda_{n+1})^r \circ i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n} \right] \{c\} \circ i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n}^* \\ &= \left[ \pi_{\mathbb{P}_Z^n/Z^*} \{c\} \circ i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n}^* \right] \smile \mathbf{c}_1(\lambda_{n+1})^r. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 4.4.9, on a

$$\pi_{\mathbb{P}_Z^n/Z^*} \{c\} \circ i_{\mathbb{P}_Z^n, \mathbb{P}_X^n}^* = i_{Z,X}^* \circ \pi_{\mathbb{P}_X^n/X^*}$$

ce qui justifie notre assertion.  $\square$

**Proposition 4.4.15.** Soient  $X, Y, Z$  des  $k$ -schémas quasi-projectifs lisses et  $g : X \rightarrow Y$ ,  $h : Y \rightarrow Z$  des morphismes projectifs respectivement purement de dimension  $d$  et  $e$ . On a

$$g^*\{e\} \circ h^* = (h \circ g)^*$$

autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(Z) & \xrightarrow{h^*} & M(Y)\{e\} \\ & \searrow (h \circ g)^* & \downarrow g^*\{e\} \\ & & M(X)\{d+e\}. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — On peut factoriser  $g$  et  $h$  sous la forme

$$g : X \xrightarrow{i_g} \mathbb{P}_Y^n \longrightarrow Y \quad h : Y \xrightarrow{i_h} \mathbb{P}_Z^m \longrightarrow Z.$$

On dispose alors en utilisant les notations du lemme 4.4.13 d'immersions fermées

$$X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_Z^{n,m} \quad \mathbb{P}_Y^n \xrightarrow{j} \mathbb{P}_Z^{n,m}$$

vérifiant les relations

$$h \circ g = \pi_{\mathbb{P}_Z^m/Z^*} \circ q \circ i \quad q \circ j = i_h \circ \pi_{\mathbb{P}_Y^n/Y^*} \quad i = j \circ i_g.$$

Le morphisme  $h \circ g$  quant à lui est donné par la factorisation où intervient l'immersion de Segre

$$h \circ g = \pi_{\mathbb{P}_Z^m/Z^*} \circ i_{n,m} \circ j \circ i_g.$$

La proposition 4.4.8, et les lemmes 4.4.13, 4.4.14 assurent donc que

$$\begin{aligned} (h \circ g)^* &= i_g^*\{-n\} \circ j^*\{-n-m\} \circ i_{n,m}^*\{-N\} \circ \pi_{\mathbb{P}_Z^m/Z^*}^* \\ &= i_g^*\{-n\} \circ j^*\{-n-m\} \circ q^*\{-m\} \circ \pi_{\mathbb{P}_Z^m/Z^*}^* \\ &= \left[ i_g^*\{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_Y^n/Y^*}^* \right] \{e\} \circ i_h^*\{-m\} \circ \pi_{\mathbb{P}_Z^m/Z^*}^* \\ &= g^*\{e\} \circ h^* \end{aligned}$$

ce qui donne la relation voulue. □

**Proposition 4.4.16.** Étant donné un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h'} & X \\ g' \downarrow & \square & \downarrow g \\ Y' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

où  $g$  est un morphisme projectif de dimension pure  $d$  transverse à  $h$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M(Y') & \xrightarrow{(g')^*} & M(X')\{d\} \\ \downarrow h_* & & \downarrow h'_*\{d\} \\ M(Y) & \xrightarrow{g^*} & M(X)\{d\}. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Donnons nous une factorisation de  $g$  sous la forme  $g : X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_Y^n \rightarrow Y$ . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{h'} & X \\
 \downarrow i' & \square & \downarrow i \\
 \mathbb{P}_{Y'}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_Y^n \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 Y' & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 g' \\
 \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} g
 \end{array}$$

dans lequel les carrés sont transverses, on a donc en vertu des propositions 4.4.9 et 4.4.15 et de la définition des morphismes de Gysin associé à une projection

$$\begin{aligned}
 g^* \circ h_* &= i^* \{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_Y^n/Y}^* \circ h_* \\
 &= \left[ i^* \circ (\mathbb{P}_h^n)_* \right] \{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_{Y'}^n/Y'}^* \\
 &= h'_* \{d\} \circ \left[ (i')^* \{-n\} \circ \pi_{\mathbb{P}_{Y'}^n/Y'}^* \right].
 \end{aligned}$$

Ce qui donne par définition la formule de changement de base propre voulue. □

La formule de projection est satisfaite dans le cas particulier des projections d'un espace projectif  $\mathbb{P}_X^n$  sur sa base et se déduit donc par la functorialité de la proposition 4.4.10 concernant les immersion fermées

**Proposition 4.4.17.** *Soient  $g : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif de dimension pure  $d$  et*

$$a : M(X) \rightarrow M \qquad b : M(Y) \rightarrow N$$

*des morphismes de  $DM_{gm}$ , on a alors l'égalité*

$$\left[ a \smile b \circ g_* \right] \{d\} \circ g^* = \left[ a \{d\} \circ g^* \right] \smile b$$

*en tant que morphisme de  $M_Z(X)$  dans  $(M \otimes N)\{d\}$ .*

### 4.5. Un morphisme classe de cycles naif

Le but que nous nous assignons dans cette section est de donner une description en termes des morphismes de Gysin motiviques de l'isomorphisme entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs dont nous avons rappelé la construction dans la sous-section 4.2.2. Nous utilisons dans la suite fréquemment le théorème de semi-pureté de la cohomologie motivique dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

**Théorème (de semi-pureté).** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $Z$  un sous-schéma fermé de codimension  $\geq c$  de  $X$ . On a*

$$H_Z^{2q-p}(X, \mathbb{Z}(q)) = 0$$

*lorsque  $q = c$  et  $p > 0$  ou bien que  $q < c$ .*

DÉMONSTRATION. — Raisonons par récurrence sur la codimension de  $Z$ , le cas  $Z = \emptyset$  étant évident. Comme  $k$  est parfait le lieu singulier de  $Z$  est de codimension  $> 1$  dans  $Z$ . Notons alors  $W$  la réunion de ce lieu singulier et des composantes irréductibles de  $Z$  de codimension  $> c$  dans  $X$ . En considérant la suite exacte longue de cohomologie motivique associée au triangle distingué dans  $DM_{gm}^{eff}(k)$

$$M_{Z \setminus W}(X \setminus W) \rightarrow M_Z(X) \rightarrow M_W(X) \xrightarrow{+1},$$

notre hypothèse de récurrence permet de se ramener au cas où  $Z$  est un sous-schéma fermé lisse purement de codimension  $c$ . L'isomorphisme de Gysin associé à l'immersion fermée de  $Z$  dans  $X$ , le théorème de simplification et la comparaison avec les groupes de Chow supérieurs nous donnent alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} H_Z^{2q-p}(X, \mathbb{Z}(q)) &= \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M_Z(X), \mathbb{Z}(q)[2q-p]) \\ &= \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(Z)(c)[2c], \mathbb{Z}(q)[2q-p]) \\ &= \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(Z), \mathbb{Z}(q-c)[2(q-c)-p]) \\ &= \text{CH}^{q-c}(Z, p). \end{aligned}$$

Ce qui prouve le théorème. □

Dans la preuve donnée ci-dessus, l'hypothèse que le schéma de base soit le spectre d'un corps parfait intervient à trois endroits différents. D'une part via le théorème de simplification de V. Voevodsky et la comparaison entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs mais aussi via la réduction au cas où  $Z$  est lisse. Cette hypothèse s'avère donc essentielle à plus d'un titre.

**4.5.1. Classes fondamentales.** — Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini et  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$  purement de codimension  $p$ . On définit la classe fondamentale  $\mathfrak{d}_X(Z)$  de  $Z$  dans  $X$  par la composition

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{d}_X(Z) & \\ & \curvearrowright & \\ M_Z(X) & \xrightarrow{i_{Z,X}^*} & M(Z)\{p\} \xrightarrow{\pi_{Z*}\{p\}} & \mathbb{Z}\{p\} \end{array}$$

où  $i_{Z,X}$  désigne l'immersion fermée de  $Z$  dans  $X$ .

**Lemme 4.5.1.** *Soient  $X$  un schéma lisse et  $Z$  un sous-schéma fermé lisse de  $X$  purement de codimension  $p$ .*

1. Si  $Z_1, \dots, Z_n$  désignent les composantes connexes de  $Z$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{d}_X(Z) & \\ & \curvearrowright & \\ M_Z(X) & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i=1}^n M_{Z_i}(X) \xrightarrow{\sum_{i=1}^n \mathfrak{d}_X(Z_i)} & \mathbb{Z}\{p\} \end{array}$$

est commutatif. Autrement dit la classe fondamentale de  $Z$  est la somme des classes fondamentales de ses composantes connexes.

2. Si  $Z$  est irréductible de point générique  $\eta_Z$ , on a

$$\mathfrak{d}_X(Z) = \text{lg } \mathcal{O}_{Z, \eta_Z} \cdot \mathfrak{d}_X(Z_{\text{red}}).$$



DÉMONSTRATION. — Le premier point est immédiat. Considérons donc le second. Remarquons dans un premier temps qu'il suffit de prouver l'égalité au voisinage du point générique. En effet si  $U$  est un ouvert de  $X$  contenant  $\eta_Z$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \partial_U(Z \cap U) & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \swarrow & \\ M_{Z \cap U}(U) & \longrightarrow & M_Z(X) & \xrightarrow{\partial_X(Z)} & \mathbb{Z}(p)[2p] \end{array}$$

est commutatif et il résulte donc de l'isomorphisme d'excision  $H_Z^{2p,p}(X) = H_{Z \cap U}^{2p,p}(U)$  que l'on peut se contenter de prouver le résultat en substituant  $U$  à  $X$  et  $Z \cap U$  à  $Z$ .

Nous avons supposé  $Z$  lisse, l'immersion de  $Z$  dans  $X$  est donc régulière et on peut en utilisant la réduction précédente supposer que  $i$  est la composée d'immersions régulières de codimension 1 entre sous-schéma fermés lisses de  $X$ . Ceci permet par additivité de se restreindre à prouver l'égalité dans le cas de la codimension 1. Le résultat découle alors de la proposition 4.3.17. En effet notons  $r$  la longueur de  $\mathcal{O}_{Z,\eta_Z}$ , quitte à localiser encore un peu au voisinage du point générique, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_{\text{red}} & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

l'immersion fermée  $i$  est un épaississement d'ordre  $r$  autrement dit en notant  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) l'idéal de  $\mathcal{O}_X$  définissant  $Z$  (resp.  $Z_{\text{red}}$ ) on a  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^r$ . On a alors

$$i^* N_Z X = [N_{Z_{\text{red}}} X]^{(r)}$$

et la proposition 4.3.17 assure que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & r \cdot \partial_X(Z_{\text{red}}) & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \swarrow & \\ M_{Z_{\text{red}}}(X) & \longrightarrow & M\text{Th}(N_{Z_{\text{red}}} X) & \xrightarrow{r \cdot \text{tc}(N_{Z_{\text{red}}} X)} & \mathbb{Z}(1)[2] \\ \parallel & & \downarrow & \nearrow & \\ M_Z(X) & \longrightarrow & M\text{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{\text{tc}(N_Z X)} & \mathbb{Z}(1)[2] \\ & \searrow & \curvearrowright & \swarrow & \\ & & \partial_X(Z) & & \end{array}$$

ce qui prouve le lemme. □

Supposons que  $Z$  soit un sous-schéma fermé de  $X$  purement de codimension  $p$  mais non nécessairement lisse. Puisque  $k$  est parfait, le lieu singulier de  $Z$  est de codimension  $> 1$  dans  $Z$  et à partir de la suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H_{Z_{\text{sing}}}^{2p,p}(X) \longrightarrow H_Z^{2p,p}(X) \longrightarrow H_{Z_{\text{reg}}}^{2p,p}(X \setminus Z_{\text{sing}}) \longrightarrow H_{Z_{\text{sing}}}^{2p+1,p}(X) \longrightarrow \dots$$

le théorème de semi-pureté assure que l'on a un isomorphisme

$$H_Z^{2p,p}(X) = H_{Z_{\text{reg}}}^{2p,p}(X \setminus Z_{\text{sing}}). \quad (125)$$

En particulier on peut définir la classe fondamentale de  $Z$  comme l'image par cet isomorphisme de la classe fondamentale du lieu lisse  $Z_{\text{reg}}$  de  $Z$  dans  $X \setminus Z_{\text{sing}}$ .

**4.5.2. Classes de cycles naïves.** — En posant pour un sous-schéma fermé intègre  $Z$  de  $X$  de codimension  $p$

$$\text{cl}_X^p([Z]) := \mathfrak{d}_X(Z)$$

on obtient par linéarité un morphisme « classe de cycles »

$$\text{cl}_X^p : Z^p(X) \rightarrow H^{2p,p}(X). \quad (126)$$

*Remarque 4.5.2.* Compte tenu de cette définition et du lemme 4.4.3, la classe de Thom d'un fibré vectoriel  $E$  de rang  $n$  sur un schéma lisse  $X$  se réinterprète comme la classe de cycle de la section nulle de  $E$  et en particulier le morphisme de Thom peut s'écrire :

$$\mathfrak{t}(E) = \text{cl}_E^n([0]_E) \smile \pi_{E/X*}$$

où  $\pi_{E/X}$  est la projection canonique de  $E$  sur sa base.

**Lemme 4.5.3.** *Étant donné un morphisme plat  $g : X \rightarrow Y$  de  $k$ -schémas lisses de type fini, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Z^p(Y) & \xrightarrow{\text{cl}_Y^p} & H^{2p,p}(Y) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ Z^p(X) & \xrightarrow{\text{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X). \end{array}$$

**DÉMONSTRATION.** — Supposons que  $W$  soit un sous-schéma fermé intègre de  $Y$  de codimension  $p$ . Comme  $g$  est plat, on a  $g^*[W] = [Z]$  le sous-schéma fermé  $Z$  étant l'image réciproque de  $W$  dans  $X$ . Notons  $Z_1, \dots, Z_n$  les composantes irréductibles de  $Z$ . Nous pouvons supposer que  $W$  est lisse par définition du morphisme « classe de cycle ». D'après la proposition 4.4.9 on a

$$\text{cl}_Y([W]) \circ g_* := \mathfrak{d}_Y(W) \circ g_* = \mathfrak{d}_X(Z)$$

il suffit donc d'appliquer le lemme 4.5.1 pour obtenir

$$\mathfrak{d}_X(Z) = \sum_{i=1}^n \text{lg } \mathcal{O}_{Z_i, \eta_{Z_i}} \mathfrak{d}_X(Z_i) = \sum_{i=1}^n \text{lg } \mathcal{O}_{Z_i, \eta_{Z_i}} \text{cl}_X([Z_i]) = \text{cl}_X([Z])$$

où  $\eta_i$  désigne le point générique de  $Z_i$ . □

A partir du lemme 4.3.14 et de l'invariance par homotopie on déduit la compatibilité fondamentale de la construction précédente :

**Lemme 4.5.4.** *Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur un schéma lisse  $X$ . On a*

$$\text{cl}_X^1([D]) = \mathfrak{c}_1(\mathcal{O}_X(D)).$$

DÉMONSTRATION. — Nous pouvons supposer que  $D$  est un diviseur de Cartier positif. Notons  $L$  le fibré en droites associé à  $\mathcal{O}_X(D)$  et  $\pi_{L/X}$  la projection canonique de  $L$  sur  $X$ . La section globale canonique  $s_D$  de  $\mathcal{O}_X(D)$ , nous donne une section

$$s_D : X \rightarrow L$$

du fibré  $L$ . Notons  $s_1$  la section du fibré en droites  $\pi_{L/X}^* L$  sur  $L$  obtenu par image inverse de  $s_D$  le long de  $\pi_{L/X}$ . D'autre part l'identité de  $L$  nous fournit une section  $s_0$  de  $\pi_{L/X}^* L$  sur  $L$ . Considérons alors le fibré en droites  $M$  sur  $\mathbb{A}_L^1$ , image inverse de  $\pi_{L/X}^* L$  le long de la projection canonique  $p : \mathbb{A}_L^1 \rightarrow L$ , ainsi que la section de ce dernier donnée par

$$s = tp^* s_1 + (1 - t)p^* s_0$$

où  $t$  désigne le paramètre de la droite affine  $\mathbb{A}^1$ . On a alors en notant  $Z$  le sous-schéma fermé réduit de  $L \times_k \mathbb{A}_k^1$  défini par la section  $s$ , l'égalité de cycles algébriques sur  $L$

$$i_0^*[Z] - i_1^*[Z] = \pi_{L/X}^*[D] - [0_L]$$

donc en vertu du lemme 4.5.3 et de l'invariance par homotopie l'égalité des classes de cohomologie dans  $H^{2,1}(L)$

$$0 = \pi_{L/X}^* \text{cl}_X^1([D]) - \text{cl}_L^1([0_L])$$

Le résultat découle alors du lemme 4.3.14 et de la remarque 4.5.2.  $\square$

Nous allons maintenant déduire de l'invariance par homotopie et des propriétés élémentaires des classes de Thom la compatibilité du morphisme (126) à l'équivalence rationnelle.

**Lemme 4.5.5.** *Les morphismes « classes de cycles » (126) sont compatibles à l'équivalence rationnelle, autrement dit ils induisent des morphismes de groupes abéliens*

$$\text{cl}_X^p : \text{CH}^p(X) \rightarrow H^{2p,p}(X).$$

DÉMONSTRATION. — Rappelons que d'après la proposition 1.6 de [43], un cycle algébrique  $\alpha$  de codimension  $p$  sur  $X$  est rationnellement équivalent à 0 si et seulement si il existe un cycle algébrique  $\beta$  de codimension  $p$  sur  $X\mathbb{P}^1$  tel que l'on ait

$$\alpha = \beta_0 - \beta_\infty.$$

En particulier pour obtenir le lemme, il suffit de vérifier que pour un tel cycle  $\beta$  la classe de cohomologie

$$\text{cl}_X(\beta_t) \in H^{2p,p}(X)$$

est un indépendante du point rationnel de la droite projective choisi. Notons le cycle  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \sum_{Z \in (X\mathbb{P}^1)^{(p)}} \beta_Z[Z]$$

Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des sous-schéma fermé intègre de codimension  $p$  dont la projection sur  $\mathbb{P}^1$  est un morphisme dominant, le sous-schéma fermé  $Z_t$  de  $X$  image inverse de  $Z$  par l'immersion  $i_t$  est alors purement de codimension  $p$  dans  $X$  et le cycle  $\beta_t$  est alors donné par

$$\beta_t = \sum_{Z \in \mathcal{S}} \beta_Z[Z_t]$$

On peut supposer que  $Z$  est lisse. En appliquant le point (1) de la proposition 4.4.9 au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z_t & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow i_t \\ Z & \xrightarrow{i} & X\mathbb{P}^1 \end{array}$$

on obtient compte tenu du fait que  $N_{Z_t}X = j^*N_Z(X\mathbb{P}^1)$

$$\mathrm{cl}_X^p(\beta_t) = \mathrm{cl}_{X\mathbb{P}^1}^p(\beta)_t.$$

Ceci permet de se restreindre à montrer que pour toute classe de cohomologie  $a$  appartenant à  $H^{2p,p}(X\mathbb{P}^1)$  les classes  $a_t$  ne dépendent pas de  $t$  ce qui résulte immédiatement de l'invariance par homotopie et de la connexité de  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

*Remarque 4.5.6.* La cohomologie motivique comme les groupes de Chow ne dépend que de la structure réduite de  $X$  autrement dit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X_{\mathrm{red}}) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{X_{\mathrm{red}}}^p} & H^{2p,p}(X_{\mathrm{red}}) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X) \end{array}$$

est commutatif.

On dispose en cohomologie motivique de l'analogue du morphisme de spécialisation construit au chapitre 5 de [43]. Dans *loc.cit.* W. Fulton utilise un espace de déformation au cône normal fibré sur  $\mathbb{P}^1$ . Étant donné un sous-schéma fermé lisse  $Z$  purement de codimension  $p$ , on a le diagramme de déformation au cône normal

$$\begin{array}{ccccc} N_Z X & \xrightarrow{\bar{\rho}_{X,Z}^\circ} & M_Z^\circ(X) & \xleftarrow{\bar{\varrho}_{X,Z}^\circ} & X\mathbb{A}^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \omega_{X,Z}^\circ & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X\{0\} & \xrightarrow{i_0} & X\mathbb{P}^1 & \longleftarrow & X(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \end{array} \quad (127)$$

où  $M_Z^\circ(X)$  est l'ouvert de  $M_Z(X) = B_{Z\{0\}}(X\mathbb{P}^1)$  complémentaire du sous-schéma fermé  $B_Z(X)$ .

**Lemme 4.5.7.** *Étant donnés deux éléments  $a, b$  de  $H^{2p,p}(M_Z^\circ(X))$  ayant même image dans  $H^{2p,p}(X\mathbb{A}^1)$ , on a l'égalité*

$$(\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* a = (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* b$$

*En particulier on dispose d'un morphisme de spécialisation naturel*

$$\sigma_{X,Z} : H^{2p,p}(X) \rightarrow H^{2p,p}(N_Z X).$$

DÉMONSTRATION. — Le théorème de semi-pureté nous donne une suite exacte

$$H^{2c-2,c-1}(N_Z X) \xrightarrow{(\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^*} H^{2c,c}(M_Z^\circ(X)) \xrightarrow{(\bar{\varrho}_{X,Z}^\circ)^*} H^{2c,c}(X\mathbb{A}^1) \rightarrow 0$$

et il suffit donc de voir que  $(\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* \circ (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* = 0$  ce qui résulte du lemme 4.3.14 compte tenu le fibré normal de l'immersion de  $N_Z X$  dans  $M_Z^\circ(X)$  est trivial  $\square$

La construction des morphismes « classes de cycles » est compatible aux morphismes de Gysin « ordinaire » construit dans [43].

**Lemme 4.5.8.** *Étant donnée une immersion fermée régulière  $i : Z \hookrightarrow X$  de codimension pure, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ \mathrm{CH}^p(Z) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Z^p} & H^{2p,p}(Z). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — La démonstration suit les étapes de la construction des morphismes de Gysin « ordinaires ». Donnons nous dans un premier temps un diviseur de Cartier  $D$  lisse sur  $X$  et considérons l’immersion fermée  $i : |D| \hookrightarrow X$  du support de  $D$  dans  $X$ . Il s’agit de montrer que

$$\mathrm{cl}_X^p(\alpha) \circ i_* = \mathrm{cl}_{|D|}^p(i^* \alpha)$$

pour un cycle algébrique  $\alpha$  sur  $X$  de codimension  $p$ . Par linéarité on peut supposer que  $\alpha$  est de la forme  $[Z]$  où  $Z$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  de codimension  $p$ . Notons  $j$  l’immersion de  $Z$  dans  $X$ . Le cycle  $i^* \alpha$  est alors le cycle 1-codimensionnel sur  $Z$  associé au pseudo-diviseur de Cartier

$$D' = (j^* \mathcal{O}_X(D), Z \cap |D|, j^* s_D)$$

vu comme cycle  $p$ -codimensionnel sur  $|D|$ . En décomposant le diviseur  $D$  en la différence de deux diviseurs de Cartier positifs on peut se ramener à supposer que  $D$  est positif et par définition de la classe de cycle que  $Z$  est lisse.

Dans ce cas on dispose du diagramme commutatif d’immersions fermées régulières, horizontalement purement de codimension un et verticalement purement de codimension  $p$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Y}(D') \hookrightarrow Z & & \mathrm{Y}(D)_{\mathrm{red}} \xrightarrow{\mathrm{can.}} \mathrm{Y}(D) \xrightarrow{\bar{i}} X \\ \downarrow \wr & \text{avec} & \parallel \\ \mathrm{Y}(D) \xrightarrow{\bar{i}} X & & |D| \xrightarrow{i} X \end{array}$$

Les fibrés d’excès d’intersection sont nuls et la formule d’excès d’intersection de la proposition 4.4.9 assure que l’on a l’égalité

$$\mathrm{cl}_X^p(\alpha) \circ i_* = \mathrm{cl}_X^p(\alpha) \circ \bar{i}_* = \mathrm{cl}_X^p([Z]) \circ \bar{i}_* = \mathrm{cl}_{\mathrm{Y}(D)}([Y(D')]) = \mathrm{cl}_{|D|}^p(i^*[Z]) = \mathrm{cl}_{|D|}^p(i^* \alpha)$$

l’avant dernière égalité résultant de la remarque 4.5.6.

Le cas particulier où  $X$  est un fibré vectoriel de rang  $p$  sur  $Z$  et  $i$  est la section nulle de  $E$  est quant à lui immédiat. En effet par définition le morphisme de Gysin  $i^*$  est alors l’inverse de l’image inverse  $\pi_E^*$  et le résultat découle alors de l’invariance par homotopie et du lemme 4.5.3.

Considérons maintenant le cas général. En utilisant le lemme 4.5.7 et la description du morphisme de spécialisation donné dans la proposition 5.2 de *loc. cit.*, le lemme 4.5.3 ainsi que le cas

précédemment traité assurent que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{CH}^p(M_Z^\circ X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{M_Z^\circ X}^p} & H^{2p,p}(M_Z^\circ X) & & \\
 \downarrow (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* & \searrow (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* & \downarrow \mathrm{cl}_{X^\mathbb{A}^1}^p & \searrow (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* & \\
 \mathrm{CH}^p(X^\mathbb{A}^1) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{X^\mathbb{A}^1}^p} & H^{2p,p}(X^\mathbb{A}^1) & & \\
 \downarrow (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* & \nearrow \mathrm{cl}_{N_Z X}^p & \downarrow (\bar{\rho}_{X,Z}^\circ)^* & \nearrow \pi^* & \\
 \mathrm{CH}^p(N_Z X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{N_Z X}^p} & H^{2p,p}(N_Z X) & & \\
 \downarrow \sigma_{Z,X} & \nearrow \pi^* & \downarrow \sigma_{Z,X} & \nearrow \pi^* & \\
 \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X) & &
 \end{array}$$

les notations étant celles du diagramme (127). En particulier on voit que les morphismes « classes de cycles » sont compatibles aux morphismes de spécialisation. D'autre part on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{s} & N_Z X & \xrightarrow{\bar{\rho}_{X,Z}^\circ} & M_Z^\circ X & \xleftarrow{\bar{\rho}_{X,Z}^\circ} & X^\mathbb{A}^1 \\
 & & & & \downarrow \bar{\omega}_{X,Z}^\circ & & \downarrow \pi \\
 & & & & X\mathbb{P}^1 & \longrightarrow & X \\
 & \searrow i & & & & &
 \end{array}$$

où  $s$  désigne la section nulle et donc l'égalité  $s^*\sigma_{Z,X} = i^*$ . Il résulte de ce qui précède et de la définition du morphisme de Gysin « ordinaire » que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & i^* & & \\
 & \xrightarrow{\sigma_{Z,X}} & & \xrightarrow{s^*} & \\
 \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\sigma_{Z,X}} & \mathrm{CH}^p(N_Z X) & \xrightarrow{s^*} & \mathrm{CH}^p(Z) \\
 \downarrow \mathrm{cl}_X^p & & \downarrow \mathrm{cl}_{N_Z X}^p & & \downarrow \mathrm{cl}_Z^p \\
 H^{2p,p}(X) & \xrightarrow{\sigma_{Z,X}} & H^{2p,p}(N_Z X) & \xrightarrow{s^*} & H^{2p,p}(Z) \\
 & & i^* & &
 \end{array}$$

est commutatif, ce qui prouve la compatibilité voulue. □

**Lemme 4.5.9.** *Les morphismes « classes de cycles » sont compatibles aux produits, autrement dit le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(Y) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p \otimes \mathrm{cl}_Y^q} & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(Y) \\
 \downarrow \times & & \downarrow \otimes \\
 \mathrm{CH}^{p+q}(XY) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{XY}^{p+q}} & H^{2p+2q,p+q}(XY).
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que  $Z$  (resp.  $W$ ) soit un sous-schéma fermé intègre de  $X$  (resp.  $Y$ ) de codimension  $p$  (resp.  $q$ ). On a un isomorphisme canonique

$$N_{ZW}(XY) = N_Z X \boxplus N_W Y$$

et en particulier  $\mathbf{tc}(N_{ZW}XY) = \mathbf{tc}(N_ZX) \otimes \mathbf{tc}(N_WY)$ . Par functorialité du morphisme de pureté cela donne l'égalité

$$\mathrm{cl}_{XY}^{p+q}([Z] \times [W]) = \mathrm{cl}_X^p([Z]) \otimes \mathrm{cl}_Y^q([W])$$

Par linéarité cela entraîne que le diagramme voulu est commutatif. □

**Corollaire 4.5.10.** *Les morphismes « classes de cycles »*

$$\mathrm{cl}_X^p : \mathrm{CH}^p(X) \rightarrow H^{2p,p}(X)$$

sont des morphismes d'anneaux, autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p \otimes \mathrm{cl}_X^q} & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(X) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathrm{CH}^{p+q}(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^{p+q}} & H^{2p+2q,p+q}(X). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Les lemmes 4.5.8 et 4.5.9 assurent que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p \otimes \mathrm{cl}_X^q} & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(X) \\ \downarrow \times & & \downarrow \otimes \\ \mathrm{CH}^{p+q}(XX) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{XX}^{p+q}} & H^{2p+2q,p+q}(XX) \\ \downarrow \Delta_X^* & & \downarrow \Delta_X^* \\ \mathrm{CH}^{p+q}(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^{p+q}} & H^{2p+2q,p+q}(X) \end{array}$$

ce qui assure la compatibilité aux produits d'intersection □

En utilisant la relation de définition des classes de Chern, les lemmes 4.5.3, 4.5.4 et le corollaire 4.5.10, on obtient

**Corollaire 4.5.11.** *Soient  $X$  un schéma lisse et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $X$ . Pour  $q = 0, \dots, n$  on a*

$$\mathrm{cl}_X^n(c_q(E)) = \mathbf{c}_q(E).$$

On dispose aussi de la compatibilité au morphisme de Gysin « raffiné » de la théorie de l'intersection construit par W. Fulton dans [43].

**Corollaire 4.5.12.** *Étant donné un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow h & \square & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où  $i$  est une immersion fermée régulière de codimension pure, de fibré d'excès d'intersection  $E = h^*N_ZX/N_WY$  de rang  $e$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(Y) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^p} & H^{2p,p}(Y) \\ \downarrow i_g^! & & \downarrow \mathbf{c}_e(E) \smile j^* \\ \mathrm{CH}^{p+e}(W) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_W^{p+e}} & H^{2p+2e,p+e}(W). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Cela résulte immédiatement de la formule d'excès d'intersection en théorie de l'intersection (théorème 6.3 de [43]). En effet on a d'après le lemme 4.5.8 et les corollaires 4.5.10 et 4.5.11

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_W^{p+e}(i_g^! \alpha) &= \mathrm{cl}_W^{p+e}[\mathbf{c}_e(E) \smile j^* \alpha] = \mathrm{cl}_W^e[\mathbf{c}_e(E)] \smile \mathrm{cl}_W^p(j^* \alpha) \\ &= \mathbf{c}_e(E) \smile j^* \mathrm{cl}_X^p(\alpha) \end{aligned}$$

pour tout élément  $\alpha \in \mathrm{CH}^p(Y)$ . □

**Corollaire 4.5.13.** *Étant donné un morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de schémas lisses, le carré suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(Y) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^p} & H^{2p,p}(Y) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $i$  l'immersion fermée régulière du graphe de  $g$  identifié avec  $X$  dans le produit  $XY$  et  $\pi$  la projection de  $XY$  sur  $Y$ , on a d'après les lemmes 4.5.3 et 4.5.8

$$g^* \mathrm{cl}_Y^p(\alpha) = i^* \pi^* \mathrm{cl}_Y^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^p(i^* \pi^* \alpha) = \mathrm{cl}_X^p(g^* \alpha)$$

pour tout élément  $\alpha$  de  $\mathrm{CH}^p(Y)$ . □

**Lemme 4.5.14.** *Si  $g : X \rightarrow Y$  est un morphisme projectif purement de dimension  $d$ , le carré suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^p} & H^{2p,p}(X) \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ \mathrm{CH}^{p+d}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^{p+d}} & H^{2p+2d,p+d}(Y) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Le cas où  $g$  est une immersion fermée  $i$  d'un schéma lisse  $Z$  purement de codimension  $c$  dans un schéma lisse  $X$  est une conséquence de la functorialité des morphismes de Gysin de la proposition 4.4.8, on a en effet pour un sous-schéma fermé intègre  $W$  de codimension  $p$  dans  $Z$

$$i_{Z,X*} \left[ \mathrm{cl}_Z^p([W]) \right] = \left[ \pi_{Z*} \{p\} \circ i_{Z,X}^* \right] \{c\} \circ i_{W,X}^* = \pi_{X*} \{p+c\} \circ i_{W,X}^* = \mathrm{cl}_X^{p+c} \left[ i_{Z,X*} [W] \right].$$

Il suffit ensuite par functorialité d'examiner le cas où  $g$  est la projection  $\pi$  du fibré projectif  $\mathbb{P}(E)$  sur sa base,  $E$  étant un fibré vectoriel de rang  $n+1$  sur  $X$ . Dans ce cas le lemme 4.5.3 et les



corollaires 4.5.10, 4.5.11 assurent que pour  $q = 0, \dots, n$  et un élément  $\alpha$  de  $\mathrm{CH}^{p-q}(X)$

$$\pi^* \mathrm{cl}_X^{p-q}(\alpha) \smile \mathbf{c}_1(\lambda_E)^q = \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(E)}^p \left[ \pi^* \alpha \smile \mathbf{c}_1(\lambda_E) \right]$$

autrement dit les morphismes « classes de cycles » préservent les décompositions naturelles

$$H^{2p,p}(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{q=0}^n H^{2p-2q,p-q}(X) \quad \mathrm{CH}^p(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{q=0}^n \mathrm{CH}^{p-q}(X)$$

pour la dernière on se référera par exemple au théorème 3.3 de [43]. En particulier en prenant  $q = n$ , on a pour tout élément  $\alpha \in \mathrm{CH}^p(X)$

$$\pi_* \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(E)}^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^{p-n}(\pi_* \alpha).$$

□

**4.5.3. Compatibilité fondamentale.** — Nous montrons maintenant que les classes de cycles dont nous avons étudiées précédemment coïncident avec l’isomorphisme de V. Voevodsky. Cette description concrète nous sera nécessaire dans le chapitre 5 pour obtenir la proposition 5.4.8 donnant le lien entre les morphismes classe de cycles  $\ell$ -adiques construits par A. Grothendieck [29, 6, 70] et prolongés par T. Geisser et M. Levine [45, 79], l’isomorphisme de V. Voevodsky et le morphisme induit aux niveaux de la cohomologie par le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique que nous construisons.

Nous disposons ainsi du résultat suivant.

**Proposition 4.5.15.** *Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse. Pour tout élément  $\alpha \in \mathrm{CH}^p(X)$ , on a*

$$\mathrm{cl}_X^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^p(\alpha).$$

DÉMONSTRATION. — Il s’agit de prouver que pour tout sous-schéma fermé intègre  $Z$  de codimension  $p$  de  $X$ , on a

$$\mathrm{cl}_X^p([Z]) = \mathrm{cl}_X^p([Z]).$$

En utilisant l’isomorphisme (125) on peut supposer que  $Z$  est lisse. Notons  $i$  l’immersion de  $Z$  dans  $X$ , il suffit alors de prouver que

$$i_* \circ \mathrm{cl}_Z^q(\alpha) = \mathrm{cl}_X^{p+q}(i_* \alpha)$$

pour tout élément  $\alpha \in \mathrm{CH}^q(Z)$ . Par soucis de simplification, on note  $E$  le fibré normal de  $i$ . En utilisant le lemme 4.2.4 et le corollaire 4.2.6, on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^p(s_*[Z]) \smile \pi^* \mathrm{cl}_Z^q(\alpha) &= \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^p(s_*[Z]) \smile \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^q(\pi^* \alpha) \\ &= \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^{p+q}(s_*[Z] \smile \pi^* \alpha) \\ &= \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^{p+q}(s_* \alpha) \end{aligned}$$

les notations étant celles du diagramme (122). On a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\overline{E}) & \xrightarrow{\rho_{X,Z}} & D_Z(X) & & \\ \uparrow s & & \uparrow s & \searrow \omega_{X,Z} & \\ Z & \longrightarrow & Z \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & X \times \mathbb{A}^1 \end{array}$$

et donc en utilisant la compatibilité aux images inverses on a :

$$\begin{aligned} \rho^* \mathbf{cl}_{D_Z(X)}^{p+q}(s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) &= \mathbf{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^{p+q}(\rho_{X,Z}^* s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) \\ &= \mathbf{cl}_{\mathbb{P}(\overline{E})}^{p+q}(s_* \alpha) \end{aligned}$$

De même

$$\varrho_{X,Z}^* \mathbf{cl}_{D_Z(X)}^{p+q}(s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) = \mathbf{cl}_X^{p+q}(i_* \alpha)$$

Par définition du morphisme de Gysin il suffit donc de prouver que

$$\mathbf{cl}_{\mathbb{P}(E)}^p(s_*[Z]) = \overline{\mathbf{tc}}(E)$$

où ce qui revient au même que la classe de Thom du fibré normal de  $i$  est donnée en terme de classe de cycle par

$$\mathbf{tc}(E) = \mathbf{cl}_E^p([Z]).$$

Supposons plus généralement que  $E$  soit un fibré vectoriel de rang  $r$  sur un  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ . En utilisant la remarque 4.3.6, le lemme 4.2.4 ainsi que la functorialité des classes de Thom, on peut supposer que  $E$  est une somme directe de fibrés en droites  $E_1, \dots, E_r$  sur  $X$ . Notons  $q_i$  la projection sur le  $i$ -ème facteur. Le lemme 4.2.4 et le corollaire 4.2.6 nous donnent alors

$$\mathbf{cl}_E^r([X]) = q_1^* \mathbf{cl}_{E_1}^1([X]) \smile \dots \smile q_r^* \mathbf{cl}_{E_r}^1([X]).$$

Comme par ailleurs les propriétés des classes de Thom assurent que

$$\mathbf{tc}(E) = q_1^* \mathbf{tc}(E_1) \smile \dots \smile q_r^* \mathbf{tc}(E_r),$$

on se trouve ramené au cas où  $E$  est un fibré en droites qui découle des lemmes 4.3.14 et 4.5.4.  $\square$

## CHAPITRE 5

### RÉALISATION $\ell$ -ADIQUE DES MOTIFS MIXTES

Nous exposons dans ce dernier chapitre le résultat principal cette thèse. Il s'agit de la construction d'un foncteur de réalisation  $\ell$ -adique à coefficients entiers pour les motifs mixtes géométriques de Voevodsky — théorème 5.2.1 — et d'une version modérée de ce dernier — corollaire 5.2.7. Tout le problème consiste à étendre le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des  $S$ -schémas lisses de type fini

$$\begin{aligned} R_\ell : \mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ X &\longmapsto R\pi_{X*}\pi_X^*\mathbb{Z}_S/\ell^* \end{aligned} \tag{128}$$

en un foncteur triangulé tensoriel sur la catégorie des motifs mixtes géométriques.

Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, nous montrons que la version à coefficients rationnels du foncteur que nous obtenons avec le théorème 5.2.1 coïncide avec la composante  $\ell$ -adique du foncteur de réalisations mixtes construit par A. Huber dans [69, 68]. Ce résultat — proposition 5.3.1 — fait l'objet de la section 5.3 tandis que la dernière section est consacrée à montrer que sur un corps parfait le morphisme induit par le foncteur de réalisation entre la cohomologie motivique et la cohomologie  $\ell$ -adique est compatible via l'isomorphisme de V. Voevodsky avec les morphismes classes de cycles  $\ell$ -adiques.

#### 5.1. Réalisation $\ell$ -adique et motifs de Chow

Cette section n'est pas nécessaire à la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des motifs mixtes, nous l'avons incluse dans le seul but d'éclairer ou de justifier le point de vue que nous avons adopté. Comme nous le voyons dans cette section le formalisme de dualité des six opérations de A. Grothendieck permet de construire aisément un foncteur de réalisation  $\ell$ -adique pour les motifs de Chow sur un corps. Ce genre de construction ne s'étend malheureusement pas aux motifs mixtes, pour lesquels il s'avère nécessaire de pouvoir travailler avec un « bon modèle à homotopie près ». Ceci constitue la raison pour laquelle nous avons choisi de travailler avec la résolution de Godement et d'étudier ses propriétés relatives aux transferts. Ce besoin de considérer un « bon modèle à homotopie près » explique aussi la raison pour laquelle nous utilisons la catégorie de coefficients  $\ell$ -adiques construite par T. Ekedahl dans [35] plutôt que celle introduite par P. Deligne dans [30].

**5.1.1. Correspondances cohomologiques.** — Dans cette sous-section nous rappelons le formalisme des correspondances cohomologiques tel qu'il est exposé dans [6, Exposé III].

**Nous supposons que  $S$  est noethérien régulier de dimension  $\leq 1$ .**

Considérons le diagramme de  $S$ -schémas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times_S Y \times_S Z & & \\
 & \swarrow p_{XY}^{XYZ} & \downarrow p_{XZ}^{XYZ} & \searrow p_{YZ}^{XYZ} & \\
 X \times_S Y & & X \times_S Z & & Y \times_S Z \\
 \downarrow p_X^{XY} & \swarrow p_Y^{XY} & \swarrow p_Z^{XZ} & \searrow p_Z^{YZ} & \downarrow p_Z^{YZ} \\
 X & & Y & & Z
 \end{array}$$

Soient  $F \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$  et  $G \in D_c^b(Y, \mathbb{Z}_\ell)$ , d'après [6, Exposé III] les correspondances cohomologiques de  $F$  dans  $G$  sont les éléments du groupe de cohomologie

$$ccoh_S(F, G) := H^0(X \times_S Y, \underline{ccoh}_S(F, G))$$

où  $\underline{ccoh}_S(F, G)$  est l'objet de  $D_c^b(X \times_S Y, \mathbb{Z}_\ell)$  donné par

$$\underline{ccoh}_S(F, G) = \mathbb{D}_S F \boxtimes G = R\mathbf{H}\mathbf{om} \left( p_X^{XY*} F, p_Y^{XY!} G \right).$$

*Remarque 5.1.1.* Nous noterons plus simplement

$$\underline{ccoh}_S(X, Y) := \underline{ccoh}_S(\mathbb{Z}_{\ell, X}, \mathbb{Z}_{\ell, Y}) \quad ccoh_S(X, Y) := H^0(X \times_S Y, \underline{ccoh}(X, Y))$$

et nous parlerons de correspondances cohomologiques de  $X$  dans  $Y$ . Supposons que  $X$  soit lisse de type fini et purement de dimension  $d$  sur  $S$ , alors dans ce cas

$$\mathbb{D}_S \mathbb{Z}_{\ell, X} = \mathbb{Z}_{\ell, X}(d)[2d]$$

et donc  $ccoh_S(X, Y) = H^{2d}(X \times_S Y, \mathbb{Z}_\ell(d))$ .

Dans le cas des  $S$ -schémas non propres, les correspondances cohomologiques possèdent un « ersatz » de composition qui ne fournit véritablement un moyen de composer les correspondances que lorsque l'on suppose les schémas propres sur  $S$ .

En effet considérons des objets  $F \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ ,  $G \in D_c^b(Y, \mathbb{Z}_\ell)$  et  $H \in D_c^b(Z, \mathbb{Z}_\ell)$ . Compte tenu de l'accouplement parfait de dualité

$$G \otimes \mathbb{D}_S G \rightarrow \pi_Y^! \mathbb{Z}_\ell$$

et de la formule de Künneth, on a un morphisme canonique

$$\begin{aligned}
 \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes_Y \underline{ccoh}_S(G, H) &= p_X^{XYZ*} \mathbb{D}_S F \otimes p_Y^{XYZ*} \left[ G \otimes \mathbb{D}_S G \right] \otimes p_Z^{XYZ*} H \\
 &\rightarrow p_{XZ}^{XYZ*} \left[ \mathbb{D}_S F \boxtimes H \right] \otimes p_Y^{XYZ*} \pi_Y^! \mathbb{Z}_\ell = \left[ \mathbb{D}_S F \boxtimes H \right] \boxtimes \pi_Y^! \mathbb{Z}_\ell \\
 &= p_{XZ}^{XYZ!} \underline{ccoh}_S(F, H).
 \end{aligned}$$

et donc un morphisme canonique dans  $D_c^b(X \times_S Z, \mathbb{Z}_\ell)$

$$Rp_{XZ}^{XYZ!} \left[ \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes_Y \underline{ccoh}_S(G, H) \right] \rightarrow \underline{ccoh}_S(F, H). \quad (129)$$

*Remarque 5.1.2.* En général, on ne dispose via le morphisme (129) que d'un morphisme

$$\circ^{\text{ersatz}} : ccoh_S(F, G) \otimes ccoh_S(G, H) \rightarrow \text{Hom}(p_X^{XYZ*} F, p_Z^{XYZ!} H)$$

cependant en supposant  $Y$  propre sur  $S$ , le morphisme (129) induit un morphisme sur les groupes de correspondances cohomologiques

$$\circ : ccoh_S(F, G) \otimes ccoh_S(G, H) \rightarrow ccoh_S(F, H). \quad (130)$$

On remarquera d'ailleurs que lorsque  $Y$  est propre, on a un morphisme canonique

$$\begin{aligned} p_{XZ*}^{XYZ} \underline{RHom} \left( p_X^{XYZ*} F, p_Z^{XYZ!} H \right) &= p_{XZ!}^{XYZ} p_{XZ}^{XYZ} \underline{RHom} \left( p_X^{XZ*} F, p_Z^{XZ!} H \right) \\ &\rightarrow \underline{RHom} \left( p_X^{XZ*} F, p_Z^{XZ!} H \right) \end{aligned}$$

induisant en passant aux sections globales un morphisme

$$\text{Hom} \left( p_X^{XYZ*} F, p_Z^{XYZ!} H \right) \rightarrow ccoh_S(F, H).$$

Ce dernier permet de retrouver la composition à partir de « l'ersatz » de composition, via le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} ccoh_S(F, G) \otimes ccoh_S(G, H) & \xrightarrow{\circ^{\text{ersatz}}} & \text{Hom} \left( p_X^{XYZ*} F, p_Z^{XYZ!} H \right) \\ & \searrow \circ & \downarrow \\ & & ccoh_S(F, H). \end{array}$$

*Remarque 5.1.3.* Supposons les schémas propres et lisses de dimension pure sur  $S$ , alors le morphisme de composition

$$ccoh_S(X, Y) \otimes ccoh_S(Y, Z) \rightarrow ccoh_S(X, Z)$$

décrit précédemment est donné compte-tenu de la remarque 5.1.1 par la composition usuelle des correspondances :

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ*}^{XYZ} \left[ p_{XY}^{XYZ*} \alpha \smile p_{YZ}^{XYZ*} \beta \right]$$

la projection étant donnée par le morphisme de Gysin

$$p_{XZ*}^{XYZ} : H^{2d_Y+2d_X}(X \times_S Y \times_S Z, \mathbb{Z}_\ell(d_Y + d_X)) \rightarrow H^{2d_X}(X \times_S Z, \mathbb{Z}_\ell(d_X)).$$

**5.1.2. Correspondances cohomologiques finies.** — Comme dans le cas des correspondances algébriques, les correspondances cohomologiques arbitraires ne se composent pas. En revanche, il est tout de même possible de considérer une classe plus restreinte de correspondances cohomologiques que nous appellerons correspondances cohomologiques finies dans la mesure où elles jouent dans le cadre  $\ell$ -adique un rôle analogue à celui des correspondances finies de A. Suslin et V. Voevodsky au niveau des cycles.

*Définition 5.1.4.* Soient  $X, Y$  des schémas et  $F \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ ,  $G \in D_c^b(Y, \mathbb{Z}_\ell)$ . On note  $\underline{cc}_S(F, G)$  l'objet

$$\underline{cc}_S(F, G) := Rp_{Y!}^{XY} ccoh_S(F, G)$$

de  $D_c^b(Y, \mathbb{Z}_\ell)$  et on définit le groupe abélien des correspondances cohomologiques finies par :

$$cc(F, G) := H^0(Y, \underline{cc}(F, G)).$$

Par définition, on a un monomorphisme canonique

$$cc_S(F, G) \rightarrow ccoh_S(F, G)$$

qui est un isomorphisme lorsque  $X$  est propre sur  $S$ . En appliquant le foncteur  $Rp_{Z!}^{XZ}$  au morphisme (129), on obtient un morphisme

$$Rp_{Z!}^{XZ} Rp_{XZ!}^{XYZ} \left[ \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes_Y \underline{ccoh}_S(G, H) \right] \rightarrow \underline{cc}_S(F, H). \quad (131)$$

Or par la formule de Künneth, on a un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned} Rp_{Z!}^{XZ} Rp_{XZ!}^{XYZ} \left[ \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes_Y \underline{ccoh}_S(G, H) \right] &= Rp_{Z!}^{YZ} Rp_{YZ!}^{XYZ} \left[ \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes_Y \underline{ccoh}_S(G, H) \right] \\ &= Rp_{Z!}^{YZ} \left[ Rp_{Y!}^{XY} \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes Rp_{Z!}^{YZ} \underline{ccoh}_S(G, H) \right] \\ &= \left[ R\pi_{Y!} Rp_{Y!}^{XY} \underline{ccoh}_S(F, G) \right] \boxtimes Rp_{Z!}^{YZ} \underline{ccoh}_S(G, H) \\ &= \left[ R\pi_{Y*} Rp_{Y!}^{XY} \underline{ccoh}_S(F, G) \right] \boxtimes Rp_{Z!}^{YZ} \underline{ccoh}_S(G, H) \\ &= Rp_{Z*}^{YZ} \left[ Rp_{Y!}^{XY} \underline{ccoh}_S(F, G) \boxtimes Rp_{Z!}^{YZ} \underline{ccoh}_S(G, H) \right]. \end{aligned}$$

On peut donc réécrire le morphisme (131) sous la forme

$$Rp_{Z*}^{YZ} \left[ \underline{cc}_S(F, G) \boxtimes \underline{cc}_S(G, H) \right] \rightarrow \underline{cc}_S(F, H). \quad (132)$$

Ce dernier induit un morphisme de composition :

$$cc_S(F, G) \otimes cc_S(G, H) \rightarrow cc_S(F, H). \quad (133)$$

*Remarque 5.1.5.* En utilisant la formule de Künneth, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} R\pi_{Y*} \underline{cc}_S(F, G) &= R\pi_{Y*} \left[ Rp_{Y!}^{XY} (\mathbb{D}_S F \boxtimes G) \right] = R\pi_{Y*} \left[ (R\pi_{X!} \mathbb{D}_S F) \boxtimes G \right] \\ &= R\pi_{X!} \mathbb{D}_S F \otimes R\pi_{Y*} G \\ &= \mathbb{D}_S R\pi_{X*} F \otimes R\pi_{Y*} G. \end{aligned}$$

On en déduit donc un isomorphisme canonique

$$cc(F, G) = H^0 \left( S, \mathbb{D}_S R\pi_{X*} F \otimes R\pi_{Y*} G \right). \quad (134)$$

On peut naturellement décrire le morphisme de composition (133) à travers l'isomorphisme précédent. En effet l'accouplement de dualité

$$R\pi_{Y*} G \otimes \mathbb{D}_S R\pi_{Y*} G \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$$

donne un morphisme canonique dans  $D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$

$$R\pi_{Y*} \underline{cc}_S(F, G) \otimes R\pi_{Z*} \underline{cc}_S(G, H) \rightarrow R\pi_{Z*} \underline{cc}_S(F, H)$$

à partir duquel (133) se déduit via l'isomorphisme (134). De même le morphisme canonique d'inclusion permettant de considérer les correspondances cohomologiques finies comme des correspondances cohomologiques particulières se décrit via (134). En effet d'après la formule de Künneth et la dualité, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R\pi_{XY*} \underline{ccoh}_S(F, G) &= R\pi_{X*} \mathbb{D}_S F \otimes R\pi_{Y*} G \\ R\pi_{Y*} \underline{cc}_S(F, G) &= R\pi_{X!} \mathbb{D}_S F \otimes R\pi_{Y*} G. \end{aligned}$$

On a donc un morphisme naturel

$$R\pi_{Y*}\underline{cc}(F, G) \rightarrow R\pi_{XY*}\underline{ccoh}(F, G)$$

induisant après application du foncteur  $H^0(S, \cdot)$  le morphisme injectif d'oubli des conditions de support :

$$cc_S(F, G) \hookrightarrow ccoh_S(F, G).$$

*Remarque 5.1.6.* Soient  $X, Y$  des schémas, comme précédemment on pose

$$\underline{cc}_S(X, Y) := \underline{cc}_S(\mathbb{Z}_X/\ell^*, \mathbb{Z}_Y/\ell^*) \quad \text{et} \quad cc_S(X, Y) := H^0(Y, \underline{cc}_S(X, Y)).$$

Supposons que  $X$  soit un schéma lisse purement de dimension  $d_X$  sur  $S$ , alors l'analogie cohomologique des correspondances finies introduites par A. Suslin et V. Voevodsky est le groupe abélien

$$\underline{cc}(X, Y) = H_c^{2d_X}(X \times_S Y/Y, \mathbb{Z}_\ell(d_X))$$

où le membre de droite n'est autre que le groupe de cohomologie

$$H_c^{2d_X}(X \times_S Y/Y, \mathbb{Z}_\ell(d_X)) := \text{Hom}_{\text{D}_c^b(Y, \mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{Z}_Y/\ell^*, Rp_{Y!}^{XY} \mathbb{Z}_{X \times_S Y}/\ell^*(d_X)[2d_X]).$$

**5.1.3. Analogie  $\ell$ -adique des motifs de Chow.** — L'avantage des correspondances cohomologiques finies est qu'elles permettent de décrire les morphismes dans  $\text{D}_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$  entre les réalisations de  $S$ -schémas lisses de type fini ainsi que leur composition en terme de composition de correspondances. Nous introduisons ci-dessous l'analogie  $\ell$ -adique des motifs de Chow — on remarquera que les schémas lisses non projectifs peuvent être pris en compte via la cohomologie à support compact.

**Définition 5.1.7.** On appelle catégorie des pré-motifs de Chow  $\ell$ -adiques sur  $S$ , la catégorie  $\text{PMCH}_{\text{et}, \ell}(S)$

- dont les objets sont les  $S$ -schémas lisses de type fini

$$\text{Ob}(\text{PMCH}_{\text{et}, \ell}(S)) := \text{Sm}_S$$

l'objet correspondant à un  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$  étant noté  $h_{\text{et}, \ell}(X)$ ;

- dont les morphismes sont donnés par les correspondances cohomologiques finies :

$$\text{Hom}(h_{\text{et}, \ell}(X), h_{\text{et}, \ell}(Y)) := cc_S(X, Y).$$

La catégorie  $\text{MCH}_{\text{et}, \ell}(S)$  des motifs de Chow- $\ell$ -adiques est l'enveloppe pseudo-abélienne tensorielle de la catégorie des pré-motifs de Chow  $\ell$ -adiques.

La proposition suivante est une conséquence formelle du théorème de dualité [29, théorème 4.3 page 250].

**Proposition 5.1.8.** *Il existe des isomorphismes*

$$\alpha_{X, Y} : \text{Hom}(R_\ell(X), R_\ell(Y)) \xrightarrow{\sim} cc_S(X, Y)$$

*compatibles à la composition. Autrement dit, la sous-catégorie pleine de  $\text{D}_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$  engendrée par les réalisations des  $S$ -schémas lisses de type fini et la catégorie des pré-motifs de Chow  $\ell$ -adiques sont canoniquement équivalentes.*

DÉMONSTRATION. — On peut supposer que les schémas sont non seulement lisses mais aussi de dimension pure sur la base  $S$ . Dans ce cas en utilisant la formule de changement de base lisse et la dualité, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(R_\ell(X), R_\ell(Y)) &= \mathrm{Hom}(\pi_Y^* R\pi_{X*} \pi_X^* \mathbb{Z}_S/\ell^*, \pi_Y^* \mathbb{Z}_S/\ell^*) \\
&= \mathrm{Hom}(Rp_{Y*}^{XY} \pi_{XY}^* \mathbb{Z}_S/\ell^*, \pi_Y^* \mathbb{Z}_S/\ell^*) \\
&= \mathrm{Hom}(\mathbb{D}_S \pi_Y^* \mathbb{Z}_S/\ell^*, \mathbb{D}_S Rp_{Y*}^{XY} \pi_{XY}^* \mathbb{Z}_S/\ell^*) \\
&= \mathrm{Hom}(\pi_Y^! \mathbb{Z}_S/\ell^*, Rp_{Y!}^{XY} \pi_{XY}^! \mathbb{Z}_S/\ell^*) \\
&= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_Y/\ell^*, Rp_{Y!}^{XY} p_Y^{XY*} \mathbb{Z}_Y/\ell^*(d_X)[2d_X]) = cc_S(X, Y).
\end{aligned}$$

Notons  $\alpha_{X,Y}$  l'isomorphisme obtenu :

$$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}(R_\ell(X), R_\ell(Y)) \xrightarrow{\sim} cc_S(X, Y).$$

Il reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec les compositions de part et d'autre. Il suffit pour cela de suivre à la trace ce que devient la composition à travers les isomorphismes qui ont servi à définir les  $\alpha_{X,Y}$ . Fixons des morphismes

$$g : R_\ell(X) \rightarrow R_\ell(Y) \quad h : R_\ell(Y) \rightarrow R_\ell(Z).$$

- Le morphisme  $\alpha_{X,Z}^{(2)}(h \circ g)$  est obtenu par la composition

$$\begin{array}{ccc}
& \alpha_{X,Z}^{(2)}(h \circ g) & \\
& \curvearrowright & \\
Rp_{Z*}^{XZ} \pi_{XZ}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* & \xrightarrow{\mathrm{adj.}} Rp_{Z*}^{XZ} \left[ Rp_{XZ*}^{XYZ} p_{XZ}^{XYZ*} \right] \pi_{XZ}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* & Rp_{Z*}^{YZ} \pi_{YZ}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* \xrightarrow{\alpha_{Y,Z}^{(2)}(h)} \pi_Z^* \mathbb{Z}_S/\ell^* \\
& \parallel \text{ chgt. base lisse} & \parallel \\
& Rp_{Z*}^{YZ} p_Y^{YZ*} \alpha_{X,Y}^{(2)}(g) & \\
Rp_{Z*}^{YZ} p_Y^{YZ*} \left[ Rp_{Y*}^{XY} \pi_{XY}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* \right] & \longrightarrow & Rp_{Z*}^{YZ} p_Y^{YZ*} \left[ \pi_Y^* \mathbb{Z}_S/\ell^* \right].
\end{array}$$

- Le morphisme  $\alpha_{X,Z}^{(3)}(h \circ g)$  est obtenu en prenant le dual du diagramme ci-dessus. En d'autre terme le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
& \alpha_{X,Z}^{(4)}(h \circ g) & \\
& \curvearrowright & \\
\pi_Z^! \mathbb{Z}_S/\ell^* & \xrightarrow{\alpha_{Y,Z}^{(4)}(h)} Rp_{Z!}^{YZ} \pi_{YZ}^! \mathbb{Z}_S/\ell^* & Rp_{Z!}^{XZ} \left[ Rp_{XZ!}^{XYZ} p_{XZ}^{XYZ!} \right] \pi_{XZ}^! \mathbb{Z}_S/\ell^* \xrightarrow{\mathrm{adj.}} Rp_{Z!}^{XZ} \pi_{XZ}^! \mathbb{Z}_S/\ell^* \\
& \parallel & \parallel \text{ chgt. base lisse} \\
& Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ!} \alpha_{X,Y}^{(4)}(g) & \\
Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ!} \left[ \pi_Y^! \mathbb{Z}_S/\ell^* \right] & \longrightarrow & Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ!} \left[ Rp_{Y!}^{XY} \pi_{XY}^! \mathbb{Z}_S/\ell^* \right]
\end{array}$$

donne le morphisme  $\alpha_{X,Z}^{(4)}(h \circ g)$ .



Le morphisme  $\alpha_{X,Z}(h \circ g)$  est obtenu en tordant le diagramme précédent par  $\mathbb{Z}_Z/\ell^*(-d_Z)[-2d_Z]$ . On a par ailleurs le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{Rp_{Z*}^{YZ} [\alpha_{XY}(g) \boxtimes \alpha_{YZ}(h)]} & \\
 & Rp_{Z*}^{YZ} \mathbb{Z}_{YZ}/\ell^* & \longrightarrow Rp_{Z*}^{YZ} Rp_{Y!}^{XYZ} \mathbb{Z}_{XYZ}/\ell^*(d_{XY})[2d_{XY}] \\
 \text{adj.} \nearrow & & \parallel \\
 & \xrightarrow{p_{XY}^{XYZ*} \alpha_{X,Y}(g) \sim p_{YZ}^{XYZ*} \alpha_{Y,Z}(h)} & Rp_{Z!}^{YZ} Rp_{Y!}^{XYZ} \mathbb{Z}_{XYZ}/\ell^*(d_{XY})[2d_{XY}] \\
 \mathbb{Z}_Z/\ell^* \xrightarrow{\alpha_{YZ}(h)} & Rp_{Z!}^{YZ} \mathbb{Z}_{YZ}/\ell^*(d_Y)[2d_Y] & \xrightarrow{Rp_{Z!}^{XZ} [Rp_{XZ!}^{XYZ} p_{XZ}^{XYZ*}]} Rp_{Z!}^{XZ} \mathbb{Z}_Z/\ell^*(d_{XY})[2d_{XY}] \\
 & \parallel & \parallel \\
 & Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ*} [\mathbb{Z}_Y/\ell^*](d_Y)[2d_Y] & \xrightarrow{Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ*} \alpha_{X,Y}(g)(d_Y)[2d_Y]} Rp_{Z!}^{YZ} p_Y^{YZ*} [Rp_{Y!}^{XY} p_Y^{XY*} \mathbb{Z}_Y/\ell^*](d_{XY})[2d_{XY}] \\
 & & \parallel \text{ chgt. base lisse}
 \end{array}$$

Ce qui prouve que

$$\alpha_{X,Z}(h \circ g) = p_{XZ}^{XYZ} [p_{XY}^{XYZ*} \alpha_{X,Y}(g) \sim p_{YZ}^{XYZ*} \alpha_{Y,Z}(h)] = \alpha_{Y,Z}(h) \circ \alpha_{X,Y}(g)$$

et la proposition se trouve démontrée. □

**5.1.4. Réalisation  $\ell$ -adique des motifs de Chow.** — Les considérations qui précèdent permettent aisément de construire un foncteur de réalisation pour les motifs de Chow et la catégorie des schémas lisses sur un corps munis des correspondances finies. Dans cette sous-section, notre hypothèse sur le schéma  $S$  est la suivante.

**Nous supposons que le schéma  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ .**

Nous notons  $\text{MCH}(k)$  la catégorie des motifs purs de Chow sur le corps  $k$  et nous renvoyons notamment à [120] pour la définition de cette dernière. On peut naturellement restreindre le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique (128) aux  $k$ -schémas projectifs lisses

$$\begin{array}{ccc}
 R_\ell : \text{SmProj}_k^{\text{op}} & \longrightarrow & D_c^+(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell) \\
 X & \mapsto & R\pi_{X*} \pi_X^* \mathbb{Z}_k/\ell^*.
 \end{array} \tag{135}$$

Les propriétés des classes de cycles en cohomologie  $\ell$ -adique alliées à la proposition 5.1.8 nous donnent le corollaire.

**Corollaire 5.1.9.** *Le foncteur (128) se prolonge canoniquement en un foncteur additif tensoriel*

$$\text{SmCor}_k \xrightarrow{R_\ell^{\text{cor}}} D_c^b(\text{Spec } k, \mathbb{Z}_\ell).$$

*De même le foncteur (135) se prolonge canoniquement en un foncteur additif tensoriel*

$$\text{MCH}(k) \xrightarrow{R_\ell^{\text{CH}}} D_c^b(\text{Spec}, \mathbb{Z}_\ell).$$

**DÉMONSTRATION.** — Soient  $X, Y$  des  $k$ -schémas lisses connexes et  $d_X, d_Y$  leur dimension respective sur  $k$ . Une correspondance finie  $\alpha$  de  $X$  dans  $Y$  est par définition un élément de  $c_{\text{equi}}(X \times_k Y/X, 0)$  et donc à fortiori un cycle algébrique sur  $X \times_k Y$  de codimension  $d_Y$  à

support propre sur  $X$ . En prenant la classe de cohomologie  $\ell$ -adique associée à ce cycle on obtient un élément

$$\mathrm{cl}_{X \times_k Y}^{d_Y}(\alpha) \in H_c^{2d_Y}(X \times_k Y/X, \mathbb{Z}(d_Y))$$

c'est à dire compte tenu de la remarque 5.1.6 une correspondance cohomologique finie

$$\mathrm{cl}(\alpha) \in \mathrm{cc}_k(Y, X).$$

En utilisant le lemme 2.1.5, les propriétés usuelles des classes de cycles nous assurent que cette construction est compatible aux compositions et aux produits tensoriels et que l'on obtient ainsi un foncteur additif tensoriel

$$\mathrm{SmCor}_k \longrightarrow \mathrm{MCH}_{\mathrm{et}, \ell}(k).$$

La proposition 5.1.8 nous assure alors que le foncteur (128) se prolonge canoniquement aux correspondances finies en un foncteur additif tensoriel fournissant le foncteur voulu.

De même lorsque  $X, Y$  sont projectifs lisses sur  $k$  et connexes, la classe de cycle  $\ell$ -adique donne un morphisme compatible à la composition et aux produits tensoriels

$$\mathrm{CH}^{d_X}(X, Y) \rightarrow H^{2d_X}(X \times_k Y, \mathbb{Z}(d_X))$$

et donc un foncteur additif tensoriel de la catégorie des pré-motifs de Chow dans la catégorie des pré-motifs de Chow  $\ell$ -adique. En passant aux enveloppes pseudo-abéliennes et en utilisant la proposition 5.1.8 on voit que le foncteur (135) se prolonge canoniquement aux motifs de Chow comme annoncé.  $\square$

*Remarque 5.1.10.* En notant  $\mathrm{SmProjCor}_k$  la catégorie des  $k$ -schémas projectifs lisses munis des correspondances finies, le triangle

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{(128)} \\
 & & & & \curvearrowright \\
 \mathrm{Sm}_k & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{SmCor}_k & \xrightarrow{R_\ell^{\mathrm{cor}}} & \mathrm{D}_c^b(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathrm{SmProjCor}_k & & \\
 & & \downarrow & & \uparrow \\
 \mathrm{SmProj}_k & \xrightarrow{h} & \mathrm{MCH}(k) & \xrightarrow{R_\ell^{\mathrm{CH}}} & \mathrm{D}_c^b(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell)
 \end{array}$$

est commutatif.

## 5.2. Réalisation $\ell$ -adique des motifs mixtes géométriques

Dans la section 5.1 nous avons dû supposer que le schéma de base était le spectre d'un corps pour pouvoir considérer les motifs de Chow. Nous revenons maintenant à la convention générale de cette thèse :

**$S$  est un schéma noethérien séparé et  $\ell$  désigne un nombre premier inversible sur  $S$ .**

Nous allons montrer que le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des  $S$ -schémas lisses de type fini

$$\begin{aligned} R_\ell : \mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ X &\longmapsto R\pi_{X*}\pi_X^*\mathbb{Z}_S/\ell^* \end{aligned}$$

se prolonge en un foncteur triangulé tensoriel sur la catégorie des motifs mixtes géométriques  $DM_{gm}(S)$ .

**5.2.1. Remarques préliminaires.** — Avant d’aborder le résultat principal, nous tenons à donner quelques précisions quant à la catégorie dans laquelle le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique prend ses valeurs. Dans le cadre général que nous considérons, on ne dispose pas de résultats de finitude assurant que le foncteur (128) prend ses valeurs dans les coefficients constructibles.

En revanche lorsque  $S$  est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le théorème de finitude prouvé par P. Deligne dans [29, théorème 1.1 page 233] assure que le foncteur de réalisation (128) prend ses valeurs dans la sous-catégorie triangulée pleine  $D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$  formée des coefficients constructibles — le fait que l’on tombe bien dans la catégorie dérivée bornée est une conséquence des résultats de finitude cohomologique de l’exposé X de [5].

Lorsque  $S$  est de type fini sur un corps fini et que l’on considère les coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ , il résulte des travaux de P. Deligne sur la conjecture de Weil [27, 30] que le foncteur de réalisation (128) prend ses valeurs dans la sous-catégorie triangulée des coefficients  $\ell$ -adiques mixtes  $D_m^b(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ .

La catégorie des motifs mixtes géométriques étant engendrée par les motifs des  $S$ -schémas lisses de type fini, les remarques précédentes s’étendront à toute la catégorie des motifs mixtes géométriques une fois que nous aurons prolongé le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique à ces derniers.

**5.2.2. Construction.** — Nous consacrons cette sous-section à la construction du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique des motifs mixtes géométriques. L’ingrédient essentiel réside dans les propriétés de la résolution de Godement que nous avons prouvées au chapitre 3 et nous nous appuyons ainsi essentiellement sur les résultats du chapitre 2. Nous allons donc prouver le

***Théorème 5.2.1.** Le foncteur symétrique monoïdal (128) se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé tensoriel*

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \tag{136}$$

*Lorsque  $S$  est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le foncteur (136) induit un foncteur triangulé tensoriel*

$$DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \longrightarrow D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell).$$

Avant de donner la démonstration de ce résultat, il y a lieu de préciser la terminologie que nous employons. On peut considérer le topos  $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}S_{\mathrm{Et}}$  des systèmes projectifs de grands faisceaux étales sur  $S$  ainsi que le faisceau d’anneaux sur ce dernier

$$\mathbb{Z}_{S, \mathrm{Et}}/\ell^* : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{S, \mathrm{Et}}/\ell^{r+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{S, \mathrm{Et}}/\ell^r \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{S, \mathrm{Et}}/\ell$$

et la catégorie de modules associée  $\text{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*)$ . Nous appellerons  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts, un système projectif de faisceaux étales avec transferts

$$F : r \mapsto F_r$$

dont les composantes  $F_r$  sont des  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^{r+1}$ -modules. En prenant pour morphismes, les morphismes de systèmes projectifs de faisceaux étales avec transferts, on obtient une sous-catégorie non pleine de la catégorie des  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -modules.

Nous dirons qu'un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}$ -module (resp. un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}$ -module avec transferts)  $F$  est quasi-monoïdal symétrique lorsque ses composantes  $F_r$  sont des  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^{r+1}$ -modules (resp.  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^{r+1}$ -modules avec transferts) quasi-monoïdaux symétriques et que les morphismes de transition sont compatibles avec ces structures.

PREUVE DU THÉORÈME 5.2.1. — On sait d'après le corollaire 3.2.21 que le grand faisceau étale  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^r$  se trouve canoniquement muni de transferts, les morphismes de transition  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^r \rightarrow \mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^{r+1}$  étant des morphismes de faisceaux étales avec transferts. On peut donc voir que  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$  est canoniquement un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts. En prenant la résolution cosimpliciale de Godement de ce dernier, on obtient un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module cosimplicial

$$\mathcal{G}_{\text{Et}}^*[\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*] \in \Delta\text{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*)$$

qui d'après le lemme 3.4.11 et la remarque 2.2.1 est en fait canoniquement un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts cosimplicial. Supposons que  $X$  soit un  $S$ -schéma, on dispose alors de deux morphismes de topos

$$X_{\text{et}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_X} \\ \xleftarrow{p_X} \end{array} S_{\text{ET}} \quad \text{avec} \quad p_X \circ \iota_X = \text{id}.$$

Ces derniers s'étendent naturellement aux topos  $\mathbb{N}^{\text{op}}X_{\text{et}}$  et  $\mathbb{N}^{\text{op}}S_{\text{ET}}$  et sachant que  $\iota_X^*\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^* = \mathbb{Z}_X/\ell^*$ , ils induisent un foncteur exact

$$\iota_X^* = p_{X*} : \text{Mod}(\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*) \longrightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z}_X/\ell^*).$$

En désignant par  $\pi_X$  le morphisme structural de  $X$  dans  $S$ , cela permet d'associer au  $S$ -schéma lisse  $X$  le  $\mathbb{Z}_S/\ell^*$ -module cosimplicial

$$\mathcal{R}_{\ell}(X) := \pi_{X*}i_X^*\mathcal{G}_{\text{Et}}^*[\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*]. \quad (137)$$

En prenant le complexe de chaîne associé, on obtient un objet

$$\underline{R}_{\ell}(X) := \mathcal{C}^*\mathcal{R}_{\ell}(X) = \pi_{X*}i_X^*G_{\text{Et}}^*[\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*] \quad (138)$$

appartenant à  $\mathcal{C}^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$ .

*Remarque 5.2.2.* Par construction de la résolution de Godement, on peut voir que

$$R_{\ell}(X) = \pi_{X*}G_{\text{Et}}^{X,*}[\mathbb{Z}_X/\ell^*].$$

Le passage par les grands faisceaux étales ne sert en fait que dans la mesure où il permet de mettre des transferts.

Pour la définition des complexes normalisés apparaissant dans le lemme suivant, nous renvoyons à la remarque A.2.6.

**Lemme 5.2.3.** *Les objets (137) et (138) sont fonctoriels par rapport aux correspondances finies, autrement dit on dispose de foncteurs additifs*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\ell & : \text{SchCor}_S^{\text{op}} \rightarrow \Delta\text{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*) \\ \underline{\mathcal{R}}_\ell & : \text{SchCor}_S^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}^+(S, \mathbb{Z}_S/\ell^*). \end{aligned}$$

De plus le foncteur  $\underline{\mathcal{R}}_\ell$  est à valeurs dans la sous-catégorie formée des systèmes projectifs « normalisés » et on a un isomorphisme de foncteurs canonique  $\theta$

$$\begin{array}{ccc} \text{SmCor}_S^{\text{op}} & \xrightarrow{\underline{\mathcal{R}}_\ell} & \mathbf{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell) \\ \uparrow & \xRightarrow{\theta} & \uparrow \\ \text{Sm}_S^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathcal{R}_\ell} & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — (1). Supposons plus généralement que  $F$  soit un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts cosimplicial. En posant pour un  $S$ -schéma

$$\tilde{F}(X) := \pi_{X*} i_X^* F$$

on obtient un préfaisceau avec transferts à valeurs dans la catégorie  $\Delta\text{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*)$ . En effet lorsque l'on se donne une  $S$ -correspondance finie  $\alpha$  de  $X$  dans  $Y$  et un  $S$ -schéma étale  $U$ , on a un morphisme naturel de  $\mathbb{Z}/\ell^*$ -modules cosimpliciaux

$$\tilde{F}(Y)(U) := F(Y_U) \xrightarrow{F(\alpha_U)} F(X_U) =: \tilde{F}(X)(U)$$

induit par les correspondances  $\alpha_U$  construites dans la sous-section 2.1.2. Ces morphismes nous fournissent un morphisme dans la catégorie de  $\mathbb{Z}_S/\ell^*$ -modules cosimpliciaux

$$\tilde{F}(\alpha) : \tilde{F}(Y) \rightarrow \tilde{F}(X).$$

La compatibilité avec la composition démontrée au lemme 2.1.6 assure que pour des correspondances finies  $\alpha \in c_S(X, Y)$  et  $\beta \in c_S(Y, Z)$  on a  $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U$  et donc que

$$\tilde{F}(\alpha) \circ \tilde{F}(\beta) = \tilde{F}(\beta \circ \alpha).$$

En particulier ceci assure que les objets (137) et (138) sont fonctoriels par rapport aux correspondances finies.

(2). Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que pour un  $\mathbb{Z}_{S,\text{Et}}/\ell^*$ -module  $F$ , la résolution de Godement  $F \rightarrow G_{\text{Et}}^* F$  est une résolution flasque. En particulier si  $X$  est un  $S$ -schéma, les morphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} R\pi_{X*} i_X^* F & \longrightarrow & R\pi_{X*} i_X^* G_{\text{Et}}^* F \\ & & \uparrow \\ & & \pi_{X*} i_X^* G_{\text{Et}}^* F \end{array}$$

sont des quasi-isomorphismes. En prenant  $F = \mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$ , on obtient un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \text{SmCor}_S^{\text{op}} & \xrightarrow{R_\ell} & D^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*) \\ \uparrow & \xRightarrow{\theta} & \uparrow \\ \text{Sm}_S^{\text{op}} & \xrightarrow{R_\ell} & \end{array}$$

Pour un  $\mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$ -module plat  $F$ , les composantes de sa résolution de Godement  $G_{\text{Et}}^n F$  sont des  $\mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$ -modules plats ce qui assure que  $G_{\text{Et}}^* F$  est normalisé lorsque  $F$  est  $\ell$ -adique. En particulier ceci entraîne que le foncteur considéré prend bien ses valeurs dans les complexes normalisés.  $\square$

On a donc un foncteur

$$\underline{R}_\ell : C^b(\text{SmCor}_S)^{\text{op}} \xrightarrow{C^b R_\ell} C^b [C^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)] \xrightarrow{\text{Tot}} C^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$$

et donc un foncteur triangulé

$$\underline{R}_\ell : K^b(\text{SmCor}_S)^{\text{op}} \longrightarrow D^+(S, \mathbb{Z}/\ell^*)$$

prenant en fait ces valeurs dans  $D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$ . En utilisant l'invariance par homotopie dans le cadre  $\ell$ -adique, la localisation Nisnevich, on obtient un foncteur triangulé

$$R_\ell : \underline{DM}_{gm}^{\text{eff}}(S)^{\text{op}} \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell).$$

Comme la catégorie triangulée  $D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$  est pseudo-abélienne — il s'agit d'une conséquence du lemme 2.4 de [10] — ce dernier nous donne un foncteur

$$R_\ell : DM_{gm}^{\text{eff}}(S) \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \quad (139)$$

Il reste à vérifier que ce foncteur est bien compatible aux structures tensorielles de part et d'autre.

**Lemme 5.2.4.** *Le foncteur triangulé (139) est tensoriel.*

DÉMONSTRATION. — D'après le corollaire 3.2.21,  $\mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$  est un  $\mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts quasi-monoïdal symétrique. Le lemme 3.4.12 nous assure alors que  $\mathcal{G}_{\text{Et}}^* \mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$  est en fait canoniquement un  $\mathbb{Z}_{S, \text{Et}}/\ell^*$ -module avec transferts quasi-monoïdal symétrique cosimplicial. Cela entraîne que le foncteur

$$\mathcal{R}_\ell : \text{SmCor}_S^{\text{op}} \longrightarrow \Delta\text{Mod}(\mathbb{Z}_S/\ell^*)$$

du lemme 5.2.3 est monoïdal symétrique, autrement dit que l'on dispose d'un morphisme canonique de foncteurs sur  $\text{SmCor}_S \otimes \text{SmCor}_S$

$$\boxtimes : \mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-) \longrightarrow \mathcal{R}_\ell(- \times_S -)$$

associatif et commutatif. Ce dernier nous fournit des morphismes de foncteurs associatifs et commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \bullet \mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{C} \bullet \mathcal{R}_\ell(-) & \xleftarrow{\boxtimes^{EML}} \mathcal{C} \bullet [\mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-)] & \xrightarrow{\mathcal{C} \bullet \boxtimes} \mathcal{C} \bullet \mathcal{R}_\ell(- \times_S -) \\ \parallel & & \parallel \\ \underline{R}_\ell(-) \otimes \underline{R}_\ell(-) & & \underline{R}_\ell(- \times_S -) \end{array}$$

où  $\boxtimes^{EML}$  désigne la transformation d'Eilenberg Mac-Lane [34]. On a donc des morphismes de bifoncteurs associatifs et commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^b \left[ \mathcal{C}^\bullet \mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{C}^\bullet \mathcal{R}_\ell(-) \right] & \xleftarrow{\mathcal{C}^b \boxtimes^{EML}} \mathcal{C}^b \left[ \mathcal{C}^\bullet \left[ \mathcal{R}_\ell(-) \otimes \mathcal{R}_\ell(-) \right] \right] & \xrightarrow{\mathcal{C}^b \mathcal{C}^\bullet \boxtimes} \mathcal{C}^b \left[ \mathcal{C}^\bullet \mathcal{R}_\ell(- \times_S -) \right] \\ \parallel & & \parallel \\ \underline{R}_\ell(-) \otimes \underline{R}_\ell(-) & & \underline{R}_\ell(- \times_S -) \end{array}$$

Par ailleurs l'augmentation

$$\mathbb{Z}_S/\ell^* \rightarrow \underline{R}_\ell(S)$$

est un quasi-isomorphisme qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \underline{R}_\ell(S) \otimes \underline{R}_\ell(-) & \xleftarrow{\mathcal{C}^b \boxtimes^{EML}} & \mathcal{C}^b \left[ \mathcal{C}^\bullet \left[ \mathcal{R}_\ell(S) \otimes \mathcal{R}_\ell(-) \right] \right] & \xrightarrow{\mathcal{C}^b \mathcal{C}^\bullet \boxtimes} & \underline{R}_\ell(S \times_S -) \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & \mathbb{Z}_S/\ell^* \otimes \underline{R}_\ell(-) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \underline{R}_\ell(-) & \end{array}$$

Cela nous assure que le foncteur (139) est bien tensoriel. □

En remarquant que le motif de  $\mathbb{P}^1$  a pour image l'objet  $\mathbb{Z}_\ell \oplus \mathbb{Z}_\ell(-1)[-2]$  de  $D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$ , on déduit immédiatement de la définition du motif de Tate le résultat suivant.

**Lemme 5.2.5.** *Il existe un isomorphisme*

$$\vartheta : R_\ell(\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell(-1).$$

Comme  $\mathbb{Z}_\ell(-1)$  est inversible dans  $D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$  il résulte du lemme 5.2.5 que le foncteur (139) se prolonge en un foncteur triangulé tensoriel

$$R_\ell : DM_{gm}(S)^{op} \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell). \tag{140}$$

L'assertion concernant le fait que ce foncteur prenne ses valeurs dans les coefficients constructibles lorsque  $S$  est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension  $\leq 1$  découle des remarques préliminaires que nous avons faites dans la sous-section 5.2.1. Cela achève la preuve du théorème 5.2.1. □

*Remarque 5.2.6.* Soit  $T$  un schéma et  $\theta : T \rightarrow S$  un morphisme lisse de schémas. Pour tout  $S$ -schéma lisse de type fini  $X$ , le théorème de changement de base lisse appliqué au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{\theta_x} & X \\ \pi_{X_T/T} \downarrow & \square & \downarrow \pi_{X/S} \\ T & \xrightarrow{\theta} & S \end{array}$$

nous donne un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \theta^* R_\ell(X) &= \theta^* R\pi_{X/S} \pi_{X/S}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* = R\pi_{X_T/T} \theta_X^* \pi_{X/S}^* \mathbb{Z}_S/\ell^* \\ &= R\pi_{X_T/T} \pi_{X_T/T}^* \mathbb{Z}_T/\ell^* = R_\ell(X_T). \end{aligned}$$

Il résulte alors de la construction donnée dans la preuve du théorème 5.2.1 que l'on a un isomorphisme canonique de foncteurs  $\phi$

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}(S) & \xrightarrow{R_\ell} & D^+(S, \mathbb{Z}_\ell/\ell^*) \\ \downarrow & \xRightarrow{\phi} & \downarrow \theta^* \\ DM_{gm}(T) & \xrightarrow{R_\ell} & D^+(T, \mathbb{Z}_\ell). \end{array}$$

**5.2.3. Une variante modérée.** — La généralité correspondant au théorème 5.2.1 permet de construire dans différentes situations géométriques des « variantes modérées » du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique. Ceci concerne les situations dans lesquelles le schéma considéré est régulier et décrit comme une limite projective de schémas réguliers à morphismes de transition lisses et affines. Cela donne par exemple pour un corps de nombres une variante modérée qui tient compte des ouverts du spectre de son anneau des entiers.

Dans ce qui suit, nous reprenons les notations des sous-sections 2.1.3 et 4.1.3. En revanche nos hypothèses sont légèrement plus restrictives.

**Le schéma  $S$  est régulier et limite projective d'un système projectif de schémas réguliers  $\lambda \mapsto S_\lambda$  dont les morphismes de transition sont lisses et affines.**

Il résulte des théorèmes 8.8.2 et 8.10.5 de [55] et de la proposition 17.7.6 de [56] que la catégorie des  $S$ -schémas lisses de type fini admet la description suivante

$$2\text{-colim}_\lambda \text{Sm}_{S_\lambda} = \text{Sm}_S.$$

En passant à la 2-colimite sur  $\Lambda$ , les foncteurs de réalisation  $\ell$ -adique

$$\text{Sm}_{S_\lambda}^{\text{op}} \rightarrow D^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \quad \lambda \in \Lambda$$

fournissent donc un foncteur

$$\text{Sm}_S^{\text{op}} \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \quad (141)$$

La conjonction du théorème 5.2.1 et de la description de la catégorie des motifs géométriques de la proposition 4.1.29 nous donne le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2.7.** *Le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique modérée (141) se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé tensoriel*

$$R_{md,\ell} : DM_{gm}(S)^{\text{op}} \rightarrow D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \quad (142)$$

*Lorsque  $\lambda \mapsto S_\lambda$  est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le foncteur (142) prend ses valeurs dans  $D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$ .*

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème 5.2.1 on a des foncteurs triangulés tensoriels

$$DM_{gm}(S_\lambda)^{\text{op}} \rightarrow D(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) \quad \lambda \in \Lambda.$$



Compte tenu de la proposition 4.1.29 et de la remarque 5.2.6, en passant à la 2-colimite sur  $\Lambda$  on obtient un foncteur triangulé tensoriel

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-colim}_{\lambda} DM_{gm}(\mathcal{S}_{\lambda})^{\text{op}} & \longrightarrow & 2\text{-colim}_{\lambda} D(\mathcal{S}_{\lambda}, \mathbb{Z}_{\ell}) \\ \parallel & & \parallel \\ DM_{gm}(S)^{\text{op}} & \xrightarrow{R_{md,\ell}} & D(S, \mathbb{Z}_{\ell})_{md}. \end{array}$$

Lorsque  $\lambda \mapsto S_{\lambda}$  est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension  $\leq 1$ , le théorème 5.2.1 entraîne également que ce foncteur prend ses valeurs dans  $D_c^b(X, \mathbb{Z}_{\ell})_{md}$ .  $\square$

*Remarque 5.2.8.* On peut appliquer ce résultat au cas où  $\Lambda$  est l'ensemble des ouverts affines non vides d'un schéma intègre régulier  $S$  de corps des fonctions  $F$ . Cela permet pour tout  $F$ -schéma lisse de type fini  $X$  d'obtenir une réalisation  $\ell$ -adique

$$DM_{gm}(X) \longrightarrow D_c^b(X, \mathbb{Z}_{\ell})_{md}$$

la catégorie de droite étant étudiée dans [67] dans le cas où  $F$  est un corps de nombres.

### 5.3. Lien avec la construction de A. Huber

Nous allons maintenant comparer le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique que nous avons construit au théorème 5.2.1, avec la composante  $\ell$ -adique du foncteur de réalisation

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}} : DM_{gm}(k)^{\text{op}} \rightarrow D_{\mathcal{MR}} \tag{143}$$

du théorème 2.3.3 de [68]. Dans ce qui précède,  $D_{\mathcal{MR}}$  désigne la catégorie triangulée des réalisations mixtes de [66] et  $k$  un corps de caractéristique nulle.

**Dans cette section  $k$  désigne un corps de caractéristique nulle.**

Le résultat essentiel de cette section est le suivant.

**Proposition 5.3.1.** *Le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique construit par A. Huber dans [69, 68] est canoniquement isomorphe au foncteur de réalisation obtenu au théorème 5.2.1 : il existe un isomorphisme canonique de foncteurs  $\phi$*

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}(k)^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}} & D_{\mathcal{MR}} \\ \downarrow R_{\ell} & \xRightarrow{\phi} & \downarrow \text{projection sur la} \\ & & \text{composante } \ell\text{-adique} \\ & & D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}_{\ell}). \end{array}$$

Nous démontrons la proposition précédente dans la sous-section 5.3.3. À cet égard le résultat essentiel est la proposition 5.3.18, qui permet de réduire la démonstration à la vérification de certaines propriétés « d'invariance sous-Galois » de la résolution de Godement.

**5.3.1. Transposition et préfaisceaux avec transferts.** — Nous débutons par quelques rappels sur la transposée des morphismes finis équidimensionnels dont nous aurons besoin pour démontrer la proposition 5.3.18.

Dans la suite, les schémas normaux seront toujours pris « au sens absolu ». Ainsi la phrase : «  $X$  est un  $S$ -schéma normal », ne signifiera pas que le morphisme structural de  $X$  vers  $S$  est normal au sens de la définition 6.8.1 de [54], mais simplement que  $X$  est un schéma de base  $S$  qui est de plus normal.

Nous aurons besoin de faire opérer un préfaisceau avec transferts  $F$  sur les transposés de morphismes finis équidimensionnels  $p : X \rightarrow Y$  entre  $k$ -schémas normaux. Le schéma  $Y$  n'étant pas nécessairement régulier, le sous-schéma fermé de  $X \times Y$  fini et équidimensionnel sur  $Y$  défini par le graphe de  $p$ , ne fournit pas à priori une correspondance finie entre  $Y$  et  $X$ . On ne peut donc considérer en toute généralité le morphisme

$$F(p^t) : F(X) \rightarrow F(Y) \quad (144)$$

où  $p^t$  désigne le transposé de  $p$ . Nous allons voir que les morphismes (144) ont bien un sens lorsque le préfaisceau avec transferts  $F$  prend des valeurs dans une catégorie  $\mathbb{Q}$ -linéaire.

Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas. A la place des  $S$ -correspondances finies, on peut considérer le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel

$$c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y) := \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)_{\mathbb{Q}} \quad (145)$$

et définir une composition de la même manière que pour les correspondances finies via le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c_S^{\mathbb{Q}}(Y, Z) \otimes c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}_{\text{equi}}(Y \times_S Z/Y, 0)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow \circ & & \downarrow (p_Y^{X \times_S Y})^{\otimes} \otimes \text{id} \\ & & \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Y \times_S Z/X \times_S Y, 0)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)_{\mathbb{Q}} \\ & & \downarrow \text{Cor} \\ & & \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Y \times_S Z/X, 0)_{\mathbb{Q}} \\ & & \downarrow (p_{X \times_S Z}^{X \times_S Y \times_S Z})_* \\ c_S^{\mathbb{Q}}(X, Z) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}_{\text{equi}}(X \times_S Z/X, 0)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Les propriétés que nous avons vérifiées dans la sous-section 2.1.1 sont encore valables dans ce cas avec les mêmes démonstrations et le morphisme naturel

$$c_S(X, Y) \rightarrow c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y) \quad (146)$$

est naturellement compatible à la composition.

*Remarque 5.3.2.* Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas. Lorsque  $X$  est régulier, le corollaire 1.2.34 assure que  $c_k(X, Y)$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés de  $X \times_S Y$  finis et équidimensionnels sur  $X$ . De même lorsque  $X$  est normal, le corollaire 1.2.33 entraîne que  $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$  est le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les sous-schémas fermés de  $X \times_S Y$  finis et équidimensionnels sur  $X$ .

Lorsque  $X$  est normal, on sait par le critère de Chevalley que les morphismes équidimensionnels sont ouverts. En particulier, lorsque  $X$  est connexe, un sous-schéma fermé de  $X \times_S Y$  est fini équidimensionnel sur  $X$  si et seulement si il est fini surjectif sur  $X$ .

On déduit de la proposition 3.3.14 de [125], que rationnellement on obtient rien de plus en considérant les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels (145) qu'en considérant les correspondances finies. On a en effet le lemme suivant.

**Lemme 5.3.3.** *Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas. Les morphismes (146) induisent des isomorphismes*

$$c_S(X, Y)_{\mathbb{Q}} = c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y).$$

Nous rappelons maintenant la définition du transposé d'un morphisme fini équidimensionnel entre  $S$ -schémas.

**Définition 5.3.4.** Soit  $p$  un morphisme fini équidimensionnel de  $S$ -schémas. On appelle transposé de  $p$ , le cycle algébrique sur  $Y \times_S X$

$$p^t := \varepsilon_*[\Gamma_p]$$

où  $\varepsilon : X \times_S Y \rightarrow Y \times_S X$  désigne l'isomorphisme qui échange les facteurs.

*Remarque 5.3.5.* Le transposé du morphisme  $p$  étant fini équidimensionnel sur  $Y$ , on voit d'après la remarque 5.3.2 que ce dernier appartient à  $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$  dès lors que  $Y$  est normal. Naturellement, dans le cas où  $Y$  est régulier, le transposé de  $p$  est une correspondance finie.

Le lemme suivant donne les propriétés élémentaires de la transposition.

**Lemme 5.3.6.** *Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas normaux et  $p : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme fini équidimensionnel.*

1. Pour tout  $\alpha \in c_S^{\mathbb{Q}}(X, Z)$  on a

$$\alpha \circ p^t = (p \times_S \text{id}_Z)_*(\alpha)$$

2. Pour tout  $S$ -schéma normal et tout morphisme fini équidimensionnel  $q : Y \rightarrow Z$ , on a

$$(q \circ p)^t = p^t \circ q^t.$$

3. Lorsque  $Y$  est connexe, on a la formule du degré

$$p \circ p^t = \deg(p) \text{id}_Y.$$

DÉMONSTRATION. — (1). Par définition de la composition, en utilisant la première assertion du lemme 1.4.13, on a

$$\begin{aligned} \alpha \circ p^t &= p_{YZ}^{YXZ} \text{Cor} \left( p_X^{YX^{\otimes}} \alpha, p^t \right) = p_{YZ}^{YXZ} \text{Cor} \left( p_X^{YX^{\otimes}} \alpha, \varepsilon_*[\Gamma_p] \right) \\ &= p_{YZ}^{YXZ} (\varepsilon \times_S \text{id}_Z)_* \text{Cor} \left( \varepsilon^{\otimes} p_X^{YX^{\otimes}} \alpha, [\Gamma_p] \right) \\ &= p_{YZ}^{XYZ} \text{Cor} \left( p_X^{XY^{\otimes}} \alpha, [\Gamma_p] \right) \end{aligned}$$

En revenant à la définition de l'opération  $\text{Cor}$ , on voit donc que

$$\alpha \circ p^t = p_{YZ}^{XYZ} (\Delta_p \times_S \text{id}_Z)_* \Delta_p^{\otimes} p_X^{XY^{\otimes}} \alpha = (p \times_S \text{id}_Z)_* \alpha$$

Ce qui prouve la relation voulue.

(2). La première assertion nous donne

$$\begin{aligned} p^t \circ q^t &= (q \times_S \text{id}_X)_* \varepsilon_* [\Gamma_p] = (q \times_S \text{id}_X)_* \varepsilon_* \Delta_{p^*} [X] = \varepsilon_* \Delta_{q \circ p^*} [X] \\ &= \varepsilon_* [\Gamma_{q \circ p}] = (q \circ p)^t \end{aligned}$$

puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Delta_{q \circ p} & \longrightarrow & X \times_S Z & \xrightarrow{\varepsilon} & \\ & \swarrow & & & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{\Delta_p} & X \times_S Y & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \times_S X & \xrightarrow{q \times_S \text{id}_X} & Z \times_S X \end{array}$$

est commutatif

(3). Comme  $Y$  est normal et connexe, le morphisme  $p$  est en fait fini et surjectif. La première assertion nous assure donc que

$$p \circ p^t = (p \times_S \text{id}_Y)_* [\Gamma_p] = \text{deg}(p) [\Delta_Y] = \text{deg}(p) \text{id}_Y$$

ce que nous voulions.  $\square$

On déduit immédiatement du lemme précédent, le résultat de décomposition suivant.

**Lemme 5.3.7.** *Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas normaux et  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X \times_S Y$  fini et équidimensionnel sur  $X$ . Alors en notant*

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y$$

les projections naturelles, on a  $[Z] = q \circ p^t$  dans  $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$ .

DÉMONSTRATION. — Notons  $\iota$  l'immersion fermée de  $Z$  dans  $X \times_S Y$ . En remarquant que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \iota & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ Z & \xrightarrow{\Delta_q} & Z \times_S Y & \xrightarrow{p \times_S \text{id}_Y} & X \times_S Y \end{array}$$

est commutatif, le lemme 5.3.6 nous donne

$$[Z] = (p \times_S \text{id}_Y)_* \Delta_{q^*} [Z] = (p \times_S \text{id}_Y)_* [\Gamma_q] = q \circ p^t.$$

$\square$

En particulier lorsque  $\alpha$  est une correspondance finie appartenant à  $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$  de la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

les  $\alpha_i$  étant des rationnels et les  $Z_i$  des sous-schémas fermés de  $X \times_S Y$  finis et équidimensionnels sur  $X$  on a, en notant  $X \xleftarrow{p_i} Z_i \xrightarrow{q_i} Y$  les projections naturelles

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i (q_i \circ p_i^t)$$

dans  $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$ .

*Remarque 5.3.8.* Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie additive  $\mathbb{Q}$ -linéaire et

$$F : \text{NorCor}_S^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$$

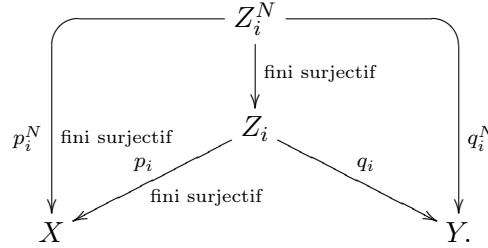
un foncteur additif où  $\text{NorCor}_S$  désigne la catégorie des  $S$ -schémas normaux munis des correspondances finies. D'après ce qui précède, ce foncteur s'étend naturellement en un foncteur sur la catégorie  $\mathbb{Q}$ -linéaire ayant pour objets les  $S$ -schémas normaux et pour morphismes les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels (145). En particulier pour tout morphisme fini équidimensionnel  $p : X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas normaux, on dispose bien par functorialité d'un morphisme naturel

$$F(p^t) : F(X) \rightarrow F(Y).$$

Soient  $X, Y$  des  $k$ -schémas lisses connexes. Supposons que  $\alpha \in c_k(X, Y)$  soit une correspondance finie. Écrivons  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i [Z_i]$$

où  $\alpha_i$  est un entier relatif et  $Z_i$  un sous-schéma fermé intègre de  $X \times_k Y$  fini surjectif sur  $X$ , et désignons par  $Z_i^N$  le normalisé du schéma intègre  $Z_i$ . On a alors un diagramme commutatif



Comme les  $\pi_i$  sont birationnels, les lemmes 5.3.6 et 5.3.7 nous assurent que

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (q_i \circ p_i^t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (q \circ \pi_i \circ \pi_i^t \circ p^t) = \sum_{i=1}^r (q_i \circ \pi_i) \circ (p_i \circ \pi_i)^t \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (q_i^N \circ p_i^{Nt}). \end{aligned} \tag{147}$$

*Remarque 5.3.9.* La description (147) du transfert ne fait pas intervenir que des schémas lisses connexes, mais utilise des schémas normaux connexes comme intermédiaire. En particulier pour un préfaisceau avec transferts  $F$  défini seulement sur les  $k$ -schémas lisses connexes, une formule du type

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i F(p_i^{Nt}) F(q_i^N)$$

n'a pas de sens.

La décomposition (147) est au centre de la méthode galoisienne de « rajout de transferts » donnée par A. Huber dans [68, 69] et que nous allons maintenant rappeler.

**5.3.2. Transferts galoisiens.** — Dans cette sous-section nous démontrons la proposition 5.3.18 qui compare les transferts « galoisiens » — nous entendons par là les transferts obtenus par la méthode de A. Huber — aux « transferts d'origine » lorsqu'ils existent.

Nous faisons la convention suivante.

**$\mathcal{A}$  désigne une catégorie additive  $\mathbb{Q}$ -linéaire pseudo-abélienne dans laquelle les petites colimites filtrantes sont représentables.**

Convenons de désigner par  $\text{Norc}_k$  la catégorie des  $k$ -schémas normaux connexes de type fini et par  $\text{Smc}_k$  celle des  $k$ -schémas lisses connexes de type fini. La méthode galoisienne permet d'associer, à un  $\mathcal{A}$ -préfaisceau additif  $F$  sur  $\text{Norc}_k$ , un préfaisceau avec transferts  $F^t$  sur  $\text{Smc}_k$  muni d'un morphisme

$$\theta : F \rightarrow F^t$$

où le premier membre désigne abusivement la restriction de  $F$  à  $\text{Smc}_k$ . Dans la suite, nous ne donnons pas les détails de la construction de  $F^t$ . Nous renvoyons le lecteur à *loc.cit.* pour les démonstrations. Nous aurons besoin de la remarque suivante qui précise certaines définitions et notations.

*Remarque 5.3.10.* Soit  $G$  un groupe fini. Nous dirons qu'un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est muni d'une action de  $G$  par automorphisme lorsque l'on s'est donné un morphisme de groupe

$$\Phi_A : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$$

où  $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$  désigne l'ensemble des automorphismes de  $A$ . Puisque  $\mathcal{A}$  est  $\mathbb{Q}$ -linéaire, il est possible considérer le projecteur

$$\Pi_A := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_A(g)$$

pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  muni d'une action de  $G$  par automorphisme. Sachant que  $\mathcal{A}$  est supposée pseudo-abélienne, le projecteur  $\Pi_A$  se scinde et on a une décomposition naturelle

$$A = \text{Im}(\Pi_A) \oplus \text{Im}(\text{id}_A - \Pi_A).$$

Les invariants de  $A$  sous l'action de  $G$  sont donnés par l'image de  $\Pi_A$  que nous notons  $A^G$ .

Donnons nous un  $\mathcal{A}$ -préfaisceau sur  $\text{Norc}_k$

$$F : \text{Norc}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Notons  $\mathcal{N}$  la sous-catégorie de  $\text{Sch}_k$  ayant pour objet les  $k$ -schémas normaux connexes de type fini et dont les flèches sont les morphismes finis surjectifs et génériquement galoisiens. On dispose du lemme B.3.5 de [69] :

**Lemme 5.3.11.** *Pour tout  $k$ -schéma normal connexe, la catégorie  $\mathcal{N}/X$  est cofiltrante.*

Pour tout objet  $(X' \xrightarrow{\pi} X)$  de  $\mathcal{N}/X$ ,  $F(X')$  est muni naturellement d'une action par automorphisme du groupe de Galois  $\text{Aut}(X'/X)$ , ce qui permet de considérer l'objet de  $\mathcal{A}$  obtenu en prenant les invariants

$$\underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) := F(X')^{\text{Aut}(X'/X)}.$$

Pour tout morphisme

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{u} & X' \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

dans  $\mathcal{N}/X$ , la théorie de Galois nous donne un morphisme naturel  $\underline{F}^t(u)$  s'insérant dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X') & \xrightarrow{F(u)} & F(X'') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) & \xrightarrow{\underline{F}^t(u)} & \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi'} X). \end{array}$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\underline{F}^t : (\mathcal{N}/X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

*Notation 5.3.12.* Nous notons

$$\Pi_{X'/X} := \frac{1}{|\text{Aut}(X'/X)|} \sum_{g \in \text{Aut}(X'/X)} F(g) : F(X') \rightarrow F(X')$$

le projecteur canonique et  $\iota_{X'/X} : \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) \rightarrow F(X')$  l'inclusion naturelle. L'image réciproque prend ses valeurs dans les invariants sous-Galois et l'on note  $\theta_{X'/X}$  le morphisme défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\pi^*} & \\ F(X) & \xrightarrow{\theta_{X'/X}} \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) & \xrightarrow{\iota_{X'/X}} F(X') \end{array}$$

En utilisant le lemme 5.3.11 et notre hypothèse sur  $\mathcal{A}$ , on peut poser, pour tout  $k$ -schéma normal connexe de type fini  $X$

$$F^t(X) := \text{colim}_{(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)^{\text{op}}} \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X).$$

On note  $\theta_X$  le morphisme de  $F(X)$  dans  $F^t(X)$  induit par les morphismes  $\theta_{X'/X}$ .

Cette construction satisfait le lemme 2.1.10 de [68].

**Lemme 5.3.13.** *La construction*

$$X \in \text{Norc}_k \mapsto F^t(X)$$

*est fonctorielle contravariante par rapport aux morphismes de schémas et fonctorielle covariante par rapport aux morphismes finis surjectifs.*

1. Pour tout morphisme de schémas  $p : X \rightarrow Y$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & F^t(Y) \\ \downarrow p^* & & \downarrow p^* \\ F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & F^t(X) \end{array}$$

*est commutatif.*

2. On a la formule du degré

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{deg}(u)\text{id} & \\
 & \curvearrowright & \\
 F^t(Y) & \xrightarrow{p^*} & F^t(X) \xrightarrow{p_*} F^t(Y)
 \end{array} \tag{148}$$

pour tout morphisme fini surjectif  $p : X \rightarrow Y$ .

*Remarque 5.3.14.* Nous n'avons pas pris la même normalisation que dans [68], de manière à ce que les morphismes covariants satisfassent bien la formule du degré (148). Nous rectifions en conséquence la formule (151) donnant la définition des transferts.

Fixons un morphisme fini surjectif  $p : X \rightarrow Y$  de  $k$ -schémas normaux connexes de type fini. Nous aurons besoin, dans la démonstration de la proposition 5.3.18, de la description explicite des morphismes d'image directe

$$p_* : F^t(X) \rightarrow F^t(Y) \tag{149}$$

du lemme 5.3.13. Étant donné un objet  $(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)$ , il existe un  $k$ -schéma normal connexe de type fini et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & X'' & & & \\
 & \downarrow q & \text{fini surjectif} & & \\
 & & \text{gén. galoisien} & & \\
 \text{fini surjectif} & \pi' & X' & & \pi'' \\
 \text{gén. galoisien} & & \searrow \pi & & \downarrow \\
 & & X & \xrightarrow{p} & Y.
 \end{array} \tag{150}$$

On en déduit un morphisme

$$\underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) \xrightarrow{\underline{F}^t(q)} \underline{F}^t(X'' \xrightarrow{\pi'} X) \xrightarrow{\Pi_{X''/Y}} \underline{F}^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \rightarrow F^t(Y),$$

ces derniers étant compatibles aux morphismes de transition, on obtient le morphisme d'image directe (149) en passant à la colimite et en multipliant le morphisme obtenu par le degré de  $p$ .

Donnons nous deux  $k$ -schémas lisses connexes de type fini ainsi qu'une correspondance finie  $\alpha \in c_k(X, Y)$ . D'après la remarque 5.3.2, on peut décomposer  $\alpha$  de manière unique sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i [Z_i]$$

où les  $\alpha_i$  sont des entiers relatifs et les  $Z_i$  des sous-schémas fermés intègres de  $X \times Y$  finis et surjectifs sur  $X$ . Notons  $Z_i^N$  le normalisé du schéma intègre  $Z_i$ , qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_i^N & \\
 & \downarrow \text{fini surjectif} & \\
 p_i^N & & q_i^N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{fini surjectif} & & \text{fini surjectif} \\
 p_i & & q_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & & Y.
 \end{array}$$



Dans la démonstration du théorème 2.1.6 de [68], A. Huber définit l'action des correspondances finies sur  $F^t$  en posant

$$F^t(\alpha) := \sum_{i=1}^n \alpha_i (p_{i*}^N \circ q_i^{N*}) \tag{151}$$

et montre que cette définition est fonctorielle et que l'action via (151) des morphismes de schémas est compatible avec celle donnée au lemme 5.3.13. Cela fait donc naturellement de  $F^t$  un foncteur

$$F^t : (\text{SmcCor}_k)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}.$$

où  $\text{SmcCor}_k$  désigne la catégorie des  $k$ -schémas lisses connexes de type fini munis des correspondances finies.

*Remarque 5.3.15.* Pour tout morphisme fini surjectif  $p$ , il résulte immédiatement de la définition des transferts que  $p_* = F(p^t)$ .

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque l'on applique la construction galoisienne à un foncteur déjà muni initialement de transferts. Autrement dit donnons nous cette fois un foncteur

$$F : \text{NorcCor}_k \rightarrow \mathcal{A}$$

où  $\text{NorcCor}_k$  désigne la catégorie des  $k$ -schémas normaux connexes de type fini munis des correspondances finies. Notons  $F^o$  la restriction de ce dernier à la catégorie des  $k$ -schémas normaux connexes. Pour tout  $k$ -schéma lisse connexe de type fini, on dispose du morphisme naturel

$$\theta_X : F(X) \rightarrow (F^o)^t(X)$$

qui est compatible à l'action des morphismes de schémas sur les deux membres : les carrés

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & (F^o)^t(Y) \\ \downarrow F(p) & & \downarrow (F^o)^t(p) \\ F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & (F^o)^t(X) \end{array} \tag{152}$$

sont commutatifs pour tout morphisme de schémas  $p : X \rightarrow Y$ .

*Remarque 5.3.16.* Notons  $\vartheta_{X'/X}$  la composée

$$\underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) \xrightarrow{\iota_{X'/X}} F(X') \xrightarrow{F(\pi^t)} F(X).$$

$\vartheta_{X'/X}$

En remarquant que pour tout élément du groupe de Galois  $g \in \text{Aut}(X'/X)$ , on a  $g^{-1} = g^t$ , on obtient que

$$\begin{aligned} |\text{Aut}(X'/X)|(F(\pi^t) \circ \Pi_{X'/X}) &= \sum_g F(\pi^t) \circ F(g) = \sum_g F(\pi^t) \circ F(g^t) \\ &= \sum_g F(g^t \circ \pi^t) = \sum_g F((\pi \circ g)^t) = \sum_g F(\pi^t) \\ &= |\text{Aut}(X'/X)|F(\pi^t) \end{aligned}$$

les sommes étant prises sur les éléments  $g$  du groupe de Galois  $\text{Aut}(X'/X)$ . On voit ainsi que le triangle ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X') & \xrightarrow{\Pi_{X'/X}} & \underline{F}^t(X' \xrightarrow{\pi} X) \\ & \searrow F(\pi^t) & \downarrow \vartheta_{X'/X} \\ & & F(X). \end{array}$$

**Définition 5.3.17.** Nous dirons que  $F$  est invariant par Galois, lorsque pour tout morphisme fini surjectif génériquement galoisien  $\pi : X' \rightarrow X$ , le morphisme

$$\theta_{X'/X} : F(X) \rightarrow (\underline{F}^o)^t(X' \xrightarrow{\pi} X)$$

est un isomorphisme.

En particulier lorsque  $F$  est invariant par Galois, les morphismes  $\theta_X : F(X) \rightarrow (F^o)^t(X)$  sont des isomorphismes. Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la proposition suivante.

**Proposition 5.3.18.** Soient  $X, Y$  des  $k$ -schémas lisses connexes de type fini. On suppose  $F$  invariant par Galois. Pour toute correspondance finie  $\alpha \in c_k(X, Y)$ , le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & (F^o)^t(Y) \\ \downarrow F(\alpha) & & \downarrow (F^o)^t(\alpha) \\ F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & (F^o)^t(X). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Compte tenu du lemme 5.3.7 et de la commutativité des carrés (152), il nous suffit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\theta_X} & (F^o)^t(X) \\ \downarrow F(p^t) & & \downarrow (F^o)^t(p^t) \\ F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & (F^o)^t(Y) \end{array}$$

est commutatif pour tout morphisme fini surjectif  $p : X \rightarrow Y$ . D'après la remarque 5.3.15, le morphisme  $(F^o)^t(p^t)$  est donné par l'image directe  $p_*$  du lemme 5.3.13.

Fixons un objet  $(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)$  ainsi qu'un schéma normal connexe  $X''$  s'insérant dans un diagramme commutatif de la forme (150). Compte tenu du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{\theta_{X'/X}} & (\underline{F}^o)^t(X' \xrightarrow{\pi} X) & \xrightarrow{(\underline{F}^o)^t(q)} & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi'} X) \\
 \downarrow F(p^t)/\deg(p) & \searrow \theta_X & \downarrow & & \downarrow \Pi_{X''/Y} \\
 & & (F^o)^t(X) & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \\
 & & \downarrow p_*/\deg(p) & \swarrow & \uparrow \\
 F(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & (F^o)^t(Y) & & \\
 & \searrow & & & \uparrow \\
 & & & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \\
 & \swarrow & & & \uparrow \\
 & & & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y)
 \end{array}$$

$\theta_{X''/Y}$

il nous suffit de prouver que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\pi^*} & & \\
 F(X) & \xrightarrow{\theta_{X'/X}} & (\underline{F}^o)^t(X' \xrightarrow{\pi} X) & \longrightarrow & F(X') \\
 \downarrow F(p^t)/\deg(p) & & \downarrow (\underline{F}^o)^t(q) & & \downarrow q^* \\
 & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi'} X) & \longrightarrow & F(X'') \\
 & & \downarrow & \swarrow \Pi_{X''/Y} & \uparrow \\
 F(Y) & \xrightarrow{\theta_{X''/Y}} & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) & & \\
 & \searrow & & & \uparrow \\
 & & & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \\
 & \swarrow & & & \uparrow \\
 & & & & (\underline{F}^o)^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y)
 \end{array}$$

$\pi''^*$

(153)

est commutatif. En utilisant la remarque 5.3.16 et la functorialité, on sait que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xleftarrow{F(\pi^t)} & F(X') \\
 F(p^t) \downarrow & & \uparrow F(q^t) \\
 F(Y) & \xleftarrow{\vartheta_{X''/Y}} \underline{F}^t(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \xleftarrow{\Pi_{X''/Y}} & F(X'') \\
 & \swarrow & \uparrow \\
 & & F(\pi''^t)
 \end{array}$$

(154)

Comme par hypothèse  $F$  est invariant par Galois, le morphisme  $\theta_{X''/Y}$  est un isomorphisme et la formule du degré assure que son inverse est  $\vartheta_{X''/Y}/\deg(\pi'')$ . On déduit ainsi de (154) que

$$\deg(\pi'') \left( \theta_{X''/Y}^{-1} \circ \Pi_{X''/Y} \right) = F(p^t) \circ F(\pi^t) \circ F(q^t).$$

En appliquant les formules du degré relatives aux morphismes  $v$  et  $\pi$ , on obtient maintenant

$$\deg(\pi'') (\Pi_{X''/Y} \circ q^* \circ \pi^*) = \deg(q) \deg(\pi) (\theta_{X''/Y} \circ F(p^t))$$

et donc par multiplicativité du degré

$$\Pi_{X''/Y} \circ q^* \circ \pi^* = \theta_{X''/Y} \circ (F(p^t)/\deg(p)).$$



Pour ce qui concerne la résolution de Godement, nous reprenons les notations et les définitions de la sous-section 3.4.3.

*Remarque 5.3.20.* On notera que nos conventions de la sous-section 3.4.3 concernant la résolutions de Godement pour la topologie étale coïncident avec celle de [66, §5.1].

**Lemme 5.3.21.** *Il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc}
 D\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}}} & D_{\mathcal{MR}} \\
 R_{\ell}^{\mathrm{Sm}} \downarrow & \xrightarrow{\phi_3} & \downarrow \text{Projection sur la compo-} \\
 & & \text{sante } \ell\text{-adique} \\
 & & D_c^b(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_{\ell})
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Dans cette démonstration, nous reprenons certaines notations de [66]. Ainsi  $\tilde{\mathcal{V}}_0$  désigne la catégorie des compactifications lisses [66, defn 1.1.4] et  $\tilde{\mathcal{V}}_0^{\Delta}$  la catégorie des objets cosimpliciaux associée. Rappelons qu’une compactification lisse  $(U, X)$  est la donnée d’un  $k$ -schéma lisse propre  $X$  et d’une immersion ouverte  $j : U \hookrightarrow X$  dont le complémentaire est un diviseur à croisement normal.

Notons  $C_{\mathcal{MR}}$  la catégorie des complexes de réalisations mixtes [68, defn 2.2.2]. Le foncteur  $\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}}$  est construit à partir du foncteur [66, §11.2]

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}} : \mathrm{Sm}_k^{\mathrm{op}} \rightarrow C_{\mathcal{MR}} \tag{157}$$

de la manière suivante. Le foncteur (157) induit un foncteur  $\mathbb{Q}$ -linéaire additif

$$\mathrm{C}^b(\mathbb{Q}[\mathrm{Sm}])^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{C}^b(\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}})} \mathrm{C}^b [ C_{\mathcal{MR}} ] \xrightarrow{\mathrm{Tot}} C_{\mathcal{MR}},$$

qui en passant à la catégorie homotopique, donne un foncteur triangulé

$$\mathrm{K}^b(\mathbb{Q}[\mathrm{Sm}])^{\mathrm{op}} \longrightarrow D_{\mathcal{MR}} \tag{158}$$

qui se factorise par  $D\mathrm{Sm}$  en le foncteur  $\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}}$ .

Notons  $\mathfrak{R}_{\ell}^{\mathrm{Sm}}$  la composante  $\ell$ -adique [66, §9.2,§9.3] du foncteur (157). Étant donnée une compactification lisse  $(U, X)$ , on peut poser

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{\ell}^{\mathrm{Sm}}(U, X) = \pi_{X*} G_{\mathrm{Et}}^{X,*} j_* G_{\mathrm{Et}}^{U,*}(\mathbb{Q}_U/\ell^*).$$

On obtient de la sorte un foncteur

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{\ell}^{\mathrm{Sm}} : \tilde{\mathcal{V}}_0^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)$$

que l’on prolonge naturellement aux objets cosimpliciaux. Finalement le foncteur  $\mathfrak{R}_{\ell}^{\mathrm{Sm}}$  est donné pour tout  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$  par

$$\mathfrak{R}_{\ell}^{\mathrm{Sm}}(X) := \mathrm{colim}_{(U, \bar{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^{\Delta}(X)} \tilde{\mathfrak{R}}_{\ell}^{\mathrm{Sm}}(U, \bar{X})$$

où  $\tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)$  désigne la catégorie [66, defn 1.1.4] des résolutions cosimpliciales de  $X$ . Par définition pour toute compactification lisse  $(U, X)$ , on a

$$R_\ell^{\text{Sm}}(U) = \pi_{U*} G_{\text{Ét}}^{U,*}(\mathbb{Q}_U/\ell^*)$$

ce qui donne un quasi-isomorphisme canonique

$$R_\ell^{\text{Sm}}(U) \xrightarrow{\text{qis}} \tilde{\mathfrak{X}}_\ell^{\text{Sm}}(U, X).$$

On obtient ainsi, en utilisant la descente cohomologique propre, un quasi-isomorphisme canonique

$$R_\ell^{\text{Sm}}(X) \xrightarrow{\text{qis}} \text{colim}_{(U, \bar{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)} R_\ell^{\text{Sm}}(U) \xrightarrow{\text{qis}} \text{colim}_{(U, \bar{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)} \tilde{\mathfrak{X}}_\ell^{\text{Sm}}(U, \bar{X}) = \mathfrak{X}_\ell^{\text{Sm}}(X)$$

pour tout  $k$ -schéma lisse de type fini  $X$ . On voit ainsi que le foncteur (156) pour  $\mathcal{C} = \text{Sm}$  et la composante  $\ell$ -adique de (158) sont isomorphes, ce qui prouve le lemme.  $\square$

La démonstration de la proposition 5.3.1 se réduit donc à montrer l'existence d'un isomorphisme de foncteur  $\phi_1$  :

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}^{\text{eff}}(k)^{\text{op}} & \xrightarrow{(159)} & D\text{Var}^{\text{op}} \\ R_\ell \downarrow & \xRightarrow{\phi_1} & \downarrow R_\ell^{\text{Var}} \\ & & D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell). \end{array}$$

On peut décrire la composée de (159) et  $R_\ell^{\text{Var}}$  de la manière suivante. En appliquant la construction galoisienne au foncteur  $R_\ell^o$ , on obtient un foncteur

$$(R_\ell^o)^\dagger : \text{SmCor}_k^{\text{op}} \rightarrow C^+(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*).$$

Ce dernier induit un foncteur

$$C^b(\text{SmCor}_k)^{\text{op}} \xrightarrow{C^b((R_\ell^o)^\dagger)} C^b[C^+(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)] \xrightarrow{\text{Tot}} C^+(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)$$

et en passant aux catégories homotopiques, on obtient un foncteur triangulé

$$K^b(\text{SmCor}_k)^{\text{op}} \rightarrow D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell)$$

qui se factorise par  $DM_{gm}^{\text{eff}}(k)$  donnant ainsi la composée de (159) et  $R_\ell^{\text{Var}}$ .

Compte tenu de la proposition 5.3.18, la comparaison des deux foncteurs de réalisations se ramène maintenant essentiellement à vérifier certaines propriétés d'invariance sous Galois de la résolution de Godement que nous donnons maintenant.

**Définition 5.3.22.** Nous dirons qu'un faisceau étale de groupes abéliens  $F$  est de type Galois, lorsque pour tout morphisme fini surjectif génériquement galoisien  $\pi : X' \rightarrow X$ , le morphisme canonique

$$F_X \rightarrow (\pi_* F_{X'})^{\text{Aut}(X'/X)}$$

est un isomorphisme.

**Lemme 5.3.23.** *Soit  $F$  un faisceau étale de type Galois. Alors le faisceau étale  $\mathcal{G}_{\text{Et}}(F)$  est de type Galois. En particulier la monade  $\mathcal{G}_{\text{Et}}$  induit une monade sur la sous-catégorie pleine de  $\text{Sh}_{\text{Et}}^{\mathbb{Z}}(\text{Spec}(k))$  formé des faisceaux de type Galois.*

DÉMONSTRATION. — Fixons un morphisme fini surjectif et génériquement galoisien  $\pi : X' \rightarrow X$  ainsi qu'un  $X$ -schéma étale  $U$ . Notons  $U' = X' \times_X U$  le schéma obtenu par changement de base. Comme  $F$  est supposé de type Galois, on voit que les sections sur  $U$  du faisceau

$$(\pi_* \mathcal{G}_{\text{Et}}(F)_{X'})^{\text{Aut}(X'/X)}$$

sont données par

$$\begin{aligned} (\pi_* \mathcal{G}_{\text{Et}}(F)_{X'})^{\text{Aut}(X'/X)}(U) &= \mathcal{G}_{\text{Et}} F(U')^{\text{Aut}(X'/X)} = \left( \prod_{\substack{\bar{x}' \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U'}} F_{\bar{x}'} \right)^{\text{Aut}(X'/X)} \\ &= \prod_{\substack{\bar{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U}} \left( \prod_{\substack{\bar{x}' \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U' \\ \text{se projetant sur } \bar{y}}} F_{\bar{x}'} \right)^{\text{Aut}(X'/X)} \\ &= \prod_{\substack{\bar{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U}} F_{\bar{y}} = \mathcal{G}_{\text{Et}} F(U). \end{aligned}$$

On voit ainsi que le morphisme

$$(\mathcal{G}_{\text{Et}} F)_X \rightarrow (\pi_* (\mathcal{G}_{\text{Et}} F)_{X'})^{\text{Aut}(X'/X)}$$

est un isomorphisme de préfaisceaux et donc un isomorphisme de petits faisceaux étales sur  $X$ , ce qui justifie notre assertion.  $\square$

*Remarque 5.3.24.* Le lemme 5.3.23 assure que la résolution de Godement d'un faisceau étale de type Galois, est aussi de type Galois.

Nous pouvons maintenant prouver le lemme suivant.

**Lemme 5.3.25.** *Il existe un isomorphisme de foncteur  $\phi_1$  :*

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}^{\text{eff}}(k)^{\text{op}} & \xrightarrow{(159)} & D\text{Var}^{\text{op}} \\ \downarrow R_\ell & \xRightarrow{\phi_1} & \downarrow R_\ell^{\text{Var}} \\ & & D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Le faisceau  $\mathbb{Q}/\ell^*$  étant de type Galois, il résulte du lemme 5.3.23 que le complexe  $G_{\text{Et}}^*[\mathbb{Q}/\ell^*]$  est aussi de type Galois. Cela entraîne que le foncteur  $R_\ell$  est invariant par Galois au sens de la définition 5.3.17. La proposition 5.3.18 nous assure alors que pour tout

$k$ -schéma lisse connexe de type fini  $X, Y$  et toute correspondance finie  $\alpha \in c_k(X, Y)$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{R}_\ell(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & (\underline{R}_\ell^o)^t(Y) \\ \underline{R}_\ell(\alpha) \downarrow & & \downarrow (\underline{R}_\ell^o)^t(\alpha) \\ \underline{R}_\ell(X) & \xrightarrow{\theta_X} & (\underline{R}_\ell^o)^t(X) \end{array}$$

est commutatif. Cela prouve donc que les foncteurs  $\underline{R}_\ell$  et  $(\underline{R}_\ell^o)^t$  sont isomorphes via la transformation naturelle  $\theta$  donnée par les  $\theta_X$ . Le reste du lemme s'en déduit.  $\square$

### 5.4. Lien avec les classes de cycles

Dans cette dernière section nous appliquons les résultats du chapitre 4 afin de vérifier que les morphismes induit au niveau de la cohomologie par le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique que nous avons obtenus au théorème 5.2.1 sont compatibles aux classes de cycles  $\ell$ -adiques construites par A. Grothendieck et prolongées aux groupes de Chow supérieurs par S. Bloch, T. Geisser et M. Levine [14, 45] — dans [45] les classes de cycles sont à coefficients de torsion mais la construction est valable pour les coefficients  $\ell$ -adiques [79]. Nous reprenons ainsi la convention des sections 4.2 à 4.5.

**Nous supposons que  $S$  est le spectre d'un corps parfait  $k$ .**

Nous traitons dans un premier temps le cas des groupes de Chow usuels. Nous nous ramènerons à ce cas pour les groupes de Chow supérieurs à l'aide d'un « argument de relativisation ». Soit  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse. Nous désignerons dans la suite par

$${}^\ell c_n(E) \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))$$

les classes de Chern  $\ell$ -adiques d'un fibré vectoriel de rang fini sur  $X$ . De même nous désignerons par

$${}^\ell \text{cl}_{X,W}^{p,q} : \text{CH}_Z^p(X, q) \rightarrow H_W^{2p-q}(X, \mathbb{Z}_\ell(q))$$

les morphismes classes de cycles en cohomologie  $\ell$ -adique à support dans un sous-schéma fermé  $W$  de  $X$ .

**5.4.1. Cas des groupes de Chow.** — Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'une manière canonique d'identifier la réalisation  $\ell$ -adique du motif de Tate avec  $\mathbb{Z}_\ell(-1)$ . En utilisant les notations de la définition 4.3.4, cela se traduit plus précisément par le lemme suivant.

**Lemme 5.4.1.** *Il existe des isomorphismes canoniques  $R_\ell(\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\vartheta_n} \mathbb{Z}_\ell(-n)$  rendant commutatif, pour tout  $n \geq 0$ , le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & R_\ell(\mathbb{P}^n) & \\ R_\ell(\iota_{\mathbb{A}^{n+1}}) \nearrow & & \nwarrow \\ \bigoplus_{q=0}^n R_\ell(\mathbb{Z}(q))[-2q] & \xrightarrow{\bigoplus_{q=0}^n \vartheta_q[-2q]} & \bigoplus_{q=0}^n \mathbb{Z}_\ell(-q)[-2q]. \end{array} \tag{160}$$



DÉMONSTRATION. — On dispose des décompositions canoniques

$$\bigoplus_{q=0}^n R_\ell(\mathbb{Z}(q))[-2q] \xrightarrow{R_\ell(\iota(\mathbb{A}^{n+1}))} R_\ell(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \mathbb{Z}_\ell(-q)[-2q].$$

Notons  $\vartheta_1$  le morphisme indépendant de  $n$  obtenu après décalage par [2] de la composition du morphisme  $R_\ell(\iota_1(\mathbb{A}^{n+1}))$  et de la projection sur le facteur  $\mathbb{Z}_\ell(-1)[-2]$  dans l'autre décomposition. Par construction, comme on le voit pour  $n = 1$ , le morphisme  $\vartheta_1$  est un isomorphisme satisfaisant la relation

$${}^\ell c_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}}) \circ \vartheta_1[-2] = R_\ell(\mathbf{c}_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}}))$$

Le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique construit étant tensoriel, pour  $q$  quelconque, on dispose d'un morphisme naturel

$$R_\ell(\mathbb{Z}(q)) \xrightarrow{\vartheta_q} R_\ell(\mathbb{Z}(1))^{\otimes q} \xrightarrow{\vartheta_1^{\otimes q}} \mathbb{Z}_\ell(-1)^{\otimes q} = \mathbb{Z}_\ell(-q).$$

En particulier on a

$${}^\ell c_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}})^q \circ \vartheta_q[-2q] = R_\ell(\mathbf{c}_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}})^q) = R_\ell(\iota_q(\mathbb{A}^{n+1})).$$

ce qui signifie que les morphismes  $\vartheta_q$  rendent le diagramme (160) commutatif. Par récurrence on voit alors que les  $\vartheta_q$  sont des isomorphismes.  $\square$

Plus généralement il résulte de la construction des isomorphismes  $\vartheta_n$  que le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique est compatible aux décompositions des fibrés projectifs. On dispose en effet du résultat suivant.

**Lemme 5.4.2.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $n + 1$  sur  $X$ . Le triangle ci-dessous est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & R_\ell(\mathbb{P}(E)) & \\ R_\ell(\iota_E) \nearrow & & \nwarrow \text{décomposition donnée} \\ & & \text{par les classes de Chern } \ell\text{-adiques} \\ \bigoplus_{q=0}^n R_\ell(M(X)(q))[-2q] & \xrightarrow{\bigoplus_{q=0}^n \vartheta_q[-2q]} & \bigoplus_{q=0}^n R_\ell(X)(-q)[-2q]. \end{array} \tag{161}$$

Soit  $X$  un  $k$ -schéma lisse de type fini. Pour tout entier relatif  $p, q$  le foncteur de réalisation  $\ell$ -adique du théorème 5.2.1 nous fournit des morphismes canoniques

$$\begin{aligned} H^p(X, \mathbb{Z}(q)) &= \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]) \\ &\xrightarrow{R_\ell} \text{Hom}_{D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell)}(R_\ell(\mathbb{Z}(q))[-p], R_\ell(X)) \\ &\stackrel{\vartheta_q}{=} \text{Hom}_{D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{Z}_\ell(-q)[-p], R_\ell(X)) \\ &= \text{Hom}_{D_c^b(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}_\ell)}(\mathbb{Z}_\ell, R_\ell(X)(q)[p]) = H^p(X, \mathbb{Z}_\ell(q)). \end{aligned}$$

Nous notons

$$\mathfrak{r}_X^{p,q} : H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H^p(X, \mathbb{Z}_\ell(q))$$

les morphismes obtenus ci-dessus. Ces derniers sont par construction compatibles à la fonctorialité et au cup-produit dont sont munies la cohomologie motivique et la cohomologie  $\ell$ -adique.

Plus généralement si  $W$  est un sous-schéma fermé de  $X$ , on dispose d'un morphisme canonique au niveau des groupes de cohomologie à support

$$\mathfrak{r}_{X,W}^{p,q} : H_W^p(X, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H_W^p(X, \mathbb{Z}_\ell(q)).$$

Compte tenu de la construction usuelle des classes de Chern et de Thom, le lemme 5.4.2 admet pour corollaire immédiat le résultat suivant dans lequel  ${}^\ell\text{tc}(E)$  désigne la classe de Thom  $\ell$ -adique d'un fibré vectoriel  $E$ .

**Corollaire 5.4.3.** *Soient  $E$  un fibré vectoriel de rang fini sur un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse  $X$  et  $n \geq 0$  un entier. On a*

$${}^\ell c_n(E) = \mathfrak{r}_X^{2n,n}(c_n(E)) \quad {}^\ell\text{tc}(E) = \mathfrak{r}_{E,X}^{2n,n}(\text{tc}(E)).$$

Il nous suffit maintenant d'appliquer la proposition 4.5.15 pour obtenir la comparaison recherchée dans le cas des groupes de Chow classiques.

**Corollaire 5.4.4.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse et  $W$  un sous schéma fermé de  $X$ . Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}_W^n(X) & \xrightarrow{\text{cl}_{X,W}^n} & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) \\ & \searrow \text{}^\ell\text{cl}_{X,W}^n & \downarrow \mathfrak{r}_{X,W}^{2n,n} \\ & & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n)) \end{array}$$

*est commutatif*

DÉMONSTRATION. — Le corollaire résulte du 5.4.3 et de la proposition 4.5.15 en remarquant que les classes de cycles  $\ell$ -adiques sont données par la construction naïve que nous avons donnée au chapitre 4 — menée cette fois dans le cadre  $\ell$ -adique. Il s'agit d'un résultat classique que l'on peut vérifier par exemple par une démonstration analogue à celle de la proposition 4.5.15.  $\square$

**5.4.2. Cas des groupes de Chow supérieurs.** — Nous étendons maintenant le résultat précédent aux groupes de Chow supérieurs de Bloch. Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse,  $W$  un sous-schéma fermé de  $X$  et  $D_1, \dots, D_n$  des sous-schémas fermés de  $X$  formant un diviseur à croisement normal  $D$  de  $X$ . Nous renvoyons au paragraphe 2.6 de [98, chapitre I] pour la construction du « motif relatif » à support

$$M_W(X; D) = M_W(X; D_1, \dots, D_n).$$

Dans *loc.cit.* la construction est effectuée pour les motifs mixtes de Levine mais cette dernière se transpose sans problème aux motifs de Voevodsky. Par construction on dispose d'un triangle distingué

$$M(U; D_1^U, \dots, D_n^U) \rightarrow M(X; D_1, \dots, D_n) \rightarrow M_W(X; D_1, \dots, D_n) \xrightarrow{+1}$$

dans lequel  $U = X \setminus W$  et  $D_i^U = D_i \cap U$ . On dispose en outre du triangle distingué de « relativisation » donné par

$$M(D_r; D_{1,n}, \dots, D_{n-1,n}) \rightarrow M(X; D_1, \dots, D_{n-1}) \rightarrow M(X; D_1, \dots, D_n) \xrightarrow{+1} \quad (162)$$

avec la convention  $D_{i,n} = D_i \cap D_n$ . Pour un sous-ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , nous notons  $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ . La cohomologie motivique relative à support se définit par

$$H_W^p(X; D, \mathbb{Z}(q)) = \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M_W(X; D_1, \dots, D_n), \mathbb{Z}(q)[p]).$$

On dispose naturellement d'un analogue  $\ell$ -adique que l'on note  $H_W^p(X; D, \mathbb{Z}_\ell(q))$ .

*Remarque 5.4.5.* Le foncteur de réalisation du théorème 5.2.1 induit un morphisme au niveau des groupes de cohomologie relative à support

$$\mathfrak{r}_{(X;D),W}^{p,q} : H^p(X; D, \mathbb{Z}(q)) \rightarrow H_W^p(X; D, \mathbb{Z}_\ell(q)).$$

La proposition suivante est une utilisation classique de la pureté que l'on retrouve à mainte reprise dans la littérature [13, 96, 98].

**Proposition 5.4.6.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse et  $D_1, \dots, D_r$  des sous-schémas fermés de  $X$  formant un diviseur à croisement normal  $D$  de  $X$ . Étant donné un sous-schéma fermé  $W$  de  $X$  purement de codimension  $p$  qui intersecte proprement les  $D_I$ , on a des suites exactes courtes*

$$(Theorie\ de\ Chow) \quad 0 \rightarrow \text{CH}_W^p(X, D) \rightarrow \text{CH}_W^p(X) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{CH}_{W \cap D_i}^p(D_i)$$

$$(Cohomologie\ motivique) \quad 0 \rightarrow H_W^{2p}(X; D, \mathbb{Z}(p)) \rightarrow H_W^{2p}(X, \mathbb{Z}(p)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n H_{W \cap D_i}^{2p}(D_i, \mathbb{Z}(p))$$

$$(Cohomologie\ \ell\text{-adique}) \quad 0 \rightarrow H_W^{2p}(X; D, \mathbb{Z}_\ell(p)) \rightarrow H_W^{2p}(X, \mathbb{Z}_\ell(p)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n H_{W \cap D_i}^{2p}(D_i, \mathbb{Z}_\ell(p)).$$

DÉMONSTRATION. — Nous nous contenterons de montrer le résultat concernant la cohomologie motivique, l'analogie concernant les groupes de Chow ou la cohomologie  $\ell$ -adique se vérifiant de la même manière. Montrons tout d'abord le résultat de semi-pureté relative suivant

$$H_W^{2p-r,p}(X; D) = 0$$

dès lors que  $r > 0$ . Lorsque  $n = 0$  cette annulation correspond au théorème de semi-pureté. Lorsque  $n > 0$  on dispose de la suite exacte longue de « relativisation » associée au triangle distingué (162)

$$\begin{array}{ccc} \dots \longrightarrow H_{W \cap D_n}^{2p-r-1,p}(D_n; D_{1,n}, \dots, D_{n-1,n}) & \longrightarrow & H_W^{2p-r,p}(X; D_1, \dots, D_n) \\ & & \downarrow \\ & & H_W^{2p-r,p}(X; D_1, \dots, D_{n-1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

et l'annulation voulue se déduit de cette suite exacte longue par récurrence sur  $n$ . En particulier on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_W^{2p,p}(X; D) \longrightarrow H_W^{2p,p}(X; D_1, \dots, D_{n-1}) \longrightarrow H_{W \cap D_n}^{2p,p}(D_n; D_{1,n}, \dots, D_{n-1,n})$$

et de nouveau par récurrence sur  $n$  on obtient la suite exacte courte voulue

$$0 \longrightarrow H_W^{2p,p}(X; D) \longrightarrow H_W^{2p,p}(X) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n H_{W \cap D_i}^{2p,p}(D_i).$$

Ce qui prouve la proposition. □

*Remarque 5.4.7.* Dans la situation précédente, il résulte des constructions de F. Friedlander, A. Suslin et V. Voevodsky rappelées dans la section 4.2, que les isomorphismes identifiant les groupes de Chow à la cohomologie motivique s'étendent à des isomorphismes

$$\mathrm{cl}_{(X,D),W}^p : \mathrm{CH}_W^p(X; D) \xrightarrow{\sim} H_W^{2p}(W; D, \mathbb{Z}(p)).$$

Ces isomorphismes sont compatibles aux suites exactes longues de relativisation.

Nous reprenons les notations suivantes de [98, Chapitre VI]. Ainsi  $\square^1$  est le sous-schéma ouvert de  $\mathbb{P}^1$  complémentaire de la section unité et  $\square^n$  désigne le produit de  $n$ -copie de  $\square^1$ . En notant  $(t_1, \dots, t_n)$  les coordonnées naturelles sur  $\square^n$ , nous désignons par  $\partial\square^n$  la collection des diviseurs

$$\partial\square^n = \{t_1 = 0, t_1 = \infty, \dots, t_n = 0, t_n = \infty\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la proposition suivante :

**Proposition 5.4.8.** *Soient  $X$  un  $k$ -schéma quasi-projectif lisse et  $p, q$  deux entiers relatifs. Le triangle suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X, q) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^{p,q}} & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) \\ & \searrow \ell \mathrm{cl}_X^{p,q} & \downarrow \tau_X^{2p-q,p} \\ & & H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}_\ell(p)) \end{array}$$

*est commutatif.*

DÉMONSTRATION. — On dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathrm{CH}^p(X, q) = \mathrm{CH}^p(X\square^q; X\partial\square^q) \quad H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p)) = H^{2p}(X\square^q; X\partial\square^q, \mathbb{Z}(p))$$

$$H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}_\ell(p)) = H^{2p}(X\square^q; X\partial\square^q, \mathbb{Z}_\ell(p)),$$

et il suffit donc que nous prouvions que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^p(X; D) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{(X;D)}^p} & H^{2p}(X; D, \mathbb{Z}(p)) \\ & \searrow \ell \mathrm{cl}_{(X;D)}^p & \downarrow \tau_{(X;D)}^{2p,p} \\ & & H^{2p}(X; D, \mathbb{Z}_\ell(p)) \end{array}$$

pour tout sous-schéma fermé  $D_1, \dots, D_n$  formant un diviseur à croisement normal de  $X$ . Fixons un sous-schéma fermé  $W$  de  $X$  purement de codimension  $p$  qui intersecte proprement les  $D_I$ . En utilisant la description des groupes de Chow relatifs donnée dans la discussion précédent le lemme 2.5 de [96], tout se ramène à prouver que, pour un sous-schéma fermé  $W$  de  $X$  purement de codimension  $p$  et intersectant proprement les  $D_I$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}_W^p(X; D) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_{(X;D),W}^p} & H_W^{2p}(X; D, \mathbb{Z}(p)) \\ & \searrow \ell \mathrm{cl}_{(X;D),W}^p & \downarrow \tau_{(X;D),W}^{2p,p} \\ & & H_W^{2p}(X; D, \mathbb{Z}_\ell(p)) \end{array}$$

sont commutatifs. En utilisant les suites exactes de la proposition 5.4.6 ainsi que la remarque 5.4.7, on voit que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}_W^n(X; D) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_W^p(X) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{CH}_{W \cap D_i}^n(D_i) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H_W^{2n}(X; D, \mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r H_{W \cap D_i}^{2n}(D_i, \mathbb{Z}(n)) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H_W^{2n}(X; D, \mathbb{Z}_\ell(n)) & \longrightarrow & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r H_{W \cap D_i}^{2n}(D_i, \mathbb{Z}_\ell(n))
\end{array}$$

Par ailleurs, la proposition 4.5 de [45] assure que les morphismes classes de cycles  $\ell$ -adiques sont compatibles aux suites exactes longues de relativisation. On en déduit ainsi que les carrés

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}_W^n(X; D) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_W^p(X) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{CH}_{W \cap D_i}^n(D_i) \\
& & \downarrow \ell \mathrm{cl}_{(X; D), W}^n & & \downarrow \ell \mathrm{cl}_{X, W}^p & & \downarrow \ell \mathrm{cl}_{D_i, W \cap D_i}^n \\
0 & \longrightarrow & H_W^{2n}(X; D, \mathbb{Z}_\ell(n)) & \longrightarrow & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r H_{W \cap D_i}^{2n}(D_i, \mathbb{Z}_\ell(n))
\end{array}$$

sont commutatifs et il suffit pour conclure d'appliquer le corollaire 5.4.4.  $\square$



## APPENDICE A

### COEFFICIENTS $\ell$ -ADIQUES

Avec cet appendice nous précisons la nature des coefficients  $\ell$ -adiques que nous utilisons pour réaliser les motifs mixtes sur  $S$ . Nous en profitons pour fixer les notations que nous utilisons dans la cadre  $\ell$ -adique.

Dans son article [30], P. Deligne propose de considérer, pour un anneau de valuation discrète  $\mathfrak{o}$  d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , la catégorie

$$2\text{-lim } D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_r) \quad \mathfrak{o}_r = \mathfrak{o}/\mathfrak{m}^{r+1}$$

2-limite projective du système projectif  $r \mapsto D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_r)$  dans lequel

- les morphismes de transition sont fournis par les produits tensoriels

$$D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_s) \xrightarrow{\mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,s}}^L -} D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_r) \quad r \geq s ;$$

- $D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_r)$  désigne la sous-catégorie triangulée de la catégorie dérivée  $D^b(\mathfrak{o}_{S,r})$  formée des objets de tor dimension finie et à cohomologie constructible.

Mais cette construction ne fournit pas en toute généralité une catégorie triangulée. En effet la 2-limite projective d'un système projectif de catégories triangulées à morphismes de transition triangulés n'est pas a priori munie d'une structure triangulée. En revanche d'après la proposition 2.2.15 de [12], cette construction devient tout à fait raisonnable lorsque le groupe abélien

$$\text{Hom}_{D_c(S, \mathfrak{o}_r)}(F, G)$$

est fini pour tout objet  $F, G$  de  $D_{\text{ctf}}^b(S, \mathfrak{o}_r)$ .

En pratique on sait que cette hypothèse est satisfaite par exemple lorsque  $S$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}$  ou sur le spectre d'un corps  $k$  tel que, pour extension finie séparable de  $E$  de  $k$ , les groupes de cohomologie Galoisienne  $H^i(G_E, \mathbb{Z}/\ell)$  sont finis — ceci inclut notamment le cas où  $k$  est un corps fini ou un corps algébriquement clos.

La construction de P. Deligne recouvre donc un grand nombre de situations géométriques mais présente un inconvénient majeur relativement à notre approche : il est extrêmement malaisé de travailler « à homotopie près » dans une limite projective de catégories triangulées même lorsque chacune d'entre elle est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne.

La construction inconditionnelle des catégories  $D_c^-(X, \mathfrak{o})$  et  $D_c^b(X, \mathfrak{o})$  donnée ultérieurement par T. Ekedahl dans [35] ne présente pas cet inconvénient. Cela tient au fait que le passage à la limite projective n'est pas effectuée au niveau des catégories triangulées mais au niveau des complexes. Naturellement lorsque l'hypothèse de finitude n'est plus satisfaite, le foncteur  $\lim$  n'est plus exact, et la cohomologie  $\ell$ -adique n'est pas donnée par la simple limite

$$\lim_r H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^r)$$

mais par la cohomologie étale continue de U. Jannsen [70] : en d'autres termes il y a lieu de dériver aussi le foncteur limite projective pour obtenir un résultat raisonnable. Le passage à la limite projective au niveau des complexes permet justement de dériver ce foncteur et la catégorie de T. Ekedahl fournit le « formalisme dérivé » correspondant à la cohomologie étale continue de U. Jannsen.

Dans [35] le point de vu adopté est plus général que dans cet appendice. Nous nous restreignons au seul cadre  $\ell$ -adique provenant de la théorie des schémas. Le fait de ne considérer que les coefficients relatifs à un anneau de valuation discrète — condition essentielle dans la présentation de [30] — permet de donner une description de la  $t$ -structure naturelle sur  $D_c^-(X, \mathfrak{o})$  sans avoir recours aux  $R$ -complexes de [35]. Dans *loc. cit.* l'utilité principale de ces derniers consiste à mettre en évidence la  $t$ -structure que l'on ne peut pas lire au niveau des complexes normalisés en général. Dans le cas des anneaux de valuation discrète, nous remarquons en effet que la construction explicite des foncteurs de troncation de [30] peut être réalisée dans le cadre considéré par T. Ekedahl.

Fixons un nombre premier  $\ell$  inversible sur  $S$  et une extension finie  $E$  de  $\mathbb{Q}_\ell$  dont on note  $\mathfrak{o}$  l'anneau des entiers. Ce dernier est un anneau de valuation discrète dont on note  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal et  $\pi$  une uniformisante. Pour simplifier on notera

$$\mathfrak{o}_r = \mathfrak{o}/\mathfrak{m}^{r+1}.$$

Nous-désignons dans la suite par  $\mathfrak{o}_{S,r}$  le petit faisceau étale d'anneaux sur  $S$  associé à  $\mathfrak{o}_r$ .

### A.1. Rappels sur les faisceaux $\ell$ -adiques

Nous renvoyons le lecteur à l'exposé V de [6] pour un exposé détaillé des notions concernant les faisceaux  $\ell$ -adiques. On peut considérer le topos  $\mathbb{N}^{\text{op}}S_{\text{et}}$  des systèmes projectifs de faisceaux étales sur  $S$  ainsi que le faisceau d'anneaux sur ce dernier

$$\mathfrak{o}_{S,*} : \cdots \rightarrow \mathfrak{o}_{S,r} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathfrak{o}_{S,0}.$$

La catégorie des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules est une catégorie abélienne de Grothendieck et un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $F$  est dit  $\ell$ -adique lorsque pour tout  $r$  les morphismes de transition induisent un isomorphisme

$$\mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{r+1}} F_{r+1} \xrightarrow{\sim} F_r.$$

On voit immédiatement que la catégorie des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques, que nous noterons  $\text{Mod}(S, \mathfrak{o})$  dans la suite, est stable par extension et par conoyau mais non stable par noyau.



Un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $F$  est dit A.R.-nul lorsqu'il existe un entier  $r$  tel que le morphisme canonique  $F[r] \rightarrow F$  soit nul dans  $\mathbb{N}^{\text{op}}\text{Mod}(\mathbb{Z}_S)$ . La sous-catégorie  $\mathcal{N}_{\text{A.R.}}$  des objets A.R.-nul de  $\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})$  est épaisse et nous noterons

$$\text{A.R. Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}) = \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}) / \mathcal{N}_{\text{A.R.}}$$

la catégorie abélienne quotient. Les morphismes dans cette dernière sont donnés d'après la proposition 2.4.3 de *loc.cit.* par

$$\text{Hom}_{\text{A.R. Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})}(F, G) = \text{colim}_r \text{Hom}_{\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})}(F[r], G).$$

Les  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques sont A.R.-locaux et le foncteur de localisation induit une équivalence de catégories

$$\text{Mod}(S, \mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} \text{A.R. Mod}(S, \mathfrak{o})$$

Le second membre étant par définition l'image essentielle du premier dans la catégorie  $\text{A.R. Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})$ . Les objets de  $\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})$  dont l'image appartient à  $\text{A.R. Mod}(S, \mathfrak{o})$ , autrement dit les objets A.R.-isomorphes à un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $\ell$ -adique sont appelés dans *loc.cit.* les  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules A.R.- $\ell$ -adiques. On note  $\text{Mod}_{\text{A.R.}}(S, \mathfrak{o})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})$  formée des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules A.R.- $\ell$ -adiques. On remarquera que cette dernière est stable par conoyau.

En désignant par  $\text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,*})$  la sous-catégorie formée des systèmes projectifs de faisceaux constructibles, on pose

$$\text{Mod}_c(S, \mathfrak{o}) = \text{Mod}(S, \mathfrak{o}) \cap \text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,*}) \quad \text{Mod}_{\text{A.R.,c}}(S, \mathfrak{o}) = \text{Mod}_{\text{A.R.}}(S, \mathfrak{o}) \cap \text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,*}).$$

La proposition suivante donne un résumé des résultats de l'exposé V de [6]. Elle s'énonce comme suit.

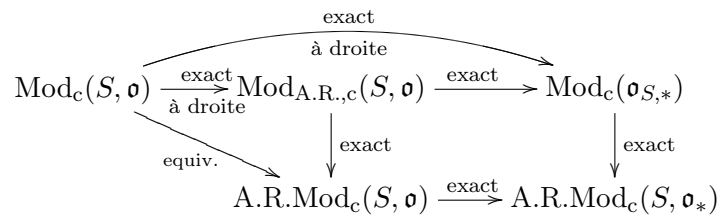
**Proposition A.1.1.** 1. La catégorie  $\text{Mod}_{\text{A.R.,c}}(S, \mathfrak{o})$  est abélienne, noethérienne et artinienne, et stable par extension dans  $\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*})$ .

2. Un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module constructible  $F$  est A.R.- $\ell$ -adique si et seulement si on peut trouver une stratification  $\mathcal{S}$  de  $S$  telle que la restriction de  $F$  à chaque strate de  $\mathcal{S}$  soit A.R.- $\ell$ -adique.

3. Un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module constructible  $F$  est A.R.- $\ell$ -adique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- (a) il existe une stratification  $\mathcal{S}$  de  $S$  telle que la restriction des  $F_r$  à chaque strate de  $\mathcal{S}$  soit lisse,
- (b) pour tout point géométrique  $\underline{s}$  de  $S$ , le  $\mathfrak{o}_*$ -module  $F_{\underline{s}}$  est A.R.- $\ell$ -adique.

En particulier la proposition A.1.1 assure que la catégorie des  $\mathfrak{o}_{X,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles est abélienne et de plus noethérienne et artinienne. On peut résumer les relations entre les différentes catégories par le diagramme



*Remarque A.1.2.* La catégorie des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles est certes abélienne mais le foncteur d'inclusion dans  $\text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,*})$  est seulement exact à droite.

On dispose des foncteurs adjoints

$$\pi_* : \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_X) \quad \pi^* : \text{Mod}(\mathfrak{o}_S) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}).$$

d'autre part d'un foncteur exact

$$(-)_r : \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,r}) ; F \mapsto F_r$$

et d'un foncteur exact à droite pleinement fidèle

$$\iota_r : \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,r}) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}).$$

**Lemme A.1.3.** *Le foncteur  $\iota_r$  induit un foncteur exact pleinement fidèle*

$$\iota_r : \text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,r}) \rightarrow \text{Mod}_c(S, \mathfrak{o}). \quad (163)$$

DÉMONSTRATION. — Le foncteur  $\iota_r$  est exact à droite, prend ses valeurs dans la catégorie des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques et préserve la constructibilité. Il suffit donc juste de vérifier que le foncteur induit (163) préserve les noyaux. Par définition, pour un morphisme  $\alpha : F \rightarrow G$  de  $\mathfrak{o}_{S,r}$ -modules constructibles les morphismes canoniques

$$[\iota_r(\ker \alpha)]_s \rightarrow \ker [\iota_r(\alpha)]_s$$

sont des isomorphismes pour  $s \geq r$  ce qui assure que le morphisme canonique de  $\iota_r \ker \alpha$  dans  $\ker \iota_r \alpha$  est un A.R.-isomorphisme.  $\square$

On dispose du lemme suivant.

**Lemme A.1.4.** *Pour tout  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $\ell$ -adique constructible  $F$ , il existe un entier  $r$  et une suite exacte*

$$0 \rightarrow H \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$$

dans laquelle  $G$  est  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module plat et  $H$  appartient à  $\text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,r})$ .

Par ailleurs on a immédiatement le lemme.

**Lemme A.1.5.** *Soit  $k$  un corps séparablement clos, alors le foncteur exact*

$$\pi_* : \text{Mod}_c(\text{Spec } k, \mathfrak{o}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{t.f.}}(\mathfrak{o})$$

où le second membre désigne la catégorie des  $\mathfrak{o}$ -modules de type fini est une équivalence de catégorie.

## A.2. La catégorie de T. Ekedahl

Les arguments utilisés dans la suite utilisent de manière cruciale le fait que l'on se restreigne au cas d'un anneau de valuation discrète. Cela recouvre le cas des coefficients  $\ell$ -adiques et simplifie les démonstrations. En particulier on peut lire la  $t$ -structure uniquement à partir des complexes normalisés ce qui n'est pas le cas dans la discussion plus générale de [35]. Les propriétés particulières aux anneaux de valuation discrète utilisées dans la suite sont données par le lemme suivant :

**Lemme A.2.1.** *Soient  $r$  un entier  $\geq 0$  et  $F$  un  $\mathfrak{o}_r$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $F$  est injectif;
2.  $F$  est libre;
3.  $F$  est projectif;
4.  $F$  est plat;
5. pour tout  $1 \leq s \leq r + 1$  le noyau de la multiplication par  $\pi^s$  sur  $F$  est  $\mathfrak{m}^{r+1-s}F$ .

*Remarque A.2.2.* Comme  $\mathfrak{o}_r$  est principal, un sous-module d'un  $\mathfrak{o}_r$ -module libre est libre, ce qui assure qu'un sous-module d'un module plat est plat.

Pour simplifier, nous avons adopté dans cette thèse la notation

$$D(S, \mathfrak{o}_*) := D(\text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}))$$

pour la catégorie dérivée de la catégorie abélienne de Grothendieck des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules. Pour un objet  $F \in D(S, \mathfrak{o}_*)$ , nous reprenons la notation suivante de [35]

$$\widehat{F} := L\pi^* R\pi_* F.$$

On prendra garde que cette notation suggère une complétion mais que par adjonction le morphisme naturel est de la forme  $\widehat{F} \rightarrow F$ . En fait il s'agit tout de même d'une complétion en un sens puisque le foncteur  $R\pi_*$  une version dérivée du passage à la limite projective. Rappelons que d'après la proposition 2.2 de [35] on a le

**Lemme A.2.3.** *Soit  $F$  un objet de  $D(X, \mathfrak{o}_*)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. Le morphisme naturel  $\widehat{F} \rightarrow F$  est un isomorphisme.
2. Les morphismes induits par les morphismes de transition

$$\mathfrak{o}_{S,s} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r}}^L F_r \rightarrow F_s \quad r \geq s \tag{164}$$

sont des isomorphismes dans  $D(S, \mathfrak{o}_r)$ .

DÉMONSTRATION. — Lorsque l'on prend un objet  $G$  de la catégorie dérivée  $D(\mathfrak{o}_S)$  on a pour tout  $r$  un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{o}_{X,r} \otimes_{\mathfrak{o}_X}^L G \xrightarrow{\sim} [L\pi^* G]_r$$

dans  $D(S, \mathfrak{o}_r)$ . En particulier, lorsque  $\widehat{F} = F$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r+1}}^L \left[ \mathfrak{o}_{S,r+1} \otimes_{\mathfrak{o}_S}^L R\pi_* F \right] & \xrightarrow{\text{iso.}} & \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r+1}}^L (\widehat{F})_{r+1} & \xrightarrow{\text{iso.}} & \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r+1}}^L F_{r+1} \\ \downarrow \text{iso.} & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_S}^L R\pi_* F & \xrightarrow{\text{iso.}} & (\widehat{F})_r & \xrightarrow{\text{iso.}} & F_r \end{array}$$

ce qui prouve que les morphismes (164) induits par les morphismes de transition sont des isomorphismes. Réciproquement lorsque ces morphismes sont des isomorphismes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \text{iso.} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_S}^L R\pi_* F & \xrightarrow{\text{iso.}} & (\widehat{F})_r \longrightarrow F_r \end{array}$$

et  $\widehat{F} = F$  puisque la famille de foncteurs  $(-)_r$  est conservative. □

*Remarque A.2.4.* Lorsque  $F$  ne vérifie pas les conditions équivalentes du lemme A.2.3, le morphisme

$$\mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_S}^L R\pi_* F \rightarrow F_r$$

n'est pas un isomorphisme en général.

**Définition A.2.5.** Soit  $\dagger \in \{\mathfrak{b}, +, -, \emptyset\}$ . La catégorie triangulée  $D^\dagger(S, \mathfrak{o})$  des coefficients  $\ell$ -adiques est la sous-catégorie pleine de  $D^\dagger(\mathfrak{o}_{S,*})$  engendrée par les complexes  $F$  satisfaisant les conditions équivalentes du lemme A.2.3.

*Remarque A.2.6.* Dans [35] les complexes vérifiant les conditions équivalentes du lemme A.2.3 sont appelés complexes normalisés.

On voit que cette catégorie est la catégorie des objets locaux par rapport à la sous-catégorie épaisse formée des objets  $F$  dont le normalisé  $\widehat{F}$  est nul, et s'identifie donc au quotient de  $D(S, \mathfrak{o}_*)$  par cette dernière.

La catégorie des coefficients  $\ell$ -adiques constructibles est quant à elle donnée par la sous-catégorie pleine de  $D(S, \mathfrak{o})$

$$D_c(S, \mathfrak{o}) = D(S, \mathfrak{o}) \cap D_c(S, \mathfrak{o}_*).$$

Dans la suite de cet appendice nous ne nous intéresserons principalement qu'à la catégorie  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ , notamment pour les questions relatives à la  $t$ -structure naturelle dans lesquelles la constructibilité joue un rôle essentiel. Nous utiliserons aussi systématiquement des dévissages reposant sur les suites exactes fournies par le lemme suivant.

**Lemme A.2.7.** Soient  $k$  un corps séparablement clos et  $F$  un objet de  $D_c(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$ . On a les suites exactes courtes de  $\mathfrak{o}_r$ -modules :

$$0 \rightarrow \left[ \lim_s H^j(F_s) \right] / \mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow H^j(F_r) \rightarrow \left[ \lim_s H^{j+1}(F_s) \right] [\mathfrak{m}^{r+1}] \rightarrow 0 \quad r \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. — Quitte à remplacer  $F$  par un objet isomorphe, on peut supposer qu'un objet de  $D_c(X, \mathfrak{o})$  est donné par un complexe  $\mathfrak{o}_*$ -plat. En particulier pour un tel complexe chaque  $F_r$  est  $\mathfrak{o}_r$ -plat et le morphisme naturel

$$\mathfrak{o}_r \otimes_{\mathfrak{o}_{r+1}} F_{r+1} \rightarrow F_r$$

est un quasi-isomorphisme.

Par ailleurs puisque  $F$  est à cohomologie de type fini, en prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de complexes induite par la multiplication par  $\pi^{r+1}$

$$0 \rightarrow F_{r+s} \otimes_{\mathfrak{o}_{r+s}} \mathfrak{o}_s \xrightarrow{\pi^{r+1}} F_{r+s} \rightarrow F_{r+s} \otimes_{\mathfrak{o}_{r+s}} \mathfrak{o}_r \rightarrow 0$$

et en passant à la limite projective sur  $s$ , on obtient la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \lim_s H^j(F_s) \rightarrow H^j(F_r) \rightarrow \lim_s H^{j+1}(F_s) \xrightarrow{\pi^{r+1}} \lim_s H^{j+1}(F_s) \rightarrow \dots$$

et en particulier les suites exactes voulues :

$$0 \rightarrow \left[ \lim_s H^j(F_s) \right] / \mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow H^j(F_r) \rightarrow \left[ \lim_s H^{j+1}(F_s) \right] [\mathfrak{m}^{r+1}] \rightarrow 0 \quad r \geq 0.$$

□

*Remarque A.2.8.* On dispose d'un foncteur triangulé naturel

$$D(S, \mathfrak{o}_r) \rightarrow D(S, \mathfrak{o}) \tag{165}$$

et d'un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ D_c(S, \mathfrak{o}_r) & \longrightarrow & D_c(S, \mathfrak{o}) \longrightarrow D_c(S, \mathfrak{o}_r) \end{array}$$

Pour ce qui concerne la  $t$ -structure naturelle sur la catégorie triangulée  $D_c(S, \mathfrak{o})$ , nous allons voir dans la section A.3 que les sous-catégories

$$\begin{aligned} D_c^{-, \leq 0}(S, \mathfrak{o}) &:= \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F \stackrel{\text{A.R.}}{=} 0 \forall j > 0\} \\ D_c^{-, \geq 0}(S, \mathfrak{o}) &:= \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F \stackrel{\text{A.R.}}{=} 0 \forall j < 0\} \end{aligned}$$

définissent une  $t$ -structure sur  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$  dont le coeur s'identifie à la catégorie abélienne des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles. Ce résultat découle essentiellement des considérations de [30, 1.1.2.e], reprises en détail dans [91, II.6].

### A.3. $t$ -structure naturelle

Nous détaillons maintenant la  $t$ -structure naturelle dont se trouve munie la catégorie triangulée  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ .

**Proposition A.3.1.** *Lorsque  $F$  appartient à la sous-catégorie  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ , les  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $H^k(F)$  sont A.R.- $\ell$ -adiques constructibles pour tout entier relatif  $k \in \mathbb{Z}$ .*

DÉMONSTRATION. — Quitte à remplacer  $F$  par un objet isomorphe, on peut supposer que  $F$  est un complexe  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -plat. En particulier chaque  $F_r$  est  $\mathfrak{o}_{S,r}$ -plat et le morphisme naturel

$$\mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r+1}} F_{r+1} \rightarrow F_r$$

est un quasi-isomorphisme.

Fixons un entier relatif  $k$ . Par hypothèse les  $\mathfrak{o}_{S,0}$ -modules  $H^j(F_0)$  sont constructibles, il existe donc une stratification  $\mathcal{S}$  de  $S$  de sorte que les restrictions des  $H^j(F_0)$ , pour  $j = k - 1, k, k + 1$ , à une strate  $T$  de  $\mathcal{S}$  soient des  $\mathfrak{o}_{S,0}$ -modules lisses. Le triangle distingué

$$\mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1} \rightarrow F_{r+1} \rightarrow F_r \rightarrow \mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1}[1]$$

fournit la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(F_r) \rightarrow H^k(\mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1}) \rightarrow H^k(F_{r+1}) \rightarrow H^k(F_r) \rightarrow H^{k+1}(\mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1}) \rightarrow \dots \tag{166}$$

Par ailleurs comme chaque  $F_{r+1}^n$  est  $\mathfrak{o}_{S,r+1}$ -plat, en utilisant le lemme A.2.1 on voit que la multiplication par  $\pi^{r+1}$  sur  $F_{r+1}^n$  induit un isomorphisme

$$F_0^n = F_r^n / \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1}^n.$$

Cela donne un isomorphisme

$$H^j(\mathfrak{m}^{r+1} F_{r+1}) \simeq H^j(F_0)$$

et par récurrence en utilisant la suite exacte (166) on voit les  $H^k(F_r)$  sont tous lisses sur  $T$ . Ceci permet de se ramener au cas où  $S$  est le spectre d'un corps séparablement clos. Ce dernier

cas découle immédiatement des suites exactes du lemme A.2.7 en remarquant que le système projectif

$$r \mapsto \left[ \lim_s H^j(F_s) \right] [\mathfrak{m}^{r+1}]$$

est un  $\mathfrak{o}_*$ -module A.R.-nul. □

**Lemme A.3.2.** *Le foncteur  $D_c^-(S, \mathfrak{o}_r) \rightarrow D_c^-(S, \mathfrak{o})$  est pleinement fidèle et on a*

$$\begin{aligned} D_c^{-, \leq 0}(X, \mathfrak{o}) \cap D_c^-(S, \mathfrak{o}_r) &= D_c^{-, \leq 0}(S, \mathfrak{o}_r) \\ D_c^{-, \geq 0}(X, \mathfrak{o}) \cap D_c^-(S, \mathfrak{o}_r) &= D_c^{-, \geq 0}(S, \mathfrak{o}_r). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. — La pleine fidélité du foncteur de  $D_c^-(S, \mathfrak{o}_r)$  dans  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$  résulte du fait qu'il est adjoint à gauche du foncteur  $(-)_r$  et que le morphisme d'adjonction

$$(-)_r \circ L\iota_r \rightarrow \text{id}$$

est un isomorphisme dans  $D_c^-(S, \mathfrak{o}_r)$ . Pour un objet  $F$  de  $D_c^-(S, \mathfrak{o}_r)$  on a d'une part

$$\left[ H^i(L\iota_r F) \right]_s = \begin{cases} H^i(F) & \text{si } s \geq r \\ H^i(\mathfrak{o}_{S,s} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r}}^L F) & \text{si } s < r \end{cases}$$

et d'autre part

$$\left[ \iota_r H^i(F) \right]_s = \begin{cases} H^i(F) & \text{si } s \geq r \\ \mathfrak{o}_{S,s} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r}} H^i(F) & \text{si } s < r. \end{cases}$$

En particulier on voit que l'on a un morphisme canonique de  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules de  $H^i(L\iota_r F)$  dans  $\iota_r H^i(F)$  et que ce dernier est un A.R.-isomorphisme. Le lemme en découle. □

Pour définir l'un des foncteurs de troncation, nous reprenons la construction de P. Deligne [30, §1.1.2.e]. Soient  $n$  un entier relatif et  $F$  un objet de  $D^-(\mathfrak{o}_{S,*})$ , la troncation de P. Deligne est le complexe de système projectif

$$\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F_r : \dots \rightarrow F_r^{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_r^n \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$\vdots$   
 $\text{cran } n$

dans lequel le  $\mathfrak{o}_{S,r}$ -module  $\mathcal{F}_r^n$  est défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_r^n & \longrightarrow & \ker d^n \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \bigcap_{s=0}^{\infty} \text{Im} \left[ H^n(F_{r+s}) \rightarrow H^n(F_r) \right] & \longrightarrow & H^n(F_r). \end{array}$$

On obtient ainsi un complexe  $\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F$  de  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules fonctoriel en  $F$ , pour lequel par définition

$$H^j(\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F_r) := \begin{cases} H^j(F_r) & \text{si } j < n \\ \bigcap_{s=0}^{\infty} \text{Im} \left[ H^n(F_{r+s}) \rightarrow H^n(F_r) \right] & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque le groupe de cohomologie  $H^n(F)$  est A.R.- $\ell$ -adique, la condition de Mittag-Leffler-Artin-Rees est satisfaite ce qui entraîne que le morphisme canonique

$$H^n(\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F) \rightarrow H^n(F)$$

est un A.R.-isomorphisme.

*Remarque A.3.3.* On voit par construction que pour un entier  $k > n$  le morphisme

$$\tau_{\text{Del}}^{\leq n} \tau^{\leq k} F \rightarrow \tau_{\text{Del}}^{\leq n} F$$

est un isomorphisme dans  $D^-(\mathfrak{o}_{S,*})$ . On dispose en outre pour  $F \in D^-(\mathfrak{o}_S)$  d'un morphisme canonique

$$L\pi^* \tau^{\leq n} F \rightarrow \tau_{\text{Del}}^{\leq n} L\pi^* F. \tag{167}$$

En effet, on peut supposer pour cela que  $F$  est un complexe plat, auquel cas l'objet  $L\pi^* \tau^{\leq n} F$  de  $D^-(\mathfrak{o}_{S,*})$  est canoniquement isomorphe au système projectif de complexes

$$\dots F^{n-2}/\mathfrak{m}^r \rightarrow F^{n-1}/\mathfrak{m}^r \rightarrow \ker d^n/\mathfrak{m}^r \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et l'objet  $\tau_{\text{Del}}^{\leq n} L\pi^* F$  au système projectif

$$\dots \rightarrow F^{n-2} \rightarrow F^{n-1}/\mathfrak{m}^r \rightarrow \mathcal{F}_r^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

dans lequel  $\mathcal{F}_r^n$  est donné par définition par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_r^n & \longrightarrow & \ker [d^n : F^n/\mathfrak{m}^r \rightarrow F^{n+1}/\mathfrak{m}^r] \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \bigcap_{s=0}^{\infty} \text{Im} [H^n(F/\mathfrak{m}^{r+s}) \rightarrow H^n(F/\mathfrak{m}^r)] & \longrightarrow & H^n(F/\mathfrak{m}^r). \end{array} \tag{168}$$

On voit alors que le morphisme de  $\ker d^n/\mathfrak{m}^r$  dans  $\mathcal{F}_r^n$  donne le morphisme voulu.

**Proposition A.3.4.** *Soit  $k$  un corps séparablement clos.*

1. *Le foncteur  $R\pi_*$  induit une équivalence de catégories triangulées*

$$D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o}) \xrightarrow{\text{equiv.}} D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o})$$

où le second membre désigne la catégorie dérivée supérieurement bornée des  $\mathfrak{o}$ -modules à cohomologie de type fini. De plus

- (a)  $D_{\text{t.f.}}^-, \leq 0(\mathfrak{o})$  est l'image essentielle de la sous-catégorie  $D_c^-, \leq 0(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$ ,
  - (b)  $D_{\text{t.f.}}^-, \geq 0(\mathfrak{o})$  est l'image essentielle de la sous-catégorie  $D_c^-, \geq 0(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$ .
2. *Pour tout objet  $F$ , de  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$  on a un isomorphisme dans  $D^-(\mathfrak{o}_{S,*})$*

$$\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F \simeq L\pi^* \tau^{\leq n} R\pi_* F.$$

En particulier  $\tau_{\text{Del}}^{\leq n} F$  appartient à  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ .

DÉMONSTRATION. — Nous allons montrer que les foncteurs  $R\pi_*$  et  $L\pi^*$  induisent des foncteurs triangulés

$$R\pi_* : D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o}) \rightarrow D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o}) \quad L\pi^* : D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o}) \rightarrow D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$$

quasi-inverses l'un de l'autre. On sait déjà par définition que  $L\pi^* R\pi_* = \text{id}$ . Soit  $F$  un objet de  $D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$ . Quitte à remplacer  $F$  par un objet isomorphe, on peut supposer que les  $F_r^n$  sont des  $\mathfrak{o}_r$ -modules plats de type fini. On a alors  $R\pi_* F = \pi_* F$  ainsi qu'un isomorphisme canonique

$$H^j(\pi_* F) \simeq \pi_* H^j(F). \tag{169}$$

On en déduit que  $R\pi_*F$  est supérieurement borné, et le lemme A.2.7 nous fournit des suites exactes

$$0 \rightarrow H^j(\pi_*F)/\mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow H^j(F_r) \rightarrow H^{j+1}(\pi_*F)[\mathfrak{m}^{r+1}] \rightarrow 0 \quad r \geq 0.$$

Ces dernières fournissent l'inégalité

$$\dim_{\mathfrak{o}_0} \left[ H^j(F_r)/\mathfrak{m} \right] \leq \dim_{\mathfrak{o}_0} \left[ H^j(F_0) \right] + \dim_{\mathfrak{o}_0} \left[ H^{j+1}(F_0) \right]$$

ce qui assure que  $\pi_*F$  est un complexe de  $\mathfrak{o}$ -modules à cohomologie de type fini et donc que  $R\pi_*$  nous définit un foncteur triangulé

$$R\pi_* : D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o}) \rightarrow D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o}).$$

Si  $F \in D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o})$ , on peut supposer que les  $F^n$  sont des  $\mathfrak{o}$ -modules plats de type fini. On a alors

$$L\pi^*F = \pi^*F \in D_c^-(\text{Spec } k, \mathfrak{o})$$

et en utilisant l'isomorphisme (169) on voit que le morphisme naturel  $F \rightarrow R\pi_*L\pi^*F$  est un isomorphisme puisque

$$H^i(R\pi_*L\pi^*F) = H^i(\pi_*\pi^*F) = \pi_*H^i(\pi^*F) = \pi_*\pi^*H^i(F) = H^i(F).$$

Cela prouve la première assertion.

Montrons maintenant que pour un objet  $F$  de  $D_{\text{t.f.}}^-(\mathfrak{o})$  le morphisme (167) est un isomorphisme. Quitte à prendre un objet isomorphe, on peut alors supposer que  $F$  est un complexe dont les composantes  $F^n$  sont des  $\mathfrak{o}$ -modules plats de type fini. L'objet  $L\pi^*\tau^{\leq n}F$  de  $D^-(\mathfrak{o}_*)$  est alors isomorphe dans  $D^-(\mathfrak{o}_*)$  au système projectif de complexes

$$\dots \rightarrow F^{n-2} \rightarrow F^{n-1}/\mathfrak{m}^r \rightarrow \ker d^n/\mathfrak{m}^r \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

et l'objet  $\tau_{\text{Del}}^{\leq n}L\pi^*F$  au système projectif de complexes

$$\dots \rightarrow F^{n-2} \rightarrow F^{n-1}/\mathfrak{m}^r \rightarrow \mathcal{F}_r^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

dans lequel  $\mathcal{F}_r^n$  est donné par définition par le carré cartésien (168). Le  $\mathfrak{o}$ -module  $F^{n+1}$  étant de type fini, la filtration  $\mathfrak{m}$ -adique sur ce dernier est séparée, ce qui entraîne que le morphisme

$$H^n(L\pi^*\tau^{\leq n}F) \rightarrow H^n(\tau_{\text{Del}}^{\leq n}L\pi^*F)$$

est un isomorphisme, autrement dit que le morphisme (167) est bien un isomorphisme dans la catégorie dérivée.

Il reste à prouver que le morphisme de  $D^-(\mathfrak{o}_{S,*})$

$$L\pi^*\tau^{\leq n}R\pi_*F \xrightarrow{(167)} \tau_{\text{Del}}^{\leq n}\widehat{F} \xrightarrow{\text{iso.}} \tau_{\text{Del}}^{\leq n}F.$$

est un isomorphisme pour tout objet  $F$  de  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ . Ce qui se déduit de ce qui précède en se ramenant aux fibres géométriques.  $\square$

**Théorème A.3.5.** *Les sous-catégories pleines de  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$*

$$D_c^{\leq 0}(S, \mathfrak{o}) := \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F \stackrel{\text{A.R.}}{=} 0 \forall j > 0\}$$

$$D_c^{\geq 0}(S, \mathfrak{o}) := \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F \stackrel{\text{A.R.}}{=} 0 \forall j < 0\}$$



définissent une  $t$ -structure dont le coeur s'identifie à la catégorie des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles.

DÉMONSTRATION. — Étant donné un objet  $F$  de  $D_c^-(S, \mathfrak{o})$ , on peut compléter le morphisme de  $F$  dans  $\tau_{\text{Del}}^{\leq 0} F$  en un triangle distingué

$$G \rightarrow F \rightarrow \tau_{\text{Del}}^{\leq 0} F \rightarrow G[1].$$

Sachant par définition de cette troncation que  $\tau_{\text{Del}}^{\leq 0} F$  appartient à  $D_c^-, \leq 0(S, \mathfrak{o})$  et que  $G$  appartient à  $D_c^-, \geq 1(S, \mathfrak{o})$ , pour que ces catégories définissent une  $t$ -structure il suffit de prouver que

$$\text{Hom}_{D_c^-(S, \mathfrak{o})}(F, G) = 0$$

lorsque  $F$  appartient à  $D_c^{\leq 0}(X, \mathfrak{o})$  et  $G$  appartient à  $D_c^{\geq 1}(X, \mathfrak{o})$ .

Remarquons tout d'abord qu'en passant aux fibres géométriques et en utilisant le lemme A.2.7, les catégories considérées sont données en fait par

$$\begin{aligned} D_c^-, \leq 0(S, \mathfrak{o}) &:= \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F = 0 \forall j > 0\} \\ D_c^-, \geq 0(S, \mathfrak{o}) &:= \{F \in D_c^-(S, \mathfrak{o}) : H^j F = 0 \forall j < -1 \text{ et } H^{-1}(F) \stackrel{\text{A.R.}}{=} 0\}. \end{aligned}$$

Fixons un morphisme  $u$  entre un objet  $F$  de  $D_c^-, \geq 1(S, \mathfrak{o})$  et un objet  $G$  de  $D_c^-, \leq 0(X, \mathfrak{o})$ . La remarque précédente nous permet de supposer que  $G$  est un complexe injectif avec  $G_r^n = 0$  pour  $n < 0$  et que  $F$  est quant à lui un complexe  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -plat avec  $F_r^n = 0$  pour  $n > 0$ . On a alors

$$\text{Hom}_{D_c^-(S, \mathfrak{o})}(F, G) = \text{Hom}_{K^-(S, \mathfrak{o}_*)}(F, G)$$

et si  $\bar{u}$  désigne un relèvement de  $u$  aux complexes, ce dernier est entièrement déterminé par la famille des morphismes

$$\bar{u}_r^0 : F_r^0 \rightarrow G_r^0.$$

Comme  $\bar{u}$  est un morphisme de complexes, on a nécessairement  $\bar{u}_r^0(F_r^0) \subset \ker d_{G_r}^0 = H^0(G_r)$ . Or par hypothèse  $H^0(G_r)$  est A.R.-nul, donc il existe un entier  $s$  tel que le morphisme

$$H^0(G_{r+s}) \rightarrow H^0(G_r)$$

soit nul pour tout  $r \geq 0$  ce qui entraîne que le morphisme de complexes induit par  $\bar{u}_{r+s}$

$$F_{r+s} \rightarrow G_{r+s} \rightarrow G_r$$

est nul. Sachant que  $F$  est plat, on a donc le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_{S,r} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,r+s}} F_{r+s} & \longrightarrow & G_{r+s} \\ \downarrow \text{qis} & \searrow 0 & \downarrow \\ F_r & \xrightarrow{\bar{u}_r} & G_r \end{array}$$

ce qui prouve que  $u$  est nul et que les catégories considérées définissent bien une  $t$ -structure.

Il reste maintenant à identifier le coeur de cette  $t$ -structure. Le foncteur de cohomologie induit le foncteur exact

$$H^0 : H(D_c^m(S, \mathfrak{o})) \rightarrow \text{Mod}_{\text{A.R.,c}}(S, \mathfrak{o}) \rightarrow \text{Mod}_c(S, \mathfrak{o})$$

qui dans le cas où  $S$  est le spectre d'un corps séparablement clos est une équivalence. Ce dernier est donc fidèle, en effet l'exactitude permet de se ramener à prouver qu'il est conservatif ce qui découle du fait que cette propriété est de nature locale et satisfaite sur les fibres géométriques.

Il ne reste plus qu'à exhiber un inverse à droite de  $H^0$ . Pour un entier  $m$ , on dispose d'un foncteur exact

$$(-)_{*+m} : \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*+m})$$

pour lequel  $(F_{*+m})_r$  est le  $\mathfrak{o}_{S,r+m}$ -module  $F_{r+m}$  et d'un foncteur exact à droite

$$\mathfrak{o}_{S,*} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,*+m}} - : \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*+m}) \rightarrow \text{Mod}(\mathfrak{o}_{S,*}).$$

Ces derniers donnent des foncteurs triangulés  $h_m$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{h_m} & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ \text{D}_c(S, \mathfrak{o}_*) & \xrightarrow{(-)_{*+m}} & \text{D}_c(S, \mathfrak{o}_{*+m}) & \xrightarrow{\mathfrak{o}_{S,*} \otimes_{\mathfrak{o}_{S,*+m}}^L} & \text{D}_c(X, \mathfrak{o}_*) & \xrightarrow{(-)} & \text{D}_c(S, \mathfrak{o}) \end{array}$$

qui s'organisent en un système projectif  $h$  de foncteurs triangulés. En particulier, on peut considérer la restriction de ce système à la catégorie abélienne des  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules. Les foncteurs  $h_m$  envoient les A.R.-isomorphismes sur des isomorphismes et en particulier induisent des foncteurs

$$h_m : \text{A.R.Mod}(\mathfrak{o}_{X,*}) \rightarrow \text{D}_c(X, \mathfrak{o})$$

ce qui assure que la restriction de ces derniers à la catégorie abélienne des  $\mathfrak{o}_{X,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles envoie les suites exactes sur des triangles distingués.

Étant donné un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $\ell$ -adique constructible  $F$  on voit par construction que les morphismes de transition de  $h_s(F)$  dans  $h_r(F)$  pour  $s \geq r$  sont des isomorphismes pour tout entier  $r$  tel que l'on ait une suite exacte

$$0 \rightarrow H \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$$

dans laquelle  $G$  est  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module plat et  $H$  appartient à  $\text{Mod}_c(\mathfrak{o}_{S,r})$ . D'après le lemme A.1.4, on peut fixer pour tout  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $\ell$ -adique constructible  $F$  un tel entier  $r_F$ , ce qui permet de définir un foncteur de  $\text{Mod}_c(S, \mathfrak{o})$  dans  $\text{D}(\mathfrak{o}_{S,*})$  en associant

- à un  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -module  $\ell$ -adique constructible, l'objet  $h_{r_F}(F)$  de  $\text{D}(\mathfrak{o}_{S,*})$ ,
- à un morphisme  $a : F \rightarrow G$  de  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques constructibles, l'unique morphisme rendant le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} h_r(F) & \longrightarrow & h_{r_F}(F) \\ \downarrow h_r(a) & & \downarrow \text{---} \\ h_r(G) & \longrightarrow & h_{r_G}(G) \end{array}$$

pour tout  $r \geq r_F, r_G$ .

On obtient de la sorte un foncteur

$$h : \text{Mod}_c(S, \mathfrak{o}) \rightarrow \text{D}_c(S, \mathfrak{o}_*)$$

envoyant les suites exactes sur des triangles distingués et muni d'une transformation naturelle  $H^0 \circ h \rightarrow \text{id.}$  dont il reste à prouver qu'il prend ses valeurs dans le coeur de la  $t$ -structure

naturelle et nous fournit un inverse à droite de  $H^0$ . Il suffit alors de prouver que  $h(F)$  appartient au coeur de la  $t$ -structure et le morphisme  $H^0(hF) \rightarrow F$  est un AR-isomorphisme et en utilisant la suite exacte du lemme A.1.4 on peut se restreindre au cas

- des  $\mathfrak{o}_{S,r}$ -modules,
- les  $\mathfrak{o}_{S,*}$ -modules  $\ell$ -adiques plats.

Le second est immédiat et le premier découle du lemme A.3.2. □

#### A.4. Coefficients modérés

Dans cette section nous donnons la définition de la catégorie des coefficients  $\ell$ -adiques que nous appelons modérés. Nous nous fixons un ensemble ordonné filtrant  $\Lambda$  et nous supposons que  $S$  est limite projective d'un système projectif de schémas  $\lambda \mapsto S_\lambda$  dont les morphismes de transitions sont des morphismes plats affines.

**Définition A.4.1.** Nous appellerons catégorie des coefficients  $\ell$ -adiques modérés relativement au système projectif des  $S_\lambda$  la catégorie triangulée

$$D(S, \mathfrak{o})_{md} := 2\text{-colim}_\lambda D(S_\lambda, \mathfrak{o}).$$

On pose de même

$$D^+(S, \mathfrak{o})_{md} := 2\text{-colim}_\lambda D^+(S_\lambda, \mathfrak{o}) \quad D_c^b(S, \mathfrak{o})_{md} := 2\text{-colim}_\lambda D_c^b(S_\lambda, \mathfrak{o}).$$



## APPENDICE B

### MULTIPLICITÉS DE SAMUEL

Nous consacrons cet appendice à un survol de la notion de multiplicité en algèbre commutative dans le but de préciser les propriétés de ces dernières qui sont utilisées dans la section 1.3 lors du calcul des multiplicités intervenant dans le changement de base des cycles relatifs.

#### B.1. Multiplicités géométriques

Rappelons ci-dessous la décomposition classique des faisceaux cohérents dans le groupe de Grothendieck en fonction de la dimension de leur support.

**Lemme B.1.1.** *Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Les points de  $X$  en lesquels  $\mathcal{M}_x$  est un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de longueur finie non nulle sont les points maximaux du support de  $\mathcal{M}$ . Soit  $X$  un schéma, on note  $\text{Fil}_q G_0(X)$  le sous-groupe de  $G_0(X)$  engendré par les classes de  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents dont le support est de dimension  $\leq q$ . On obtient de la sorte une filtration croissante*

$$\text{Fil}_{q-1} G_0(X) \subset \text{Fil}_q G_0(X) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\dim X} G_0(X) = G_0(X)$$

dont on note  $\text{Gr}_* G_0(X)$  le gradué associé. De même lorsque l'on se donne un sous-schéma fermé intègre  $W$  de  $X$  on peut considérer le sous-groupe  $\text{Fil}_q^W G_0(X)$  de  $G_0(X)$  engendré par les classes de  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents  $\mathcal{M}$  vérifiant

$$\text{codim}(W, \text{supp}(\mathcal{M})) \leq q$$

où l'on convient que cette codimension est nulle lorsque  $W$  n'est pas contenu dans le support de  $\mathcal{M}$ . On obtient une filtration croissante

$$\text{Fil}_{q-1}^W G_0(X) \subset \text{Fil}_q^W G_0(X) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\text{codim}(W,X)}^W G_0(X) = G_0(X)$$

dont on note cette fois  $\text{Gr}_*^W G_0(X)$  le gradué associé.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme de dévissage de [52, thm 3.1.2].

**Lemme B.1.2.** *Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent.*

1. *Si le support de  $\mathcal{M}$  est de dimension  $\leq q$ , on a l'égalité dans  $\text{Gr}_n G_0(X)$*

$$[\mathcal{M}] = \sum_V \text{lg}_{\mathcal{O}_{X,v}}(\mathcal{M}_v) [\mathcal{O}_V]$$

la somme étant prise sur les composantes irréductibles  $V$  du support de  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  et de point générique  $v$ .

2. Lorsque  $W$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  de codimension  $q$  dans  $X$ , on a l'égalité dans  $\mathrm{Gr}_q^W G_0(X)$

$$[\mathcal{M}] = \sum_V \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_{X,v}}(\mathcal{M}_v)[\mathcal{O}_V]$$

la somme étant prise sur les composantes irréductibles  $V$  du support de  $\mathcal{M}$  de point générique  $v$  contenant  $W$  et vérifiant

$$\mathrm{codim}(W, X) = \mathrm{codim}(W, V).$$

DÉMONSTRATION. — (1). Notons  $Z$  le support de  $\mathcal{M}$ ,  $V_1, \dots, V_r$  les composantes irréductibles de  $Z$  de dimension  $q$  et  $v_i$  le point générique de  $V_i$ . On peut remarquer que pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{N}$  dont le support est contenu dans  $Z$ , le point  $v_i$  est soit un point maximal du support de  $\mathcal{N}$  soit n'appartient pas à ce dernier. En particulier pour un tel  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{N}$  les  $\mathcal{O}_{X,v_i}$ -modules cohérents  $\mathcal{N}_{v_i}$  sont de longueur finie ce qui permet de considérer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents  $\mathcal{N}$  dont le support est contenu dans  $Z$  et vérifiant

$$[\mathcal{N}] = \sum_{i=1}^r \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_{X,v_i}}(\mathcal{N}_{v_i})[\mathcal{O}_{V_i}]$$

dans  $\mathrm{Gr}_q G_0(X)$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  est exact dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents au sens de la définition 3.1.1 de [52] et contient les  $\mathcal{O}_Y$  où  $Y$  est un sous-schéma fermé intègre de  $Z$ . Le théorème 3.1.2 de *loc.cit.* assure donc que  $\mathcal{M}$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

- (2). On peut supposer que le support  $Z$  de  $\mathcal{M}$  contient  $W$ . Notons  $V_1, \dots, V_r$  les composantes irréductibles de  $Z$  contenant  $W$  et vérifiant

$$\mathrm{codim}(W, X) = \mathrm{codim}(W, V_i)$$

ainsi que  $v_i$  le point générique de  $V_i$ . On peut remarquer que pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{N}$  dont le support est contenu dans  $Z$ , le point  $v_i$  est soit un point maximal du support de  $\mathcal{N}$  soit n'appartient pas à ce dernier. En effet dire que  $v_i$  appartient au support de  $\mathcal{N}$  sans en être un point maximal signifie que le fermé irréductible  $V_i$  est strictement contenu dans une composante irréductible  $Y$  du support de  $\mathcal{N}$ . Cela entraîne

$$\mathrm{codim}(W, X) \geq \mathrm{codim}(W, Y) > \mathrm{codim}(W, V_i)$$

ce qui est absurde. En particulier pour un tel  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{N}$  les  $\mathcal{O}_{X,v_i}$ -module cohérent  $\mathcal{N}_{v_i}$  sont de longueur finie ce qui permet de considérer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents  $\mathcal{N}$  dont le support est contenu dans  $Z$  et vérifiant

$$[\mathcal{M}] = \sum_{i=1}^r \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_{X,v_i}}(\mathcal{M}_{v_i})[\mathcal{O}_{V_i}]$$

dans  $\mathrm{Gr}_q^W G_0(X)$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  est exact dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents au sens de la définition 3.1.1 de [52] et contient les  $\mathcal{O}_Y$  où  $Y$  est un sous-schéma fermé intègre de  $Z$ . Le théorème 3.1.2 de *loc.cit.* assure donc que  $\mathcal{M}$  appartient à  $\mathcal{E}$ .  $\square$

*Remarque B.1.3.* La première assertion du lemme B.1.2 assure en particulier que  $\text{Fil}_q G_0(X)$  est engendré par les classes  $[\mathcal{O}_V]$  où  $V$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  de dimension  $\leq q$ .

### B.2. Polynômes de Hilbert et de Samuel

Rappelons que d'après le théorème 3.5.1 de [52] et la proposition 5.3.1 de [54], on dispose du résultat suivant. Dans ce qui suit  $\chi_A$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

**Théorème B.2.1.** *Soient  $A$  un anneau artinien,  $X$  un  $A$ -schéma projectif et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible très ample relativement à  $A$ . On se donne un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$ .*

1. *Il existe un unique polynôme  $\mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}) \in \mathbb{Q}[T]$  appelé polynôme de Hilbert de  $\mathcal{M}$  relativement à  $\mathcal{L}$  tel que pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{Z}$*

$$\mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M})(n) = \chi_A(\mathcal{M}(n)_{\mathcal{L}}).$$

2. *On a pour  $n$  suffisamment grand*

$$\chi_A(\mathcal{M}(n)_{\mathcal{L}}) = \text{lg}_A(\Gamma(X, \mathcal{M}(n)_{\mathcal{L}})).$$

3. *Le degré du polynôme  $\mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M})$  est égal à la dimension du support de  $\mathcal{M}$  et en notant  $d$  cette dimension le coefficient de degré  $d$  de  $d!\mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M})$  est un entier strictement positif.*

On appelle polynôme de Samuel de  $\mathcal{M}$  relativement à  $\mathcal{L}$  l'unique polynôme  $\mathbb{S}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M})$  vérifiant

$$\mathbb{S}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, n) = \mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, n + 1) - \mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Au niveau des degrés on a

$$\text{deg } \mathbb{S}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}) = 1 + \text{deg } \mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}).$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré étant additive, il en est de même des polynômes de Hilbert et Samuel. Ces derniers nous définissent donc des morphismes de groupes abéliens

$$G_0(X) \xrightarrow[\mathbb{S}_{A,\mathcal{L}}]{\mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}} \mathbb{Q}[T].$$

Étant donné un entier positif  $q$ , on peut associer à un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent les nombres rationnels

$$\text{deg}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} \mathbb{H}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, n) \quad e_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} \mathbb{S}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, n)$$

obtenus en multipliant par  $q!$  le coefficient de degré  $q$  dans les polynômes de Hilbert et Samuel de  $\mathcal{M}$ . On obtient ainsi des morphismes de groupes abéliens

$$G_0(X) \xrightarrow[e_{A,\mathcal{L}}(-,q)]{\text{deg}_{A,\mathcal{L}}(-,q)} \mathbb{Q}.$$

Lorsque l'on se donne un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, la troisième assertion du théorème B.2.1 assure que le nombre  $\text{deg}_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q)$  (resp. le nombre  $e_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q)$ )

- est un entier strictement positif lorsque  $q$  est la dimension du support de  $\mathcal{M}$  (resp.  $q$  est égal à la dimension du support de  $\mathcal{M}$  plus un),
- est nul lorsque  $q$  est strictement supérieur à la dimension du support de  $\mathcal{M}$  (resp.  $q$  est strictement supérieur à la dimension du support de  $\mathcal{M}$  plus un).

On peut d'ailleurs remarquer qu'en notant  $q$  la dimension du support de  $\mathcal{M}$  on a

$$\deg_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q) = e_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}, q + 1)$$

L'entier obtenu dans ce cas de figure est appelé le degré de  $\mathcal{M}$  sur  $A$  relativement à  $\mathcal{L}$  et nous le noterons  $\deg_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M})$  dans la suite. On a immédiatement le lemme suivant.

**Lemme B.2.2.** *Soient  $A$  un anneau artinien,  $X$  un  $A$ -schéma projectif et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible très ample relativement à  $A$ . Alors pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$*

$$\deg_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{M}) = \sum_W \lg_{\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{M}_w) \deg_{A,\mathcal{L}}(\mathcal{O}_W)$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $W$  de  $X$  de même dimension que le support de  $\mathcal{M}$  et de point générique  $w$ .

DÉMONSTRATION. — Notons  $q$  la dimension du support de  $\mathcal{M}$ . D'après le lemme B.1.2 il existe un élément  $a$  de  $\text{Fil}_{q-1} G_0(X)$  tel que l'on ait

$$[\mathcal{M}] = \sum_W \lg_{\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{M}_w)[\mathcal{O}_W] + a$$

dans  $\text{Fil}_q G_0(X)$ . Il suffit alors d'appliquer la fonction additive  $\deg_{A,\mathcal{L}}(-, q)$  au deux membres en remarquant que  $\deg_{A,\mathcal{L}}(a, q) = 0$ .  $\square$

### B.3. Multiplicités de Samuel

Supposons donnés un schéma  $X$  et un sous-schéma fermé artinien  $Z$  de  $X$ . Le cône projectif normal  $\mathbb{P}(C_Z X)$  de  $Z$  dans  $X$  est un  $Z$ -schéma projectif muni d'un fibré très ample canonique. On peut associer à un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent son image inverse  $\mathcal{M}_{Z,X}$  sur  $\mathbb{P}(C_Z X)$  et par la même occasion des nombres rationnels

$$e_Z(\mathcal{M}_{Z,X}, q) \quad \text{et} \quad \deg_Z(\mathcal{M}_{Z,X}, q)$$

où  $q$  est un entier positif.

Les sous-schémas fermés artiniens du spectre d'un anneau local  $A$  sont les sous-schémas fermés définis par les idéaux  $\mathfrak{m}_A$ -primaires. En outre dans le cas local on dispose du lemme

**Lemme B.3.1.** *Soient  $A$  un anneau local,  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire et  $M$  un  $A$ -module de type fini. Alors*

$$\deg \mathbb{S}_I(M_{I,A}) = \deg \mathbb{H}_I(M_{I,A}) + 1 = \dim_A M.$$

En particulier, ce qui précède associe à un  $A$ -module de type fini  $M$ , à un idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire  $I$  de  $A$  et un entier positif  $q$  un nombre rationnel

$$e_I(M, q) = e_I \left( \bigoplus_n I^n M / I^{n+1} M, q \right).$$

Lorsque  $q$  est égal à la dimension du support de  $M$  ce nombre est un entier strictement positif et on le note  $e_I(M)$ . Le lemme d'Artin-Rees a pour conséquence classique :



**Lemme B.3.2.** Soient  $A$  un anneau local et  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire.

1. La fonction  $e_I(-, q)$  induit un morphisme de groupes abéliens

$$e_I(-, q) : \text{Gr}_q G_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

2. Pour tout  $A$ -module de type fini  $M$  de dimension  $q$ , on a

$$e_I(M) = \sum_{\mathfrak{p}} \text{lg}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})e_I(A/\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{p}} \text{lg}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})e_{I(A/\mathfrak{p})}(A/\mathfrak{p})$$

la somme étant prise sur les idéaux premiers minimaux  $\mathfrak{p}$  de  $A/\text{Ann}_A M$  tels que  $\dim_A(A/\mathfrak{p}) = q$ .

DÉMONSTRATION. — (1). Supposons que  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  soit une suite exacte de  $A$ -modules de type fini de dimension  $\leq q$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow M' \cap I^{n+1}M/I^{n+1}M' \rightarrow M'/I^{n+1}M' \rightarrow M/I^{n+1}M \rightarrow M''/I^{n+1}M'' \rightarrow 0$$

nous donne l'égalité

$$\begin{aligned} \text{lg}_{A/I^{n+1}}(M/I^{n+1}M) &= \text{lg}_{A/I}(M'/I^{n+1}M') + \text{lg}_{A/I^{n+1}}(M''/I^{n+1}M'') \\ &\quad - \text{lg}_{A/I^{n+1}}(M' \cap I^{n+1}M/I^{n+1}M'). \end{aligned}$$

D'autre part en utilisant le lemme d'Artin-Rees, on voit que pour  $n \geq m$

$$M' \cap I^{n+1}M \subset I^{n-m+1}M'$$

cela entraîne que

$$\text{lg}_{A/I^{n+1}}(M' \cap I^{n+1}M/I^{n+1}M') \leq \text{lg}_{A/I^{n+1}}(M'/I^{n+1}M') - \text{lg}_{A/I^{n+1}}(M'/I^{n-m+1}M').$$

On a donc

$$\mathbb{S}_I(M) = \mathbb{S}_I(M') + \mathbb{S}_I(M'') - P$$

où  $P$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\dim_A M'$ . En particulier

$$e_I(M, q) = e_I(M', q) + e_I(M'', q)$$

ce que nous voulions compte tenu du fait que pour  $\dim_A M < q$  on a  $e_I(M, q) = 0$ .

(2). D'après le lemme B.1.2 la classe de  $M$  dans  $\text{Gr}_q G_0(A)$  est donnée par

$$[M] = \sum_{\mathfrak{p}} \text{lg}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})[A/\mathfrak{p}]$$

la somme étant prise sur les idéaux premiers minimaux  $\mathfrak{p}$  de  $A/\text{Ann}_A M$  tels que  $\dim_A(A/\mathfrak{p}) = q$ . Il suffit donc d'utiliser la première assertion pour obtenir la première égalité. Pour la seconde, il suffit de remarquer que pour tout entier positif  $n$

$$\text{lg}_{A/I^{n+1}} \left[ (A/\mathfrak{p})/I^{n+1}(A/\mathfrak{p}) \right] = \text{lg}_{(A/\mathfrak{p})/I^{n+1}(A/\mathfrak{p})} \left[ (A/\mathfrak{p})/I^{n+1}(A/\mathfrak{p}) \right]$$

ce qui entraîne que  $e_I(A/\mathfrak{p}) = e_{I(A/\mathfrak{p})}(A/\mathfrak{p})$ . □

**Lemme B.3.3.** Soient  $A, B$  deux anneaux locaux,  $A \rightarrow B$  un morphisme local tel que l'idéal  $\mathfrak{m}_A B$  soit un idéal  $\mathfrak{m}_B$ -primaire et  $q$  un entier positif.

1. L'idéal  $IB$  est  $\mathfrak{m}_B$ -primaire pour tout idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire  $I$  de  $A$ .

2. Lorsque  $B$  est plat sur  $A$ , on a  $\dim_A(M) = \dim_B(M \otimes_A B)$  et

$$e_{IB}(M \otimes_A B, q) = e_I(M, q) \operatorname{lg}_{B/IB}(B/\mathfrak{m}_A B) = e_I(M, q) \operatorname{lg}_{B/\mathfrak{m}_A B}(B/\mathfrak{m}_A B)$$

pour tout idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire  $I$  de  $A$  et tout  $A$ -module de type fini  $M$ .

3. Lorsque  $B$  est un  $A$ -module de type fini on a

$$e_I(N, q) = e_{IB}(N, q) \dim_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_B) \quad \dim_A N = \dim_B N$$

pour tout idéal  $\mathfrak{m}_A$ -primaire  $I$  de  $A$  et tout  $B$ -module de type fini  $N$ .

DÉMONSTRATION. — (1). Dire que  $I$  est  $\mathfrak{m}_A$ -primaire signifie que  $I$  contient une puissance de l'idéal  $\mathfrak{m}_A$ . En particulier  $IB$  contient une puissance de l'idéal  $\mathfrak{m}_A B$  et ce dernier étant  $\mathfrak{m}_B$ -primaire cela entraîne que  $IB$  contient aussi une puissance de  $\mathfrak{m}_B$ .

(2). Soit  $n$  un entier positif. Notons  $\ell_n$  la longueur du  $A/I^{n+1}$ -module  $M/I^{n+1}$  et donnons nous une filtration de Jordan-Hölder de  $M/I^{n+1}$

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell_n} = M/I^{n+1}.$$

Chaque gradué de la filtration est simple donc isomorphe à  $A/\mathfrak{m}_A$ . Comme  $B$  est plat sur  $A$ , la suite précédente nous donne une filtration de  $M \otimes_A B$  par des sous-modules

$$0 = M_0 \otimes_A B \subset M_1 \otimes_A B \subset \cdots \subset M_{\ell_n} \otimes_A B = (M \otimes_A B)/I^{n+1}(M \otimes_A B).$$

pour laquelle chaque gradué est isomorphe à  $B/\mathfrak{m}_A B$ . On a donc par additivité

$$\operatorname{lg}_{B/I^{n+1}B} [(M \otimes_A B)/I^{n+1}(M \otimes_A B)] = \ell_n \operatorname{lg}_{B/I^{n+1}B}(B/\mathfrak{m}_A B) = \operatorname{lg}_{A/I^{n+1}}(M/I^{n+1})$$

ce qui entraîne l'égalité au niveau des polynômes de Samuel

$$\mathbb{S}_{IB}(M \otimes_A B) = \mathbb{S}_I(M) \operatorname{lg}_{B/IB}(B/\mathfrak{m}_A B)$$

et donc le résultat voulu en vertu du lemme B.3.1.

(3). Soit  $n$  un entier positif. En notant  $\ell_n$  la longueur de  $N/I^{n+1}N$  comme  $B/I^{n+1}B$ -module on a une filtration de Jordan-Hölder

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell_n} = N/I^{n+1}N.$$

Chaque gradué est isomorphe à  $B/\mathfrak{m}_B$  qui est un  $A/I^{n+1}$ -module de longueur  $\dim_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_B)$ . Par additivité on a donc

$$\operatorname{lg}_{A/I^{n+1}}(N/I^{n+1}N) = \ell_n \dim_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_B) = \operatorname{lg}_{B/I^{n+1}B}(N/I^{n+1}N) \dim_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_B)$$

ce qui entraîne l'égalité au niveau des polynômes de Samuel

$$\mathbb{S}_I(N) = \mathbb{S}_{IB}(N) \dim_{A/\mathfrak{m}_A}(B/\mathfrak{m}_B)$$

et donc le résultat voulu en vertu du lemme B.3.1. □

**Corollaire B.3.4.** Lorsque  $A$  est un anneau local intègre et  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire, on a pour tout  $A$ -module de type fini

$$e_I(M) = e_I(A) \dim_{F(A)}(M \otimes_A F(A))$$

où  $F(A)$  est le corps des fractions de  $A$ .

DÉMONSTRATION. — Notons  $d$  la dimension de l'anneau local  $A$ . Dire que la dimension de  $M \otimes_A F(A)$  est nulle revient à dire le support de  $M$  ne contient pas  $(0)$ . Ce dernier est donc de dimension  $< d$  et la multiplicité de  $I$  dans  $M$  est nulle. Lorsque l'on suppose que le support de  $M$  est de dimension  $d$  le résultat découle immédiatement de la seconde assertion du lemme B.3.2.  $\square$

Supposons maintenant donnés un schéma  $X$  et un sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$ . Pour toute composante irréductible  $W$  de  $Z$  de point générique  $w$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,w}$  vérifie

$$\dim(\mathcal{O}_{X,w}) = \text{codim}(W, X)$$

et le sous-schéma fermé  $Z \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,w})$  est artinien, autrement dit défini par un idéal  $\mathfrak{m}_{X,w}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{X,w}$ .

**Définition B.3.5.** Soient  $X$  un schéma,  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X$  et  $W$  une composante irréductible de  $Z$ .

1. La multiplicité de Samuel le long de  $Z$  de  $W$  dans un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  est l'entier positif

$$e_Z(W, \mathcal{M}) = e_I(\mathcal{M}_w, \text{codim}(W, X))$$

où  $I$  est l'idéal  $\mathfrak{m}_{X,w}$ -primaire de  $\mathcal{O}_{X,w}$  défini par  $Z$ .

2. La multiplicité de Samuel le long de  $Z$  de  $W$  dans un cycle algébrique  $\alpha$  sur  $X$  est l'entier positif

$$e_Z(W, \alpha) = \sum_V \alpha_V e_Z(W, \mathcal{O}_V) \tag{170}$$

la somme étant prise sur les sous-schémas fermés intègres  $V$  de  $X$ .

Lorsque  $V$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  l'entier  $e_Z(W, \mathcal{O}_V)$  est non nul si et seulement si  $V$  contient  $W$  et vérifie

$$\text{codim}(W, X) = \text{codim}(W, V).$$

En particulier, pour un cycle algébrique  $\alpha$  on peut se restreindre dans la somme (170) aux sous-schémas fermés intègres  $V$  de  $X$  contenant  $W$  et vérifiant

$$\text{codim}(W, X) = \text{codim}(W, V).$$

**Lemme B.3.6.** Soient  $X$  un schéma,  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X$  et  $W$  une composante irréductible de  $Z$ . Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$ , on a

$$e_Z(W, \mathcal{M}) = e_Z(W, \alpha(\mathcal{M})).$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $c$  la codimension de  $W$  dans  $X$ . Le lemme B.3.2 assure que  $e_Z(W, -)$  induit un morphisme de groupes abéliens

$$e_Z(W, -) : \text{Gr}_c^W G_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

D'après la seconde assertion du lemme B.1.2 on a dans  $\text{Gr}_c^W G_0(X)$

$$[\mathcal{M}] = \sum_W \text{lg}_{\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{M}_w)[\mathcal{O}_W]$$

où  $V_1, \dots, V_r$  sont les composantes irréductibles du support de  $\mathcal{M}$  contenant  $W$  et vérifiant  $\text{codim}(W, X) = \text{codim}(W, V_i)$ .

□

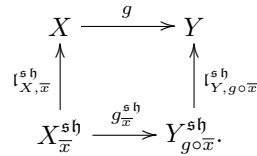
# GLOSSAIRE DES NOTATIONS

Schémas		<i>Référence</i>	<i>page</i>
CATÉGORIES			
$Sch_S$	Catégorie des $S$ -schémas		6
$SchCor_S$	Catégorie des $S$ -schémas munis des correspondances finies		83
$Sm_S$	Catégorie des $S$ -schémas lisses de type fini		6
$SmCor_S$	Catégorie des $S$ -schémas lisses de type fini munis des correspondances finies		83
$\mathcal{V}_x^{h,a}$	Catégorie des voisinages Nisnevich affines du point $x$ de $X$		54
$\mathcal{V}_{\bar{x}}^{sh,a}$	Catégorie des voisinages étales affines du point géométrique $\bar{x}$ de $X$		54
$\mathcal{V}_x^h$	Catégorie des voisinages Nisnevich du point $x$ de $X$		116
$\mathcal{V}_{\bar{x}}^{sh}$	Catégorie des voisinages étales du point géométrique $\bar{x}$		154
LOCALISATION POUR LA TOPOLOGIE DE NISNEVICH			
$X_x^h$	Spectre de l'hensélisé $\mathcal{O}_{X,x}^h$		89
$X^h$	Réunion disjointe sur tous les points $x$ de $X$ des schémas $X_x^h$		89
$l_{X,x}^h$	Morphisme canonique de $X_x^h$ dans $X$		89
$l_X^h$	Morphisme canonique de $X^h$ dans $X$		89
$s_X^h$	Section canonique du morphisme		90
	$l_{X^h}^h : (X^h)^h \rightarrow X^h$		
$g_x^h$	Morphisme de schémas henséliens déduit du morphisme $g$ via le diagramme		101
	$  \begin{array}{ccc}  X & \xrightarrow{g} & Y \\  \uparrow l_{X,x}^h & & \uparrow l_{Y,g(x)}^h \\  X_x^h & \xrightarrow{g_x^h} & Y_{g(x)}^h  \end{array}  $		
$m_{X,Y}^h$	Morphisme canonique de $(X \times_S Y)^h$ dans $X^h \times_S Y^h$		102

$m_{X,Y,e}^h$	Morphisme canonique de $(X \times_S Y)_e^h$ dans $X_x^h \times_S Y_y^h$	<i>Référence</i> page 102
---------------	---	---------------------------------

LOCALISATION POUR LA TOPOLOGIE ÉTALE

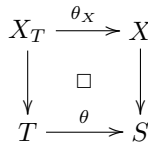
$X_{\bar{x}}^{sh}$	Spectre de l'hensélisé strict $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{sh}$ au point géométrique $\bar{x}$	106
$X^{sh}$	Réunion disjointe sur tous les bons points géométriques $\bar{x}$ de $X$ des schémas $X_{\bar{x}}^{sh}$	106
$l_{X,\bar{x}}^{sh}$	Morphisme canonique de $X_{\bar{x}}^{sh}$ dans $X$	106
$l_X^{sh}$	Morphisme canonique de $X^{sh}$ dans $X$	106
$s_X^{sh}$	Section canonique du morphisme du morphisme $l_{X^{sh}}^{sh} : (X^{sh})^{sh} \rightarrow X^{sh}$	106
$g_{\bar{x}}^{sh}$	Morphisme de schémas strictement henséliens déduit du morphisme $g$ via le diagramme	109



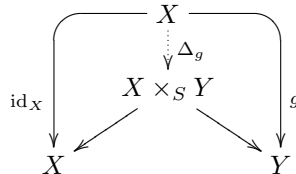
$m_{X,Y}^{sh}$	Morphisme canonique de $(X \times_S Y)^{sh}$ dans $X^{sh} \times_S Y^{sh}$	109
$m_{X,Y,\bar{x}}^{sh}$	Morphisme canonique de $(X \times_S Y)_{\bar{x}}^{sh}$ dans $X_{\bar{x}}^{sh} \times_S Y_{\bar{y}}^{sh}$	110

DÉFORMATION ET SCHÉMAS DIVERS

$B_Z(X)$	Éclatement du sous-schéma fermé $Z$ dans $X$	188
$D_Z(X)$	Déformation au cône normal du sous-schéma fermé $Z$ dans $X$ donnée par l'éclatement $B_Z(\mathbb{A}_X^1)$	188
$D_Z^\circ(X)$	Déformation au cône normal du sous-schéma fermé $Z$ dans $X$ donnée par $D_Z^\circ(X) := D_Z(X) \setminus B_Z(X)$	188
$N_Z(X)$	Fibré normal du sous-schéma fermé $Z$ de $X$	188
$\mathbb{P}(\bar{E})$	Fermeture projective du fibré vectoriel $E$	188
$\theta_X$	$\theta : T \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Morphisme de $S$ -schémas s'insérant dans le carré cartésien	Notn 1.1.8 20



$\Gamma_g$	Graphe du morphisme de schémas $g$	82
$\Delta_g$	Immersion fermée associée à $g$ via le diagramme	82



		<i>Référence</i>	<i>page</i>
$Z_T^{\text{st}}$	Transformé strict du sous-schéma fermé $Z$ le long d'un éclatement abstrait $T \rightarrow S$		38
$U_X^n$	Produit fibré au dessus de $X$ de $n$ copies du $X$ -schéma $U$ $U_X^n = \underbrace{U \times_X \cdots \times_X U}_{n \text{ termes}}$		90
$\check{C}_X(U)$	Schéma simplicial de Čech, associé à un $X$ -schéma $U$ , dont les $n$ -simplexes sont donnés par $U_X^{n+1}$		90

## Cycles algébriques relatifs

### CYCLES RELATIFS

$Z(X/S)$	Cycles algébriques relatifs sur $X$	Defn 1.1.21	24
$Z(X/S, n)$	Cycles algébriques relatifs sur $X$ de dimension $n$ sur $S$		25
$C(X/S, n)$	Cycles algébriques relatifs sur $X$ propres sur $S$ et de dimension $n$ sur $S$		25
$Z_{\text{equi}}(X/S, n)$	Cycles relatifs équidimensionnels sur $S$ de dimension $n$	Defn 1.1.26	27
$\text{Hilb}(X/S, n)$	Ensemble des sous-schémas fermés de $X$ plats et équidimensionnels de dimension $n$ sur $S$		27
$\mathbb{Z}\text{Hilb}(X/S, n)$	Groupe abélien libre associé à $\text{Hilb}(X/S, n)$		27
$Z_{\text{Hilb}}(X/S, n)$	Image du groupe abélien $\mathbb{Z}\text{Hilb}(X/S, n)$ par le morphisme $[-] : \mathbb{Z}\text{Hilb}(X/S, n) \rightarrow Z(X/S, n)$	Defn 1.1.28	27

### CYCLES UNIVERSELLEMENT RATIONNELS

$\mathcal{Z}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement rationnels de dimension $n$ sur $S$	Defn 1.2.13	38
$\mathcal{C}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement rationnels propres sur $S$ et de dimension $n$ sur $S$		49
$\mathcal{Z}_{\text{equi}}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement rationnels équidimensionnels sur $S$ de dimension $n$		49
$\mathcal{C}_{\text{equi}}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement rationnels propres sur $S$ et équidimensionnels sur $S$ de dimension $n$		49

### CYCLES UNIVERSELLEMENT ENTIERS

$z(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement entiers sur $X$ de dimension $n$ sur $S$		48
$c(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement entiers propres sur $S$ et de dimension $n$ sur $S$		49
$z_{\text{equi}}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement entiers équidimensionnels sur $S$ de dimension $n$		49
$c_{\text{equi}}(X/S, n)$	Cycles relatifs universellement entiers propres sur $S$ et équidimensionnels sur $S$ de dimension $n$		49

		<i>Référence</i>	<i>page</i>
OPÉRATIONS SUR LES CYCLES RELATIFS			
$(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha$	Changement de base du cycle relatif $\alpha$ le long de l'épaississement $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ du $K$ -point épais $\underline{s}$		37
$\underline{s}^{\otimes} \alpha$	$\alpha$ cycle universellement rationnel. Valeur commune des cycles $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)^{\otimes} \alpha$ pour tout épaississement $(\mathcal{O}, \tau, \sigma)$ de $\underline{s}$		38
$\theta_{\text{st}}^{\otimes} \alpha$	Transformé strict de $\alpha$ le long de l'éclatement abstrait $\theta$		39
$\theta^{\otimes} \alpha$	Changement de base du cycle universellement rationnel $\alpha$ le long du morphisme $\theta : T \rightarrow S$	Prop 1.2.26	45
$Cor(\beta, \alpha)$	Cycle algébrique « correspondance » obtenu à partir de $\alpha$ et $\beta$		75
$\alpha \times_S \beta$	Produit externe des cycles relatifs $\alpha$ et $\beta$		79

## Correspondances finies

### NOTATIONS GÉNÉRALES

$c_S(X, Y)$	$S$ -correspondances finies de $X$ dans $Y$		82
$\beta \circ \alpha$	Composition des $S$ -correspondances finies $\alpha$ et $\beta$		82
$\alpha \otimes \beta$	Produit tensoriel des $S$ -correspondances finies $\alpha$ et $\beta$		84
$T \times_S \alpha, \alpha_T$	Correspondance finie obtenu par changement de base		86

### LOCALISATION DES CORRESPONDANCES FINIES

$\sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\text{h}}$	$\mathcal{O}$ -hensélien. Homotopie canonique du complexe de groupes abéliens $\check{C}_{X^{\text{h}}/X}(\mathcal{O})$ .	Prop 2.2.3	91
$\sigma_{\mathcal{O}, X, n}^{\text{sh}}$	$\mathcal{O}$ strictement hensélien. Homotopie canonique du complexe de groupes abéliens $\check{C}_{X^{\text{sh}}/X}(\mathcal{O})$	Prop 2.3.4	107
$\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{h}}$	$\mathcal{O}$ hensélien. Morphisme de localisation des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich	Cor 2.2.7	97
$\sigma_{\mathcal{O}, X}^{\text{sh}}$	$\mathcal{O}$ strictement hensélien. Morphisme de localisation des correspondances finies pour la topologie étale		108
$\alpha_{x, y}$	Correspondance finie locale pour la topologie de Nisnevich aux points $x, y$ associée à $\alpha$		100
$\alpha_{\bar{x}, \bar{y}}$	Correspondance finie locale pour la topologie étale aux bons points géométriques $\bar{x}, \bar{y}$ associée à $\alpha$		108

## Préfaisceaux et faisceaux

### CD-STRUCTURES

$\text{PSh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})$	Catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens sur $\mathcal{C}$	Notn 3.1.1	112
$t_P$	Topologie de Grothendieck associée à une cd-structure		112



		<i>Référence</i>	<i>page</i>
$\mathrm{Sh}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, t_P)$	Catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathcal{C}$ munie de la topologie de Grothendieck $t_P$	Notn 3.1.1	112
$\rho(X)$	$t_P$ -faisceau associé au préfaisceau représenté par $X \in \mathcal{C}$	Notn 3.1.1	112
$\mathbb{Z}[X]$	$t_P$ -faisceau de groupes abéliens associé à $\rho(X)$	Notn 3.1.1	112

FAISCEAUX NISNEVICH ET ÉTALES

$\mathrm{PSh}(S)$	Catégorie des préfaisceaux sur $S$	Notn 3.1.7	116
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(S)$	Catégorie des faisceaux Nisnevich sur $S$	Notn 3.1.7	116
$a_{\mathrm{Nis}}(F)$	Faisceau Nisnevich associé au préfaisceau $F$		116
$a_{\mathrm{Et}}(F)$	Faisceau étale associé au préfaisceau $F$		116
$F_x$	Fibre au point $x$ du faisceau Nisnevich $F$		116
$F_{\bar{x}}$	Fibre au point géométrique $\bar{x}$ du faisceau étale $F$		155

h-FAISCEAUX

$\mathrm{Sh}_h^{\mathbb{Z}}(S)$	Catégorie des faisceaux de groupes abéliens pour la $h$ -topologie		131
$\mathbb{Z}_h[X]$	Faisceau de groupes abéliens pour la $h$ -topologie associé au $S$ -schéma $X$		127
$F_h$	Faisceau pour la $h$ -topologie associé à un préfaisceau $F$ sur $\mathrm{Sch}_S$		127
$\mathbf{a}_X$	Morphisme canonique de $h$ -faisceaux en groupes abéliens		127
	$\mathbf{a}_X : \mathbb{Z}_h[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]_h$		
$\mathbf{b}_{X,Y}$	Morphisme de groupes abéliens défini par le diagramme		130
	$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{b}_{X,Y} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X](Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]_h(Y) & \xrightarrow{\mathbf{a}_{X,Y}^{-1}} & \mathbb{Z}_h[X](Y). \end{array}$		
$F^{\mathrm{sym}}$	Faisceau de groupes abéliens associé canoniquement au faisceau $F$ de monoïdes commutatifs		127

Faisceaux Nisnevich avec transferts

CATÉGORIES

$\mathrm{PSh}^{\mathrm{tr}}(S)$	Catégorie des préfaisceaux avec transferts sur $S$	118
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S)$	Catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts sur $S$	118
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}^{\mathrm{tr}}(S)$	Catégorie des faisceaux étales avec transferts sur $S$	118
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}, \otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$	Catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts quasi-monoïdaux symétriques	152
$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}, \otimes}^{\mathrm{tr}}(S)$	Catégorie des faisceaux avec transferts pour la topologie étale quasi-monoïdaux symétriques	156

		<i>Référence</i>	<i>page</i>
$\mathcal{PP}\mathcal{L}^{\text{tr}}(S)$	Sous-catégorie de $\mathbf{C}(\text{PSh}^{\text{tr}}(S))$ stable par colimite spéciale et engendrée par les complexes supérieurement bornés de faisceaux Nisnevich avec transferts libres	Defn 3.3.13	139
$\mathcal{PL}^{\text{tr}}(S)$	Sous-catégorie formée des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts pseudo-K-plats	Defn 3.3.13	139
$\mathcal{PJ}^{\text{tr}}(S)$	Sous-catégorie formée des complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts pseudo-K-injectifs	Defn 3.3.20	142

## PRÉFAISCEAUX ET FAISCEAUX DE CYCLES

$\underline{\mathcal{Z}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$	Préfaisceau des cycles relatifs universellement rationnels sur $X$ de dimension $n$ sur $S$		47
$\underline{\mathcal{Z}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$	Préfaisceau des cycles relatifs universellement rationnels sur $X$ , équidimensionnels de dimension $n$ sur $S$	Lem 3.2.2	49
$\underline{\mathcal{Z}}_{\text{equi}}(X/S, n)$	Préfaisceau des cycles relatifs universellement entiers sur $X$ , équidimensionnels de dimension $n$ sur $S$	Lem 3.2.2	49
$\underline{\mathcal{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)_{\mathbb{Q}}$	Préfaisceau des cycles relatifs universellement rationnels sur $X$ , propres et équidimensionnels de dimension $n$ sur $S$	Lem 3.2.2	49
$\underline{\mathcal{C}}_{\text{equi}}(X/S, n)$	Préfaisceau des cycles relatifs universellement entiers sur $X$ , propres et équidimensionnels de dimension $n$ sur $S$	Lem 3.2.2	49
$\mathbb{Z}_{\text{tr}}[X]$	Préfaisceau avec transferts représenté par le $S$ -schéma $X$		90
$\check{\mathcal{C}}_{U/X}$	Complexe de faisceau Nisnevich avec transferts associé au schéma simplicial $\check{C}_X(U)$		90

## AUTRES

$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(F)$	Faisceau Nisnevich avec transferts associé au préfaisceau avec transferts $F$	Prop 3.2.7	123
$a_{\text{Et}}^{\text{tr}}(F)$	Faisceau étale avec transferts associé au préfaisceau avec transferts $F$	Prop 3.2.7	123
$F \otimes_{\text{tr}}^{\text{PF}} G$	Produit tensoriel des préfaisceaux avec transferts $F$ et $G$		125
$\underline{\text{Hom}}_{\text{tr}}(F, G)$	Hom interne de la catégorie des préfaisceaux (faisceaux) avec transferts		126
$F \otimes_{\text{tr}}^{\text{PF}} G$	Produit tensoriel des faisceaux Nisnevich (étales) avec transferts $F$ et $G$		126
$\mathcal{O}_{\text{Nis}}(F)$	Préfaisceau avec transferts sous-jacent au faisceau Nisnevich avec transferts $F$		124
$\mathcal{O}_{\text{Et}}(F)$	Préfaisceau avec transferts sous-jacent au faisceau étale avec transferts $F$		124
$\mathcal{O}_{\text{tr}}(F)$	Faisceau Nisnevich sous-jacent au faisceau Nisnevich avec transferts $F$		132
$L_S(F)$	Faisceau Nisnevich avec transferts associé au faisceau Nisnevich $F$		124

## Résolutions de Godement Référence page

### GÉNÉRALITÉS

$B^*(M, C)$	$\mathcal{C}$ une catégorie. Objet cosimplicial associé à la monade $M$ de $\mathcal{C}$ et objet $C \in \mathcal{C}$	144
$CB^*(M, C)$	$\mathcal{C}$ une catégorie additive. Complexe d'objets de $\mathcal{C}$ associé à l'objet cosimplicial $B^*(M, C)$	144
$\mathcal{G}^*F$	Résolution cosimpliciale de Godement du faisceau $F$	144
$G^*F$	Résolution de Godement du faisceau $F$ : complexe de faisceaux associé à $\mathcal{G}^*F$	145

### RÉSOLUTIONS DE GODEMENT ET TRANSFERTS

$\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X$	Monade de la catégorie de la catégorie des petits faisceaux Nisnevich de groupes abéliens sur $X$ fournie par la famille de foncteurs fibres $F \mapsto F_x$ $x$ étant un point de $X$	149
$\mathcal{G}_{\text{Nis}}$	Monade de la catégorie des faisceaux Nisnevich de groupes abéliens déduite des $\mathcal{G}_{\text{Nis}}^X$	150
$\mathcal{G}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$	Monade canonique de la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts	Prop 3.4.6 150
$\mathcal{G}_{\text{Nis}, \otimes}^{\text{tr}}$	Monade canonique de la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts quasi-monoïdaux symétriques	Prop 3.4.8 152
$\mathcal{G}_{\text{Et}}^X$	Monade de la catégorie de la catégorie des petits faisceaux étales de groupes abéliens sur $X$ fournie par la famille de foncteurs fibres $F \mapsto F_{\bar{x}}$ $\bar{x}$ étant un bon point géométrique de $X$	154
$\mathcal{G}_{\text{Et}}$	Monade de la catégorie des faisceaux étales de groupes abéliens déduite des $\mathcal{G}_{\text{Et}}^X$	155
$\mathcal{G}_{\text{Et}}^{\text{tr}}$	Monade canonique de la catégorie des faisceaux étales avec transferts	Prop 3.4.11 155
$\mathcal{G}_{\text{Et}, \otimes}^{\text{tr}}$	Monade canonique de la catégorie des faisceaux étales avec transferts quasi-monoïdaux symétriques	Prop 3.4.12 156

## Motifs mixtes

### CATÉGORIES

$DM^{\text{eff}}(S)$	Catégorie des motifs mixtes effectifs	Defn 4.1.2	158
$DM_-^{\text{eff}}(S)$	Catégorie des motifs mixtes effectifs supérieurement bornés		159

		<i>Référence</i>	<i>page</i>
$E_{\mathbb{A}^1}$	Sous-catégorie de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts formée des complexes $\mathbb{A}^1$ -nuls		158
$D_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(S))$	Sous-catégorie de la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts formée des complexes $\mathbb{A}^1$ -locaux		161
$E_{gm}(S)$	Sous-catégorie épaisse de la catégorie homotopique bornée associée à $\mathrm{SmCor}_S$ engendrée par les relations d'homotopie et de Mayer-Vietoris	Defn 4.1.19	168
$\underline{DM}_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$	Quotient de la catégorie homotopique bornée associée à $\mathrm{SmCor}_S$ par la sous-catégorie épaisse $E_{gm}(S)$	Defn 4.1.19	168
$DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$	Catégorie des motifs mixtes effectifs géométriques sur le schéma $S$	Defn 4.1.21	169

## MOTIFS ET COHOMOLOGIE MOTIVIQUE

$\mathrm{CH}^p(X, q)$	Groupes de Chow supérieurs de Bloch		178
$M(X)$	Motif associé à un $S$ -schéma lisse de type fini $X$		159
$M_Z(X)$	Motif de $X$ à support dans le sous-schéma fermé $Z$		159
$M_{gm}(X)$	Motif géométrique associé à un $S$ -schéma lisse de type fini $X$		169
$M\mathrm{Th}(E)$	Motif de Thom associé au fibré vectoriel $E$	Defn 4.3.7	183
$c_n(E)$	$n$ -ème classe de Chern motivique du fibré $E$	Defn 4.3.2	181
$\bar{\mathrm{t}}(E), \mathrm{t}(E)$	classe de Thom du fibré $E$	Defn 4.3.9	184
$\mathrm{t}(E)$	isomorphisme de Thom du fibré $E$		185
$\mathbb{Z}(q)$	Motif mixte de Tate, les $\mathbb{Z}(q)$ s'en déduisant par tensorisation	Defn 4.1.4	159
$M\{n\}$	Notation raccourcie pour le motif $M(n)[2n]$		192
$\mathbb{Z}^{\mathrm{FS}}(q)$	Motif de E. Friedlander et A. Suslin		177
$H^p(X, \mathbb{Z}(q))$	Cohomologie motivique du schéma $X$ parfois notée aussi $H^{p,q}(X)$		176
$H_{\mathrm{FS}}^p(X, \mathbb{Z}(q))$	Cohomologie de E. Friedlander et A. Suslin du schéma $X$	Defn 4.2.1	177
$i^*$	Morphisme de Gysin associé à l'immersion fermée $i$	Defn 4.4.4	191
$\mathrm{cl}_X^p$	Morphisme classe de cycle naïf en cohomologie motivique		206
$\mathrm{cl}_X^{p,q}$	Isomorphisme de Voevodsky identifiant $\mathrm{CH}^p(X, q)$ avec $H^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p))$		179

## RÉALISATIONS

$D_{\mathcal{MR}}$	Catégorie triangulées des réalisations mixtes		229
$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}$	Foncteur de réalisation mixte des motifs géométriques		229
$D\mathrm{Var}, D\mathrm{Sm}$	Catégories géométriques intervenant dans la construction de $\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}$ donnée par A. Huber		240
$D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$	Catégorie des coefficients $\ell$ -adiques de T. Ekedahl	Defn A.2.5	256
$D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)$	Catégorie des coefficients $\ell$ -adiques constructibles bornés		256
$R_\ell$	Foncteur de réalisation $\ell$ -adique des motifs géométriques	Thm 5.2.1	223
$D^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$	Catégorie des coefficients $\ell$ -adiques modérés	Defn A.4.1	263

		<i>Référence</i>	<i>page</i>
$D_c^b(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$	Catégorie des coefficients $\ell$ -adiques constructibles bornés modérés	Defn A.4.1	263
$R_{md, \ell}$	Foncteur de réalisation $\ell$ -adique modérée des motifs géométriques	Cor 5.2.7	228



## PARTIE II

# MICROLOCALISATION DES IND-FAISCEAUX





## MOTIVATION

Cette partie est basée sur un manuscrit de M. Kashiwara et les idées de P. Schapira. Ma contribution à ce travail a consisté à achever la preuve du théorème de convolution microlocale des noyaux.

L'idée de la microlocalisation remonte aux travaux de M. Sato [117]. Celui-ci a commencé par développer la théorie des hyperfonctions, c'est-à-dire des fonctions généralisées sur une variété réelle et a ensuite remarqué que cette notion pouvait être microlocalisée. Plus précisément, il a construit le faisceau des microfonctions sur le fibré cotangent dont l'image directe est le faisceau des hyperfonctions. De manière analogue, on peut considérer le faisceau des anneaux d'opérateurs microdifférentiels sur le fibré cotangent dont l'image directe est le faisceau des opérateurs différentiels.

D'autre part, la correspondance de Riemann-Hilbert, résolue par M. Kashiwara dans [81], assure qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les modules holonomes réguliers sur l'anneau des opérateurs différentiels  $\mathcal{D}_X$  et les faisceaux pervers.

Cette notion de  $\mathcal{D}_X$  modules holonomes réguliers sur l'anneau des opérateurs différentiels peut être aisément microlocalisée : il est en effet naturel de considérer les modules holonomes réguliers sur l'anneau des opérateurs microdifférentiels  $\mathcal{E}_X$ . Suivant le principe de la correspondance de Riemann-Hilbert, on peut donc s'attendre à pouvoir microlocaliser la notion de faisceau pervers ou plus généralement la notion de faisceau.

Bien qu'il n'existe pas en général de faisceau d'anneaux globalement défini et localement isomorphe aux anneaux d'opérateurs microdifférentiels, il est possible d'associer canoniquement à une variété symplectique homogène, un champ localement isomorphe aux champs de modules sur l'anneau des opérateurs microdifférentiels [82]. Pour cette raison, nous pouvons nous attendre à ce qu'il existe un « champ de faisceaux microlocaux » sur une variété symplectique homogène.

Afin de motiver les constructions, revenons sur la correspondance de Riemann-Hilbert et l'idée de la preuve de M. Kashiwara (une autre démonstration a été donnée par Z. Mebkhout dans [107, 106]). Le principe de la correspondance de Riemann-Hilbert peut se résumer grossièrement ainsi : un système holonome régulier d'EDP (nous entendons par là un objet de  $D_{\text{hr}}^b(\mathcal{D}_X)$ ) peut

être reconstruit à partir de ces solutions holomorphes. Dans [81] M. Kashiwara introduit un quasi-inverse explicite au foncteur « solutions holomorphes »

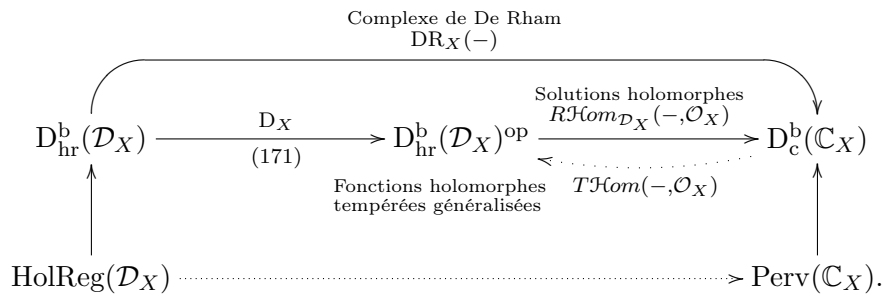
$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(-, \mathcal{O}_X) : D_{\text{hr}}^b(\mathcal{D}_X)^{\text{op}} \longrightarrow D_c^b(\mathbb{C}_X)$$

Ce foncteur

$$T\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X) : D_c^b(\mathbb{C}_X)^{\text{op}} \longrightarrow D_{\text{hr}}^b(\mathcal{D}_X)$$

associe à un objet  $F \in D_c^b(\mathbb{C}_X)$  ce que l'on peut considérer comme les fonctions holomorphes tempérées généralisées [81, 85] associées à  $F$ .

CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT. — Soit  $X$  une variété analytique complexe. La correspondance de Riemann-Hilbert peut être schématisée par le diagramme commutatif suivant



Dans ce diagramme  $D_X$  désigne le foncteur de dualité dont est munie la catégorie  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Ce dernier est donné par

$$D_X(\mathcal{M}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{K}_X)$$

où  $\mathcal{K}_X$  désigne le  $\mathcal{D}_X$ -module

$$\mathcal{K}_X = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}[\dim_{\mathbb{C}}(X)].$$

Ce foncteur vérifie  $D_X D_X = \text{id}$  et induit ainsi une équivalence de catégorie entre  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$  et son opposé  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)^{\text{op}}$ . D'autre part il préserve les sous-catégories  $D_{\text{h}}^b(\mathcal{D}_X)$  et  $D_{\text{hr}}^b(\mathcal{D}_X)$  et induit en particulier l'équivalence (171).  $\square$

Les ind-faisceaux permettent de considérer des objets qui ne sont pas de nature locale, comme les distributions tempérées ou les fonctions holomorphes tempérées. En particulier une théorie de la microlocalisation étendue aux ind-faisceaux doit donner les moyens de définir une notion de faisceaux pervers microlocaux ainsi que le cadre pour une correspondance de Riemann-Hilbert microlocale.

Cette partie, qui a fait l'objet d'une publication conjointe avec M. Kashiwara, P. Schapira et I. Waschies [89], présente la construction, pour une variété  $X$  de classe  $C^\infty$ , d'un foncteur de microlocalisation des ind-faisceaux

$$\mu_X : D^b(\text{I}(\mathbb{C}_X)) \rightarrow D^b(\text{I}(\mathbb{C}_{T^*X})), \tag{172}$$

où  $\text{I}(\mathbb{C}_X)$  désigne la catégorie des ind-faisceaux sur  $X$  (voir [87]). Nous donnons ses principales propriétés ainsi que les relations qu'il entretient avec la théorie de la microlocalisation développée par M. Kashiwara et P. Schapira. Dans [84] et [83] ces derniers ont introduit et étudié le foncteur

$$\mu_{\text{hom}} : D^b(\mathbb{C}_X)^{\text{op}} \times D^b(\mathbb{C}_X) \rightarrow D^b(\mathbb{C}_{T^*X})$$

qui à deux faisceaux sur une variété  $X$  de classe  $C^\infty$  associe « le faisceau des homomorphismes microlocaux » entre ces deux faisceaux. Le foncteur (172) vérifie la relation fondamentale

$$\mu hom(F, G) = R\mathcal{H}om(\mu_X(F), \mu_X(G)).$$

Cette partie comprend deux chapitres. Le premier chapitre présente les résultats techniques nécessaires à la construction et à l'étude du foncteur  $\mu_X$ . Nous définissons notamment des noyaux sur une variété  $X$  de classe  $C^\infty$  attachés à la donnée d'une sous-variété fermée  $Z$  et d'une 1-forme  $\sigma$  ne s'annulant pas sur  $Z$ . Nous étudions ensuite leurs propriétés fonctorielles. Ces noyaux peuvent être vus comme des noyaux microlocalisés « généraux ». Cependant dans ce travail, leur rôle est de fournir les outils permettant de démontrer les propriétés fonctorielles de  $\mu_X$ .

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons le foncteur  $\mu_X$  qui est la transformation intégrale par rapport à un certain noyau  $K_{T^*X}$  sur  $T^*X \times T^*X$  associé à la 1-forme fondamentale. Nous détaillons les propriétés fonctorielles de  $\mu_X$  déduites des propriétés correspondantes des noyaux étudiés dans le premier chapitre de cette partie. Nous montrons ensuite comment certaines propriétés microlocales classiques peuvent être généralisées aux ind-faisceaux. Nous donnons un théorème de comparaison entre le micro-support d'un ind-faisceau  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_X))$  et le support de  $\mu_X(\mathcal{F})$ .

En application, nous prouvons que sur une variété complexe  $X$ , le foncteur  $\mu hom$  induit un foncteur bien défini

$$\mu hom(-, \mathcal{O}_X) : D^b(\mathbb{C}_X)^{op} \rightarrow D^b(\mathcal{E}_X),$$

où  $\mathcal{E}_X$  est l'anneau des opérateurs microdifférentiels. Les applications du foncteur  $\mu_X$  aux faisceaux pervers microlocaux et à une version microlocale de la correspondance de Riemann-Hilbert ont été développées par I. Waschkes dans sa thèse [140] ainsi que dans [141] et [142].



# CHAPITRE 1

## NOYAUX MICROLOCAUX

### 1.1. Ind-faisceaux sur les variétés

Dans la suite notre convention concernant les espaces topologiques sera la suivante

**Les espaces topologiques sont supposés localement compact de dimension cohomologique finie.**

Nous donnons dans cette section un survol de la théorie des ind-faisceaux de [87]. Soit  $X$  un espace topologique, nous désignons par  $\text{Mod}(\mathbb{C}_X)$  la catégorie des faisceaux de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  et par  $\text{Mod}^c(\mathbb{C}_X)$  la sous-catégorie strictement pleine formée des faisceaux à support compact.

La catégorie  $\text{I}(\mathbb{C}_X)$  des ind-faisceaux est par définition la catégorie des ind-objets de  $\text{Mod}^c(\mathbb{C}_X)$ . Cette catégorie est abélienne et nous notons  $\text{D}^b(\text{I}(\mathbb{C}_X))$  sa catégorie dérivée bornée.

Il existe un foncteur exact pleinement fidèle

$$\begin{aligned} \iota_X : \text{Mod}(\mathbb{C}_X) &\rightarrow \text{I}(\mathbb{C}_X) \\ F &\mapsto \varinjlim_{U \subset\subset X} F_U \end{aligned}$$

la colimite formelle étant prise sur les ouverts  $U$  relativement compacts de  $X$ . Dans la suite, nous identifierons  $\text{Mod}(\mathbb{C}_X)$  à une sous-catégorie pleine de  $\text{I}(\mathbb{C}_X)$ .

Le foncteur  $\iota_X$  possède un foncteur adjoint à gauche exact

$$\begin{aligned} \alpha_X : \text{I}(\mathbb{C}_X) &\rightarrow \text{Mod}(\mathbb{C}_X) \\ \varinjlim_{i \in I} F_i &\mapsto \varprojlim_{i \in I} F_i \end{aligned}$$

La pleine fidélité de  $\iota_X$  assure que  $\alpha_X \circ \iota_X = \text{id}$ . Le foncteur  $\alpha_X$  possède un foncteur adjoint à gauche exact

$$\beta_X : \text{Mod}(\mathbb{C}_X) \rightarrow \text{I}(\mathbb{C}_X)$$

et puisque  $\beta_X$  est pleinement fidèle, on a de même  $\alpha_X \circ \beta_X = \text{id}$ . Le foncteur  $\beta_X$  est moins facile à définir que les foncteurs  $\alpha_X$  et  $\iota_X$ .

*Notation 1.1.1.* Soit  $S$  un sous-ensemble localement fermé de  $X$ . Nous posons pour simplifier les notations

$$\tilde{\mathbb{C}}_S = \beta_S(\mathbb{C}_S)$$

Étant donné un sous-ensemble fermé  $Z$  de  $X$ , le ind-faisceau  $\tilde{\mathbb{C}}_Z$  est donné par la formule

$$\tilde{\mathbb{C}}_Z = \varinjlim_{Z \subset W} \mathbb{C}_{\overline{W}},$$

la colimite formelle étant prise sur les ouverts  $W$  contenant  $Z$ . Lorsque  $U$  est un ouvert de  $X$ , nous disposons de la description suivante

$$\tilde{\mathbb{C}}_U = \varinjlim_{V \subset\subset U} \mathbb{C}_V,$$

la colimite formelle étant prise sur les ouverts  $V$  relativement compacts de  $U$ . Il s'ensuit que pour un sous-ensemble localement fermée  $S$  de  $X$ , on a

$$\tilde{\mathbb{C}}_S = \tilde{\mathbb{C}}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z = \varinjlim_{Z \subset W, V \subset\subset U} \mathbb{C}_{V \cap \overline{W}}$$

lorsque  $S$  s'écrit  $S = U \cap Z$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $Z$  un fermé.

*Remarque 1.1.2.* Les morphismes  $\mathbb{C}_{V \cap \overline{W}} \rightarrow \mathbb{C}_S$  induisent un morphisme canonique  $\tilde{\mathbb{C}}_S \rightarrow \mathbb{C}_S$  mais ce dernier n'est pas un isomorphisme en général.

Lorsque  $Z$  est un fermé de  $X$  et  $S$  un sous-ensemble localement fermé de  $Z$ , on vérifie immédiatement que

$$\mathbb{C}_S \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z = \mathbb{C}_S.$$

Les catégories  $D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))$  possèdent un formalisme des six opérations de Grothendieck :

$$\begin{aligned} f^{-1}, f^! & : D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_Y)) \rightarrow D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \\ Rf_*, Rf_{!!} & : D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \rightarrow D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_Y)) \\ R\mathcal{H}om & : D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))^{\text{op}} \times D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \rightarrow D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \\ \otimes & : D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \times D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \rightarrow D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \end{aligned}$$

pour un morphisme d'espaces topologiques  $f : X \rightarrow Y$ . On dispose en outre d'un Hom externe à valeurs dans la catégorie dérivée bornée des faisceaux

$$R\mathcal{H}om : D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))^{\text{op}} \times D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X)) \rightarrow D^+(\mathbb{C}_X).$$

Le foncteur image inverse  $f^{-1}$  est un adjoint à gauche du foncteur image directe  $Rf_*$ . Le foncteur image directe à support propre  $Rf_{!!}$  admet pour adjoint à droite le foncteur  $f^!$ . La plupart des formules classiques dans le cadre des faisceaux possèdent leur contrepartie dans la théorie des ind-faisceaux mais certaines formules sont « nouvelles ». Nous ne les répèterons pas ici et nous renvoyons le lecteur à [87]. A titre d'exemple nous indiquons les résultats suivants :

**Proposition 1.1.3.** *Étant donné un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & \square & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

on a les isomorphismes canoniques

$$Rf_{!!} g'^{-1} = g^{-1} Rf_{!!} \quad Rf'_* g^! = g^! Rf_*$$

ainsi qu'un isomorphisme canonique

$$Rf'_{!!}g^! = g^!Rf_{!!} \quad (173)$$

*Remarque 1.1.4.* L'isomorphisme (173) n'a pas de contrepartie en théorie des faisceaux. En effet dans le cas des faisceaux, le morphisme canonique

$$Rf'_{!}g^! \rightarrow g^!Rf_{!}$$

n'est pas un isomorphisme en général.

De même la proposition suivante est un résultat propre aux ind-faisceaux.

**Proposition 1.1.5.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces topologiques,  $K$  un objet de  $D^b(\mathbb{C}_Y)$  et  $\mathcal{F}$  un objet  $D^b(I(\mathbb{C}_X))$ . On a des isomorphismes canoniques*

$$Rf_{!!}R\mathcal{H}om(f^{-1}K, \mathcal{F}) = R\mathcal{H}om(K, Rf_{!!}\mathcal{F}) \quad \text{dans } D^b(I(\mathbb{C}_Y)),$$

$$Rf_{!}R\mathcal{H}om(f^{-1}K, \mathcal{F}) = R\mathcal{H}om(K, Rf_{!}\mathcal{F}) \quad \text{dans } D^b(\mathbb{C}_Y).$$

*Remarque 1.1.6.* Soit  $Z$  un sous-ensemble fermé de  $X$  et  $i : Z \rightarrow X$ ,  $j : X \setminus Z \rightarrow X$  les inclusions naturelles. Alors si  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  appartiennent à  $D^b(I(\mathbb{C}_X))$ , on a

$$\begin{aligned} Rj_{!!}j^{-1}\mathcal{F} &= \tilde{\mathbb{C}}_{X \setminus Z} \otimes \mathcal{F} & Ri_*i^{-1}\mathcal{F} &= \mathbb{C}_Z \otimes \mathcal{F} \\ Rj_*j^{-1}\mathcal{F} &= R\mathcal{H}om(\tilde{\mathbb{C}}_{X \setminus Z}, \mathcal{F}) & Ri_*i^!\mathcal{F} &= R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_Z, \mathcal{F}) \\ Rj_*j^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{F}', \mathcal{F}) &= R\mathcal{H}om(\tilde{\mathbb{C}}_{X \setminus Z} \otimes \mathcal{F}', \mathcal{F}) \end{aligned} \quad (174)$$

Par conséquent, il n'existe pas de triangle distingué de la forme

$$Rj_{!!}j^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Ri_*i^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{+1},$$

ni de la forme

$$Ri_*i^!\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{+1},$$

En revanche, on dispose d'un triangle distingué de la forme

$$Rj_{!!}j^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z \xrightarrow{+1},$$

ainsi que d'un triangle distingué

$$R\mathcal{H}om(\tilde{\mathbb{C}}_Z, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{+1}.$$

Le foncteur  $\beta_X$  possède les propriétés suivantes.

1. Pour  $F, G$  appartenant à  $D^b(\mathbb{C}_X)$ , on a

$$\beta_X(F) \otimes \beta_X(G) = \beta_X(F \otimes G).$$

2. Pour  $f : X \rightarrow Y$ ,  $G \in D^b(\mathbb{C}_Y)$  et  $\mathcal{G} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$ , on a

$$f^{-1}\beta_Y(G) = \beta_X(f^{-1}G) \quad \text{et} \quad f^!(\mathcal{G} \otimes \beta_Y(G)) = f^!\mathcal{G} \otimes \beta_X(f^{-1}G). \quad (175)$$

3. Pour  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$  et  $K, K' \in D^b(\mathbb{C}_X)$ , on a

$$R\mathcal{H}om(K, \mathcal{F}) \otimes \beta_X(K') = R\mathcal{H}om(K, \mathcal{F} \otimes \beta_X(K')), \quad (176)$$

$$R\mathcal{H}om(K, \mathcal{F}) \otimes K' = R\mathcal{H}om(K, \mathcal{F} \otimes \beta_X(K')). \quad (177)$$

En général le foncteur  $\beta_X$  ne commute pas aux images directes. On remarquera que l'on dispose tout de même du résultat suivant qui nous sera utile par la suite :

**Lemme 1.1.7.** *Étant donné un fermé  $i : Z \hookrightarrow X$  et un objet  $F \in D^b(\mathbb{C}_Z)$ , on a un isomorphisme*

$$\beta_X(Ri_*F) \otimes \mathbb{C}_Z = Ri_*\beta_Z(F).$$

DÉMONSTRATION. — Cela résulte des isomorphismes

$$\beta_X(Ri_*F) \otimes \mathbb{C}_Z = Ri_*i^{-1}\beta_X(Ri_*F) = Ri_*\beta_Z(i^{-1}Ri_*F) = Ri_*\beta_Z(F).$$

□

Dans la suite nous utiliserons souvent la remarque suivante.

*Remarque 1.1.8.* Un morphisme  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  dans  $D^b(I(\mathbb{C}_X))$  est un isomorphisme si et seulement si pour tout point  $x$  de  $X$  les morphismes  $\mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_x \rightarrow \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_x$  sont des isomorphismes.

Nous donnons ci dessous un tableau résumant les propriétés de commutation des différents foncteurs décrits précédemment. Dans ce dernier, le symbole «  $\circ$  » signifie que les foncteurs commutent et le symbole «  $\times$  » qu'ils ne commutent pas.

	$\iota_X$	$\alpha_X$	$\beta_X$	$\varinjlim$
$\otimes$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$f^{-1}$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$Rf_*$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$
$Rf_{!!}$	$\times$	$\circ$	$\times$	$\circ$
$f^!$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\circ$
$\varinjlim$	$\times$	$\circ$	$\circ$	

Dans le tableau précédent les colimites  $\varinjlim$  sont toujours supposées filtrantes.

*Notation 1.1.9.* Étant donnée une application continue  $f : X \rightarrow Y$ , nous désignons par  $\omega_{X/Y}$  le faisceau topologique dualisant  $f^!\mathbb{C}_Y$  et nous posons  $\omega_X = \omega_{X/\{\text{pt}\}}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés différentiables, on a  $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes \omega_Y^{\otimes -1}$ .

Étant donnés trois espaces topologiques  $X_1, X_2, X_3$ ,  $K \in D^b(I(\mathbb{C}_{X_1 \times X_2}))$  et  $K' \in D^b(I(\mathbb{C}_{X_2 \times X_3}))$ , on définit le produit de convolution de  $K$  et  $K'$  par :

$$K \circ_{X_2} K' = Rp_{13!!}(p_{12}^{-1}K \otimes p_{23}^{-1}K'), \tag{178}$$

où  $p_{ij}$  désigne la projection de  $X_1 \times X_2 \times X_3$  sur le facteur  $X_i \times X_j$ . Lorsqu'il n'y aura aucun risque de confusion, nous désignerons par  $K \circ K'$  ce produit de convolution. Cette définition vérifie la relation d'associativité

$$(K \circ K') \circ K'' = K \circ (K' \circ K''),$$





sous-variété. Cette déformation s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longleftarrow & \{t \in \mathbb{R} ; t > 0\} \\
 & \uparrow & & \uparrow t & & \uparrow \\
 P_\sigma & \longrightarrow & T_Z X & \xrightarrow{s} & \tilde{X}_Z & \xleftarrow{j} & \Omega \\
 & \searrow & \downarrow \tau_Z & & \downarrow p & & \uparrow \tilde{p} \\
 & & Z & \xrightarrow{i} & X & & 
 \end{array}$$

où  $\Omega$  est l'ouvert défini par  $\Omega = \{t > 0\}$  pour le morphisme lisse naturel  $t : \tilde{X}_Z \rightarrow \mathbb{R}$  donnant le « paramètre de la déformation ». Le fibré normal  $T_Z X$  est obtenu pour une valeur nulle du paramètre.

*Remarque 1.2.4.* Dans la suite, nous considérons  $P_\sigma$  comme un sous-ensemble fermé de  $\tilde{X}_Z$  via les inclusions

$$P_\sigma \subset T_Z X \subset \tilde{X}_Z.$$

Lorsque la paire  $(X, Z)$  est décrite par un système de coordonnées locales sur  $X$  de la forme

$$(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m),$$

la variété  $\tilde{X}_Z$  a pour coordonnées locales

$$(t, \tilde{x}, z) = (t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, z_1, \dots, z_m)$$

et le morphisme  $p$  est donné par  $p(t, \tilde{x}, z) = (t\tilde{x}, z)$ .

Rappelons que le cône normal  $C_Z(A)$  d'une partie  $A$  de  $X$  est le cône fermé de  $T_Z X$  défini par :

$$C_Z(A) = T_Z X \cap \overline{p^{-1}(A) \cap \Omega}.$$

On remarquera que le morphisme  $p$  n'est pas lisse mais que le complexe dualisant relatif  $\omega_{\tilde{X}/X}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}_{\tilde{X}}[1]$ .

**Définition 1.2.5.** Soit  $(X, Z, \sigma)$  une donnée de noyaux. On définit le noyau  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X))$  par

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = R p_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \beta_X(R i_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1}).$$

*Remarque 1.2.6.* Le support de  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X)$  est contenu dans  $\mathcal{J}(\sigma)$ , autrement dit on a un isomorphisme

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{J}(\sigma)}.$$

Le comportement du noyau  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X)$  diffère complètement suivant que l'on se place en dehors ou non de l'ensemble  $\mathcal{Z}(\sigma)$  des zéros de  $\sigma$ . On a en effet

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} = \mathbb{C}_Z \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} \quad (179)$$

tandis que  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X)|_{X \setminus \mathcal{Z}(\sigma)}$  est concentré en degré  $-\mathrm{codim}(Z, X)$ .

Pour prouver ces résultats nous aurons besoin du lemme d'annulation suivant :

**Lemme 1.2.7.** Soit  $(X, Z, \sigma)$  une donnée de noyaux.

1. On a d'une part  $R p_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X}) = 0$  et d'autre part  $R p_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X}) = R i_* \omega_{Z/X}$ .

2. En considérant  $Z$  comme la section nulle de  $T_Z X \subset \tilde{X}_Z$ , on obtient

$$Rp_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z) = \tilde{\mathbb{C}}_Z.$$

3. On a  $(Rp_{!!}(\mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma})) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{Z \setminus \mathcal{Z}(\sigma)} = 0$ .

DÉMONSTRATION. — (1). Puisque le problème est de nature locale, on peut supposer que  $X$  est affine et munie d'un système de coordonnées globales  $(x, z)$  tel que  $Z = \{x = 0\}$ ,  $\tilde{X}_Z = (t, \tilde{x}, z)$  et  $p(t, \tilde{x}, z) = (t\tilde{x}, z)$ . On a alors, pour tout entier  $j$  :

$$R^j p_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X}) = R^j p_{!!} \left( \underset{R>0, \varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} \mathbb{C}_{\{0 < t \leq \varepsilon, |\tilde{x}| < R\}} \right) = \underset{R>0, \varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} R^j p_! \mathbb{C}_{\{0 < t \leq \varepsilon, |\tilde{x}| < R\}} = 0,$$

ce qui implique le premier isomorphisme. Le second isomorphisme découle directement du triangle distingué

$$Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X}) \rightarrow Rp_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X}) \rightarrow Rp_{!!} \mathbb{C}_{T_Z X} \xrightarrow{+1}$$

et de l'isomorphisme  $Rp_{!!} \mathbb{C}_{T_Z X} = Ri_* \omega_{Z/X}$ .

(2). Remarquons que l'on a des isomorphismes

$$\alpha_X \left( Rp_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z) \right) = Rp_!(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \mathbb{C}_Z) = Rp_! \mathbb{C}_Z = \mathbb{C}_Z.$$

On dispose ainsi par adjonction d'un morphisme canonique  $\tilde{\mathbb{C}}_Z \rightarrow Rp_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z)$  et il nous suffit de montrer que ce morphisme est un isomorphisme localement sur  $X$ . Avec le système de coordonnées décrit précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} R^j p_{!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_Z) &= R^j p_{!!} \left( \underset{\varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} \mathbb{C}_{\{0 \leq t \leq \varepsilon, |\tilde{x}| \leq \varepsilon\}} \right) = \underset{\varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} R^j p_! \mathbb{C}_{\{0 \leq t \leq \varepsilon, |\tilde{x}| \leq \varepsilon\}} \\ &= \begin{cases} \underset{\varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} \mathbb{C}_{\{|\tilde{x}| \leq \varepsilon^2\}} = \tilde{\mathbb{C}}_Z & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde assertion.

(3). Étant donné  $s_0 \in \mathcal{J}(\sigma) \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ , on a

$$\left( Rp_{!!}(\mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \right) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{z_0} = Rp_{!!} \left( \mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma \cap p^{-1}(z_0)} \right).$$

Posons  $\sigma(z_0) = \langle \xi_0, dx \rangle \neq 0$ . Comme

$$\mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma \cap p^{-1}(z_0)} = \underset{R>0, \varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} \mathbb{C}_{\{t=0, -\varepsilon \leq \langle \xi_0, \tilde{x} \rangle, |\tilde{x}| < R\}},$$

on a pour tout entier  $j$

$$\left( R^j p_{!!}(\mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \right) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{z_0} = \tilde{\mathbb{C}}_{z_0} \otimes \underset{R>0, \varepsilon>0}{\text{“}\lim\limits\rightarrow\text{”}} R^j p_! (\mathbb{C}_{\{t=0, -\varepsilon \leq \langle \xi_0, \tilde{x} \rangle, |\tilde{x}| < R\}}) = 0$$

et notre assertion résulte de la remarque 1.1.8. □

**Lemme 1.2.8.** *On a un morphisme naturel*

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{J}(\sigma)} \otimes \beta_X (Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1}).$$

DÉMONSTRATION. — Considérons  $\mathcal{J}(\sigma)$  comme une partie de  $\tilde{X}_Z$  via les inclusions  $\mathcal{J}(\sigma) \subset Z \subset T_Z X \subset \tilde{X}_Z$ . On a alors un morphisme naturel

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow R p_{!!} \left( \mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{J}(\sigma)} \right) \otimes \beta_X \left( Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \right).$$

On obtient alors l'isomorphisme voulu en utilisant l'assertion (2) du lemme 1.2.7.  $\square$

Le lemme suivant fournit un triangle distingué qui est très utile pour l'étude de certaines propriétés du noyau  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X)$ .

**Lemme 1.2.9.** *Il existe un triangle distingué naturel de la forme*

$$R p_{!!} \left( \mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma} \right) \otimes \beta_X \left( Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \right) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow R p_{!!} \left( \mathbb{C}_{T_Z X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma} \right) \otimes Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \xrightarrow{+1}.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'appliquer le foncteur triangulé

$$R p_{!!} \left( - \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma} \right) \otimes \beta_X \left( Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \right)$$

au triangle distingué

$$\mathbb{C}_\Omega \rightarrow \mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \rightarrow \mathbb{C}_{T_Z X} \xrightarrow{+1},$$

et d'utiliser l'isomorphisme  $\mathbb{C}_Z \otimes \beta_X \left( Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \right) = Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1}$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de justifier l'assertion (179).

**Proposition 1.2.10.** *On a*

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} = \mathbb{C}_Z \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)}.$$

En particulier, si  $\sigma = 0$  alors  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = \mathbb{C}_Z$ .

DÉMONSTRATION. — D'après la définition de  $\mathcal{Z}(\sigma)$ , le cône  $P_\sigma \times_Z \mathcal{Z}(\sigma)$  coïncide avec  $T_Z X \times_Z \mathcal{Z}(\sigma)$ . On en déduit que

$$\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma} \otimes p^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} = \mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes p^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)},$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} = R p_{!!} \left( \mathbb{C}_{\tilde{\Omega}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_Z X} \right) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} \otimes \beta_X \left( Ri_* \omega_{Z/X}^{\otimes -1} \right).$$

Le résultat se déduit alors de l'assertion (1) du lemme 1.2.7.  $\square$

**Proposition 1.2.11.** *Soit  $(X, Z, \sigma)$  une donnée de noyau. Posons  $X_0 = X \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$  et  $Z_0 = Z \setminus \mathcal{Z}(\sigma)$ . Alors, il existe un triangle distingué de la forme*

$$R j_{!!} \mathcal{L}_{\sigma_0}(Z_0, X_0) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow \mathbb{C}_Z \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} \xrightarrow{+1},$$

où  $\sigma_0$  est la restriction de  $\sigma$  à  $Z_0$  et  $j$  désigne l'immersion ouverte  $X_0 \hookrightarrow X$ .

DÉMONSTRATION. — On a le triangle distingué

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{X_0} \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)} \xrightarrow{+1}.$$

Le premier terme est isomorphe à  $R j_{!!} \mathcal{L}_{\sigma_0}(Z_0, X_0)$  et le second est isomorphe à  $\mathbb{C}_Z \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{Z}(\sigma)}$  d'après la proposition 1.2.10.  $\square$

**Corollaire 1.2.12.** *On a les morphismes naturels*

$$\mathbb{C}_Z \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{T}(\sigma)} \otimes \beta_X(Ri_*\omega_{Z/X}^{\otimes -1}).$$

DÉMONSTRATION. — Le premier morphisme est une conséquence directe de la proposition 1.2.11 et des inclusions  $P_\sigma \subset P_0 = T_Z X$ . Le second morphisme découle du lemme 1.2.8.  $\square$

**Proposition 1.2.13.** *Supposons que la section  $\sigma$  ne s'annule pas. Alors*

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \beta_X(Ri_*\omega_{Z/X}^{\otimes -1}) = \varinjlim_U \mathbb{C}_U \otimes \beta_X(Ri_*\omega_{Z/X}^{\otimes -1}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{T}(\sigma)},$$

où la limite inductive est prise sur les ouverts  $U$  de  $X$  tels que

$$P_\sigma \cap C_Z(U) \subset Z. \tag{180}$$

Ici, nous considérons  $Z$  comme la section nulle de  $T_Z X$ .

*Remarque 1.2.14.* L'ensemble des ouverts  $U$  de  $X$  vérifiant la condition (180) est un ensemble filtrant ordonné par l'inclusion.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 1.2.9 et la troisième assertion du lemme 1.2.7, on a

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \beta_X(Ri_*\omega_{Z/X}^{\otimes -1}).$$

Par conséquent, il suffit de prouver que

$$Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) = \varinjlim_U \mathbb{C}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{T}(\sigma)}.$$

Puisque l'on a  $Z \cap U = \emptyset$  sur un voisinage de  $\mathcal{T}(\sigma)$ , on en déduit que  $p^{-1}(U) \cap \Omega = p^{-1}(U) \cap \bar{\Omega}$  est un sous-ensemble fermé de  $\Omega$ , ce qui nous donne des morphismes naturels :

$$p^{-1}(\mathbb{C}_U) = \mathbb{C}_{p^{-1}(U)} \rightarrow \mathbb{C}_{p^{-1}(U) \cap \Omega} \rightarrow \mathbb{C}_\Omega \rightarrow \mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}.$$

Comme  $\overline{p^{-1}(U) \cap \Omega} \cap P_\sigma = C_Z(U) \cap P_\sigma$  est contenu dans la section nulle de  $T_Z X$ , le support de  $p^{-1}\mathbb{C}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}$  est propre sur  $Z$ . On a ainsi des morphismes naturels

$$\mathbb{C}_U \rightarrow p_*(p^{-1}\mathbb{C}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) = p_{!!}(p^{-1}\mathbb{C}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \rightarrow p_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma})$$

qui fournissent un morphisme naturel

$$\varinjlim_U \mathbb{C}_U \rightarrow Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}).$$

En appliquant le produit tensoriel, on obtient le morphisme

$$\varinjlim_U \mathbb{C}_U \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{T}(\sigma)} \rightarrow Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}). \tag{181}$$

Nous allons maintenant montrer que ce morphisme est un isomorphisme. Pour cela, il suffit d'après la remarque 1.1.8 de prouver que (181) est un isomorphisme après tensorisation par  $\tilde{\mathbb{C}}_{x_0}$  où  $x_0$  est un point quelconque de  $\mathcal{T}(\sigma)$ . Prenons un système de coordonnées locales  $(x, z)$  de  $X$  tel que  $Z = \{x = 0\}$ . On peut supposer que  $x_0 = (0, 0)$  et poser  $\sigma(x_0) = \langle \xi_0, dx \rangle$ . On a alors

$$Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} = Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{p^{-1}(x_0)}) = Rp_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma \cap p^{-1}(x_0)}),$$

ainsi que

$$\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma \cap p^{-1}(x_0)} = \varinjlim_{V \subset \subset \tilde{X}_Z, P_\sigma \cap p^{-1}(x_0) \subset V'} \mathbb{C}_{\Omega \cap V \cap \bar{V}'} = \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{R > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0} \mathbb{C}_{A_{R, \varepsilon_1, \varepsilon_2}},$$

où on a posé

$$A_{R,\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \left\{ (t, \tilde{x}, z) \in \tilde{X}_Z : 0 < t \leq \varepsilon_1, -\varepsilon_2 \leq \langle \xi_0, \tilde{x} \rangle, |\tilde{x}| < R \right\}.$$

Par conséquent, on a pour tout entier  $j$

$$R^j p_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} = \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{R>0, \varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0} R^j p_{!!} \mathbb{C}_{A_{R,\varepsilon_1,\varepsilon_2}}.$$

Cependant, on a

$$\begin{aligned} p^{-1}((x, z)) &= \{t \in \mathbb{R} : 0 < t \leq \varepsilon_1, -\varepsilon_2 \leq \langle \xi_0, t^{-1}x \rangle, |t^{-1}x| < R\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : R^{-1}|x| < t \leq \varepsilon_1, -\varepsilon_2^{-1}\langle \xi_0, x \rangle \leq t\} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$R^j p_{!!} \mathbb{C}_{A_{R,\varepsilon_1,\varepsilon_2}} = \mathbb{C}_{\{R^{-1}|x| < -\varepsilon_2^{-1}\langle x, \xi_0 \rangle \leq \varepsilon_1\}}$$

En prenant la limite, on peut utiliser un argument de cofinalité pour obtenir

$$R^j p_{!!}(\mathbb{C}_\Omega \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_\sigma}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} = \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon>0} \mathbb{C}_{\{(x,z) \in X : \langle \xi_0, x \rangle > \varepsilon|x|\}}$$

On déduit alors aisément le résultat du lemme ci-dessous. □

**Lemme 1.2.15.** 1. Soit  $U = \{(x, z) \in X : \varepsilon|x| < -\langle \xi_0, x \rangle\}$ . Alors  $P_\sigma \cap C_Z(U) \subset Z$ .  
2. Soit  $U \subset X$  un ouvert tel que  $P_\sigma \cap C_Z(U) \subset Z$ . Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$U \cap \{|(x, z)| \leq \delta\} = \{(x, z) \in X : -\langle x, \xi_0 \rangle > \varepsilon|x|\}.$$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.16.** Soit  $(X, Z, \sigma)$  une donnée noyau. Supposons que  $X$  soit muni d'un système de coordonnées  $(x, z)$  tel que  $Z = \{x = 0\}$  et que  $\sigma$  soit une section ne s'annulant pas. Alors, en écrivant  $\sigma(z) = \langle \sigma_1(z), dx \rangle + \langle \sigma_2(z), dz \rangle$ , on a

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = \tilde{\mathbb{C}}_{\{x=0, \sigma_2(z)=0\}} \otimes \varinjlim_{\varepsilon>0} \mathbb{C}_{\{(x,z) : -\langle \sigma_1(z), x \rangle > \varepsilon|x|\}} [\text{codim } Z].$$

*Remarque 1.2.17.* On a un isomorphisme

$$\alpha_X(\mathcal{L}_\sigma(Z, X)) = \mathbb{C}_{Z(\sigma)}.$$

D'autre part lorsque  $(X, Z, \sigma_1), (X, Z, \sigma_2)$  sont des données de noyau et  $W$  une partie fermée de  $Z$  telle que sur  $W$  on ait  $\sigma_1 = \sigma_2$ , on a

$$\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_W = \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_W,$$

puisque  $P_{\sigma_1} \cap \tau_Z^{-1}W = P_{\sigma_2} \cap \tau_Z^{-1}W$ .

### 1.3. Propriétés fonctorielles

Dans cette section nous étudions les propriétés de functorialités des noyaux microlocaux  $\mathcal{L}_\sigma(Z, X)$  par rapport aux images inverses, aux images directes propres et par rapport à la convolution.

**Définition 1.3.1.** Soient  $(X_1, Z_1, \sigma_1)$  et  $(X_2, Z_2, \sigma_2)$  des données de noyau. Nous appellerons morphisme de données de noyau un morphisme de variétés  $f : X_1 \rightarrow X_2$  vérifiant  $f(Z_1) \subset Z_2$  et  $\sigma_1 = f^*\sigma_2$ .

Supposons que  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  soit un morphisme de données de noyau. Les conditions de la définition 1.3.1 nous permettent d'écrire les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} T_{Z_1}^* X_1 \xleftarrow{fd} T_{Z_2}^* X_2 \times_{Z_2} Z_1 \xrightarrow{f\pi} T_{Z_2}^* X_2 & & \tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}_2 \xrightarrow{t} \mathbb{R} \\ \sigma_1 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ \mathcal{T}(\sigma_1) \longleftarrow \mathcal{T}(\sigma_2) \times_{Z_2} Z_1 \longrightarrow \mathcal{T}(\sigma_2) & & & & X_1 \xrightarrow{f} X_2 \end{array}$$

dans lesquels  $\tilde{X}_i$  désigne la déformation normale de  $Z_i$  dans  $X_i$ . Dans la suite nous désignons par  $\iota_k : Z_k \hookrightarrow X_k$  l'inclusion naturelle. On peut remarquer que

$$P_{\sigma_1} \times_{X_2} \mathcal{T}(\sigma_2) = \tilde{f}^{-1}(P_{\sigma_2}). \quad (182)$$

*Remarque 1.3.2.* Pour la définition des morphismes « clean » nous renvoyons le lecteur à la définition 4.1.5 de [84].

**Proposition 1.3.3.** Soit  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  un morphisme de données de noyau. Supposons que  $Z_1 = f^{-1}(Z_2)$  et que le morphisme  $f : X_1 \rightarrow X_2$  soit « clean » par rapport à  $Z_2$ . Alors, il existe un morphisme naturel

$$f^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) \rightarrow \mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) \otimes \beta_{X_1}(Ri_{1*}\omega_{Z_1/Z_2}) \otimes \omega_{X_1/X_2}^{\otimes -1} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f^{-1}\mathcal{T}(\sigma_2)}.$$

DÉMONSTRATION. — Puisque  $f$  est « clean », le morphisme  $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2 \times_{X_2} X_1$  est un plongement fermé et il existe un morphisme de foncteur  $f^{-1}Rp_{2!!} \rightarrow Rp_{1!!}\tilde{f}^{-1}$  qui induit un morphisme naturel

$$\begin{aligned} f^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) &= f^{-1}Rp_{2!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_2} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_{\sigma_2}}) \otimes f^{-1}\beta_{X_2}(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \\ &\rightarrow Rp_{1!!}\tilde{f}^{-1}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_2} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_{\sigma_2}}) \otimes f^{-1}\beta_{X_2}(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \\ &= Rp_{1!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_1} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\tilde{f}^{-1}(P_{\sigma_2})}) \otimes \beta_{X_1}(f^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \end{aligned} \quad (183)$$

En utilisant (182), on dispose d'un morphisme

$$f^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) \rightarrow Rp_{1!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_1} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{P_{\sigma_1}}) \otimes f^{-1}(\tilde{\mathbb{C}}_{\mathcal{T}(\sigma_2)}) \otimes \beta_{X_1}(f^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \quad (184)$$

Par conséquent, pour obtenir le morphisme voulu, il suffit de remarquer que

$$f^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1} = Ri_{1*}(\omega_{Z_1/X_1}^{\otimes -1} \otimes \omega_{Z_1/Z_2} \otimes i_1^{-1}\omega_{X_1/X_2}^{\otimes -1}) = Ri_{1*}\omega_{Z_1/X_1}^{\otimes -1} \otimes Ri_{1*}\omega_{Z_1/Z_2} \otimes \omega_{X_1/X_2}^{\otimes -1}.$$

□

Par adjonction, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.4.** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a un morphisme naturel*

$$\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) \rightarrow Rf_* \left( \mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) \otimes \beta_{X_1}(Ri_{1*}\omega_{Z_1/Z_2}) \otimes \omega_{X_1/X_2}^{\otimes -1} \otimes f^{-1}\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{J}(\sigma_2)} \right).$$

**Proposition 1.3.5.** *Soit  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  un morphisme de données de noyau. Supposons que  $f^{-1}(Z_2) = Z_1$  et que  $f$  soit transverse à  $Z_2$ . On a un isomorphisme naturel*

$$f^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(X_2, Z_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\sigma_1}(X_1, Z_1).$$

DÉMONSTRATION. — En effet, lorsque  $f$  est transverse à  $Z_2$ , le morphisme  $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2 \times_{X_2} X_1$  est un isomorphisme et  $Z_1 \cap f^{-1}(\mathcal{J}(\sigma_2)) = \mathcal{J}(\sigma_1)$ . Cela entraîne que les morphismes (183) et (184) sont des isomorphismes. L'assertion résulte alors de l'isomorphisme  $\omega_{Z_1/Z_2} = i_1^{-1}\omega_{X_1/X_2}$ .  $\square$

**Proposition 1.3.6.** *Soit  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  un morphisme de données de noyau. Alors, on a un morphisme naturel*

$$Rf_{!!} \left( \mathcal{L}_{\sigma_1}(X_1, Z_1) \otimes \beta_{X_1}(Ri_{1*}\omega_{Z_2/Z_1}) \right) \rightarrow \mathcal{L}_{\sigma_2}(X_2, Z_2).$$

DÉMONSTRATION. — Le membre de gauche est isomorphe à

$$\begin{aligned} & Rf_{!!} \left( Rp_{1!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_1} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}}) \otimes \beta_{X_1}(Ri_{1*}\omega_{Z_1/X_1}^{\otimes -1}) \otimes \beta_{X_1}(Ri_{1*}\omega_{Z_1/Z_2}) \right) \\ &= Rf_{!!} \left( Rp_{1!!}(\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_1} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}}) \otimes \omega_{X_1/X_2} \otimes \beta_{X_1}(f^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \right) \\ &= Rf_{!!}Rp_{1!!} \left( (\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_1} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}}) \otimes p_1^{-1}\omega_{X_1/X_2} \right) \otimes \beta_{X_2}(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \quad (185) \\ &= Rp_{2!!}R\tilde{f}_{!!} \left( \tilde{f}^{-1}\mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_2} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes p_1^{-1}\omega_{X_1/X_2} \right) \otimes \beta_{X_2}(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}) \\ &= Rp_{2!!} \left( \mathbb{C}_{\tilde{\Omega}_2} \otimes R\tilde{f}_{!!}(\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}) \right) \otimes \beta_{X_2}(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de construire un morphisme

$$R\tilde{f}_{!!} \left( \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \right) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_2}} \quad (186)$$

ou d'une manière équivalente par adjonction, un morphisme  $\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \rightarrow \tilde{f}^!\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_2}}$ . Cependant, d'après (182), on a

$$\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1} \times_{X_2} \mathcal{J}(\sigma_2)} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} = \tilde{f}^{-1}\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_2}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} = \tilde{f}^!\tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_2}},$$

où le dernier isomorphisme provient de (175).  $\square$

**Corollaire 1.3.7.** *Soit  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  un morphisme de données de noyau. Supposons que  $f$  soit lisse et induise un isomorphisme de  $Z_1$  sur  $Z_2$ . Alors, on a un isomorphisme naturel*

$$Rf_{!!}\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2).$$

DÉMONSTRATION. — Par hypothèse, on a  $\mathcal{J}(\sigma_2) \times_{Z_2} Z_1 = \mathcal{J}(\sigma_1)$ . D'après (185), il suffit de prouver que (186) est un isomorphisme. Puisque  $P_{\sigma_1} = \tilde{f}^{-1}(P_{\sigma_2})$ , on a

$$R\tilde{f}_{!!} \left( \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_1}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \right) = \tilde{\mathcal{C}}_{P_{\sigma_2}} \otimes R\tilde{f}_{!!} \left( \tilde{\mathcal{C}}_{T_{Z_1}X_1} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \right).$$

On se trouve ainsi ramené à prouver l'isomorphisme

$$R\tilde{f}_{!!} \left( \tilde{\mathcal{C}}_{T_{Z_1}X_1} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} \right) = \tilde{\mathcal{C}}_{T_{Z_2}X_2}.$$



Puisque  $f$  est lisse, on peut prendre des systèmes de coordonnées locales  $(x, z)$  sur  $X_2$  et  $(x, y, z)$  sur  $X_1$  tels que  $Z_2 = \{x = 0\}$  et  $Z_1 = \{x = 0, y = 0\}$  et que  $f$  s'obtienne par projection. En prenant les systèmes de coordonnées correspondants  $(t, \tilde{x}, z)$  sur  $\tilde{X}_2$  et  $(t, \tilde{x}, \tilde{y}, z)$  sur  $\tilde{X}_1$ , le morphisme  $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  est donné par  $(t, \tilde{x}, \tilde{y}, z) \rightarrow (t, \tilde{x}, z)$ . On vérifie alors facilement que

$$R\tilde{f}_!!(\tilde{\mathbb{C}}_{T_{Z_1}X_1} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}) = R\tilde{f}_!!(\tilde{\mathbb{C}}_{\{t=0\}} \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}) = \tilde{\mathbb{C}}_{\{t=0\}}.$$

□

**Lemme 1.3.8.** *Soient  $(X, Z, \sigma)$  une donnée de noyau sur  $X$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme lisse qui induit une immersion fermée  $Z \hookrightarrow Y$ . Supposons que  $\sigma(x) \notin T_{f(x)}^*Y$  pour tout  $x \in \mathcal{T}(\sigma)$ . Alors, on a*

$$Rf_!!\mathcal{L}_\sigma(Z, X) = 0.$$

DÉMONSTRATION. — Fixons un point  $x_0 \in \mathcal{T}(\sigma)$ . Prenons un système de coordonnées locales  $(y, z) = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$  de  $Y$  au voisinage de  $f(x_0)$  tel que  $f(Z)$  soit donné par  $y = 0$ . On peut alors prendre un système de coordonnées locales  $(t, x, y, z)$  sur  $X$  au voisinage de  $x_0$  tel que  $Z$  est donnée par  $\{t = 0, x = 0, y = 0\}$  et  $\sigma(x_0) = -dt(x_0)$ . Dans ce cas on a

$$\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} = \left( \varinjlim_{\delta > 0, \varepsilon > 0} \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}} \right) \otimes \beta_X(Ri_*\omega_{Z/X}^{\otimes -1}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0},$$

où l'on a posé

$$F_{\delta, \varepsilon} = \{(t, x, y, z) : \delta \geq t \geq \varepsilon(|x| + |y|)\}.$$

Il s'ensuit que les isomorphismes

$$(Rf_!!\mathcal{L}_\sigma(Z, X)) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(x_0)} = Rf_!!(\mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0}) = 0$$

sont une conséquence du fait que  $R^j f_!(\mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}}) = 0$  pour tout  $j$  dans  $\mathbb{Z}$ . □

**Proposition 1.3.9.** *Soit  $f : (X_1, Z_1, \sigma_1) \rightarrow (X_2, Z_2, \sigma_2)$  un morphisme de données de noyau. Supposons que  $f$  soit une immersion fermée et induise un isomorphisme  $Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_2$ . Alors, il existe un morphisme naturel*

$$\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) \xrightarrow{\sim} f^!\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2).$$

DÉMONSTRATION. — Puisque  $f$  est une immersion fermée, on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xleftarrow{p_1} & \tilde{X}_1 & \xleftarrow{j_1} & \Omega_1 & & T_{Z_1}X_1 & \xrightarrow{s_1} & \tilde{X}_1 \\ \parallel & & \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow & & \downarrow T_{Z_1}f & & \downarrow \tilde{f} \\ Z_2 & \xrightarrow{i_2} & X_2 & \xleftarrow{p_2} & \tilde{X}_2 & \xleftarrow{j_2} & \Omega_2 & & T_{Z_2}X_2 & \xrightarrow{s_2} & \tilde{X}_2 \end{array}$$

Sous nos hypothèse la counité de l'adjonction nous donne un isomorphisme  $f^!Rf_!! = \text{id}$ . Par conséquent, il suffit de construire un isomorphisme

$$Rf_!!\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) \xrightarrow{\sim} Rf_!!f^!\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2).$$

En remarquant que

$$Rf_!!f^!\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) = R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{X_1}, \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2)).$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
Rf_{!!}f^!\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X_2) &= R\mathcal{H}om\left(\mathbb{C}_{X_1}, Rp_{2!!}\left(\mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes \beta_{\tilde{X}_2}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_2}} \otimes p_2^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}\right)\right)\right) \\
&= Rp_{2!!}\mathcal{H}om\left(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes \beta_{\tilde{X}_2}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_2}} \otimes p_2^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}\right)\right) \\
&= Rp_{2!!}\left(\mathcal{H}om\left(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2}\right) \otimes \beta_{\tilde{X}_2}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_2}} \otimes p_2^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité  $P_{\sigma_1} = \tilde{f}^{-1}P_{\sigma_2}$  entraîne que

$$\begin{aligned}
Rf_{!!}\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X_1) &= Rf_{!!}Rp_{1!!}\left(\mathbb{C}_{\overline{\Omega}_1} \otimes \beta_{\tilde{X}_1}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_1}} \otimes p_1^{-1}Ri_{1*}\omega_{Z_1/X_1}^{\otimes -1}\right)\right) \\
&= Rp_{2!!}R\tilde{f}_{!!}\left(\mathbb{C}_{\tilde{f}^{-1}(\overline{\Omega}_2)} \otimes \beta_{\tilde{X}_1}\left(\tilde{f}^{-1}\mathbb{C}_{P_{\sigma_1}} \otimes \tilde{f}^{-1}p_2^{-1}Rs_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1} \otimes p_1^{-1}\omega_{X_1/X_2}\right)\right) \\
&= Rp_{2!!}R\tilde{f}_{!!}\left(\tilde{f}^{-1}\left(\mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes \beta_{\tilde{X}_2}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_2}} \otimes p_2^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}\right)\right) \otimes \omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}\right) \\
&= Rp_{2!!}\left(\mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes \beta_{\tilde{X}_2}\left(\mathbb{C}_{P_{\sigma_2}} \otimes p_2^{-1}Ri_{2*}\omega_{Z_2/X_2}^{\otimes -1}\right) \otimes R\tilde{f}_{!!}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}\right),
\end{aligned}$$

et il suffit de prouver que

$$R\mathcal{H}om\left(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2}\right) = \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes R\tilde{f}_{!!}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}.$$

Cependant, on a les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}
R\mathcal{H}om(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2}) &= R\mathcal{H}om(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, Rj_{2*}\mathbb{C}_{\Omega_2}) \\
&= R\mathcal{H}om(j_2^{-1}p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\Omega_2}) = Rj_{2*}R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Omega_1}, \mathbb{C}_{\Omega_2}).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a, en tant qu'objet de  $D^b(I(\mathbb{C}_{\Omega_2}))$ ,

$$R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Omega_1}, \mathbb{C}_{\Omega_2}) = j_2^{-1}R\tilde{f}_{*}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2},$$

ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned}
R\mathcal{H}om(p_2^{-1}\mathbb{C}_{X_1}, \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2}) &= Rj_{2*}j_2^{-1}R\tilde{f}_{*}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}, \\
&= Rj_{2*}\mathbb{C}_{\Omega_2} \otimes R\tilde{f}_{*}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2} = \mathbb{C}_{\overline{\Omega}_2} \otimes R\tilde{f}_{!!}\omega_{\tilde{X}_1/\tilde{X}_2}.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.3.10.** *Soient  $(X, Z_1, \sigma_1)$  et  $(X, Z_2, \sigma_2)$  deux données noyaux sur une même variété de base  $X$ . Supposons que  $Z_1$  et  $Z_2$  soient des sous-variétés transverses. Alors, il existe un morphisme naturel*

$$\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \rightarrow \mathcal{L}_{\sigma_1+\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2)}.$$

DÉMONSTRATION. — Dans la démonstration nous utilisons les notations suivantes,  $Z = Z_1 \cap Z_2$ ,  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  et  $N = \mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2) \subset \mathcal{J}(\sigma) \subset Z$ .

Supposons d'abord que  $\sigma_1(x)$  et  $\sigma_2(x)$  soient deux vecteurs linéairement indépendants de  $T^*X$  pour tout  $x$  appartenant à  $Z$ . Dans ce cas, on a

$$\mathcal{L}_{\sigma_k}(Z_k, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N = \varinjlim_{U_k} \mathbb{C}_{U_k} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N \otimes \beta_X(Ri_{k*}\omega_{Z_k/X}^{\otimes -1}),$$

la colimite formelle étant prise sur les ouverts  $U_k$  de  $X$  tels que  $C_{Z_k}(U_k) \cap P_{\sigma_k} \subset Z_k$ . Pour de tels ouverts  $U_1$  et  $U_2$ , on a

$$C_Z(U_1 \cap U_2) \cap (P_\sigma \times_Z N) \subset Z,$$

puisque l'on a  $P_\sigma \times_Z N \subset P_{\sigma_1} \cup P_{\sigma_2}$ . Par conséquent, on obtient un morphisme naturel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N \\ &= \left( \varinjlim_{U_1} \mathcal{C}_{U_1} \otimes \beta_X \left( Ri_{1*} \omega_{Z_1/X}^{\otimes -1} \right) \right) \otimes \left( \varinjlim_{U_2} \mathcal{C}_{U_2} \otimes \beta_X \left( Ri_{2*} \omega_{Z_2/X}^{\otimes -1} \right) \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N \\ &\rightarrow \left( \varinjlim_U \mathcal{C}_U \right) \otimes \beta_X \left( Ri_{1*} \omega_{Z_1/X}^{\otimes -1} \right) \otimes \beta_X \left( Ri_{2*} \omega_{Z_2/X}^{\otimes -1} \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N, \end{aligned}$$

où  $U$  décrit l'ensemble des ouverts de  $X$  tels que  $C_Z(U) \cap (P_\sigma \times_Z N) \subset Z$ . Puisque  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des sous-variétés transverses de  $X$ , on a

$$\omega_{Z/X}^{\otimes -1} = (\omega_{Z_1/X}^{\otimes -1}|_Z) \otimes (\omega_{Z_2/X}^{\otimes -1}|_Z).$$

Par conséquent, on obtient

$$\left( \varinjlim_U \mathcal{C}_U \right) \otimes \beta \left( Ri_{1*} \omega_{Z_1/X}^{\otimes -1} \right) \otimes \beta \left( Ri_{2*} \omega_{Z_2/X}^{\otimes -1} \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N = \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N,$$

ce qui fournit le morphisme voulu.

Considérons maintenant le cas général. Posons  $\mathbb{A}_X^n = X \times \mathbb{R}^n$  pour  $n = 1, 2$ . Nous utilisons les coordonnées  $(x, t_1, t_2)$  sur  $\mathbb{A}_X^2$ . On considère la variété  $\mathbb{A}_{Z_k}^1$  comme une sous-variété de  $\mathbb{A}_X^2$  par

$$\mathbb{A}_{Z_k}^1 := \{(x, t_1, t_2) : x \in Z_k, t_k = 0\}$$

et  $\mathbb{A}_X^1$  comme la sous-variété  $\{t_2 = 0\}$  de  $\mathbb{A}_X^2$ . On identifie  $Z$  avec la sous-variété

$$\mathbb{A}_{Z_1}^1 \cap \mathbb{A}_{Z_2}^1 = \{(x, t_1, t_2) : x \in Z, t_1 = t_2 = 0\}.$$

On obtient ainsi les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{i'} & \mathbb{A}_X^2 \\ \uparrow & & \uparrow & \text{tr} & \uparrow j_1 \\ Z & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{Z_1}^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{i'} & \mathbb{A}_X^2 \\ \uparrow & & \uparrow & \text{tr} & \uparrow j_2 \\ Z & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{Z_2}^1 \end{array}$$

où  $j_1(z, t) = (z_1, 0, t)$  et  $j_2(z_2, t) = (z_2, t, 0)$ . On remarquera que les carrés indiqués par tr sont transverses. On définit des sections en posant

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 + dt_1 : \mathbb{A}_{Z_1}^1 \rightarrow T^* \mathbb{A}_X^2,$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 + dt_2 : \mathbb{A}_{Z_2}^1 \rightarrow T^* \mathbb{A}_X^2,$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + dt_1 + dt_2 : Z \rightarrow T^* \mathbb{A}_X^2.$$

Les sections  $\tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_2$  sont linéairement indépendantes et en utilisant le cas précédemment traité on obtient un morphisme

$$\mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_1}(\mathbb{A}_{Z_1}^1, \mathbb{A}_X^2) \otimes \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_2}(\mathbb{A}_{Z_2}^1, \mathbb{A}_X^2) \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}}(Z, \mathbb{A}_X^2) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N.$$

A l'aide des propositions 1.3.5 et 1.3.9, on obtient les morphismes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) &= i^! \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_1}(Z_1, \mathbb{A}_X^1) \otimes i^{-1} \mathcal{L}_{\sigma_2}(\mathbb{A}_{Z_2}^1, \mathbb{A}_X^1) \\
&\rightarrow i^! (\mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_1}(Z_1, \mathbb{A}_X^1) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(\mathbb{A}_{Z_2}^1, \mathbb{A}_X^1)) \\
&= i^! (i'^{-1} \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_1}(\mathbb{A}_{Z_1}^1, \mathbb{A}_X^2) \otimes i'^! \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_2}(\mathbb{A}_{Z_2}^1, \mathbb{A}_X^2)) \\
&\rightarrow i^! i'^! (\mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_1}(\mathbb{A}_{Z_1}^1, \mathbb{A}_X^2) \otimes \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}_2}(\mathbb{A}_{Z_2}^1, \mathbb{A}_X^2)) \\
&\rightarrow i^! i'^! (\mathcal{L}_{\tilde{\sigma}}(Z, \mathbb{A}_X^2) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N) = \mathcal{L}_{\sigma}(Z, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

*Remarque 1.3.11.* Nous donnons sans démonstrations les assertions suivantes :

1. Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont linéairement indépendants, alors les deux morphismes construits dans la proposition précédente coïncident.
2. Si  $(X, Z_2, \sigma_3)$  est une troisième donnée de noyau telle que  $(Z_1, Z_2)$ ,  $(Z_1, Z_3)$  et  $(Z_2, Z_3)$  soient transverses dans  $X$  et que  $(Z_1 \cap Z_3, Z_2 \cap Z_3)$  soient transverses dans  $Z_3$ , alors, en posant  $N = \mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2) \cap \mathcal{J}(\sigma_3)$ , le diagramme ci dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_3}(Z_3, X) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\sigma_1+\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_3}(Z_3, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2+\sigma_3}(Z_2 \cap Z_3, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N,
\end{array}$$

c'est-à-dire que les morphismes de « composition » de la proposition 1.3.10 sont associatifs.

**Lemme 1.3.12.** Soient  $(X, Z_1, \sigma_1)$ ,  $(X, Z_2, \sigma_2)$  des données de noyau sur  $X$ . Supposons que  $Z_1$  et  $Z_2$  soient des sous-variétés transverses de  $X$  et que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ne s'annulent pas. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme lisse qui induit un plongement fermé  $Z_1 \cap Z_2 \hookrightarrow Y$ . Supposons vérifiée la condition

$$\left( \mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_1(x) + \mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_2(x) \right) \cap T_{f(x)}^* Y = \{0\} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2)$$

dans laquelle  $T_{f(x)}^* Y$  est considéré comme un sous-espace de  $T_x^* X$  via le morphisme  $f_d$ . Alors, on a

$$Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X)) = 0.$$

DÉMONSTRATION. — D'après la remarque 1.1.8, il s'agit de vérifier que pour tout point  $x_0$  de  $\mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2)$ , on a

$$Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) = 0.$$

On peut se ramener au cas où  $X$  est de dimension relative 1 sur  $Y$ . En effet supposons que l'assertion soit vraie pour les morphismes de dimension relative 1. Posons  $E = T_{x_0}(f^{-1}f(x_0))$ . Par hypothèse,  $E$  vérifie  $(\mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_1(x) + \mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_2(x)) \cap E^\perp = \{0\}$ . Par conséquent, il existe une droite  $\ell \subset E$  telle que  $(\mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_1(x) + \mathbb{R}_{\geq 0} \sigma_2(x)) \cap \ell^\perp = \{0\}$ . On peut décomposer  $f$  au voisinage de  $x_0$  sous la forme d'une composée de morphismes lisses

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} Y$$

tels que  $g$  et  $h$  sont lisses et  $T_{x_0}(g^{-1}g(x_0)) = \ell$ . Alors  $g$  vérifie les conditions du lemme et est de dimension relative 1. Notre hypothèse nous assure donc que  $Rg_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) = 0$ , ce qui implique le résultat attendu.

Supposons maintenant que  $f$  soit de dimension relative 1. Comme  $\sigma_k(x_0) \notin T_{f(x_0)}^*Y$ , l'application  $Z_k \rightarrow Y$  est un plongement (local) et  $T_{x_0}Z_k = f_*^{-1}(T_{f(x_0)}Z'_k) \cap \sigma(x_0)^{-1}(0)$ , où  $Z'_k := f(Z_k) \subset Y$ . On voit que  $Z'_1$  et  $Z'_2$  sont transverses et que  $f(Z_1 \cap Z_2)$  est une hypersurface  $Z'_1 \cap Z'_2$  puisque

$$\begin{aligned} \text{codim}(f(Z_1 \cap Z_2), Y) &= \text{codim}(Z_1 \cap Z_2, X) - 1 = \text{codim}(Z_1, X) + \text{codim}(Z_2, X) - 1 \\ &= \text{codim}(Z'_1, Y) + \text{codim}(Z'_2, Y) + 1 = \text{codim}(Z'_1 \cap Z'_2, Y) + 1. \end{aligned}$$

Sachant que  $T_{x_0}(Z_1 \cap Z_2) = f_*^{-1}(T_{f(x_0)}(Z'_1 \cap Z'_2)) \cap \sigma_1(x_0)^{-1}(0) \cap \sigma_2(x_0)^{-1}(0)$ , les vecteurs  $\sigma_1(x_0)$  et  $\sigma_2(x_0)$  sont linéairement indépendants. En multipliant par une constante positive, on peut supposer de plus que

$$\sigma_1(x_0) - \sigma_2(x_0) \in T_{f(x_0)}^*Y \setminus \{0\}.$$

Prenons un système de coordonnées locales  $(t, y_1, y_2, z)$  de  $Y$  tel que

$$Z'_k = \{y_k = 0\} \text{ et } \sigma_2(x_0) - \sigma_1(x_0) = dt.$$

Prenons maintenant un système de coordonnées locales  $(x, t, y_1, y_2, z)$  de  $X$  tel que  $\sigma_1(x_0) = -dx$  (ce qui donne aussi  $\sigma_2(x_0) = dt - dx$ ) et  $Z_1 = \{y_1 = 0, x = 0\}$  et  $f$  est donnée en oubliant  $x$ . Posons  $Z_2 = \{y_2 = 0, x = \varphi(t, y_1, z)\}$ . Alors, en substituant  $\varphi(t, y_1, z)$  à  $t$ , on peut supposer depuis le début

$$Z_2 = \{y_2 = 0, x = t\}, \quad Z_1 \cap Z_2 = \{y_1 = 0, y_2 = 0, x = t = 0\}.$$

On a alors

$$\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0} = \varinjlim_{\delta > 0, \varepsilon > 0} (\mathbb{C}_{U_{\delta, \varepsilon}^1} \otimes \mathbb{C}_{U_{\delta, \varepsilon}^2}) \otimes \beta_X(Ri_{1*}\omega_{Z_1/X}^{\otimes -1} \otimes Ri_{2*}\omega_{Z_2/X}^{\otimes -1}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0},$$

où les ouverts  $U_{\delta, \varepsilon}^k$  sont donnés par

$$U_{\delta, \varepsilon}^1 = \{\varepsilon|y_1| < x \leq \delta\} \text{ et } U_{\delta, \varepsilon}^2 = \{\varepsilon|y_2| < x - t \leq \delta\}.$$

On a donc

$$U_{\delta, \varepsilon}^1 \cap U_{\delta, \varepsilon}^2 = \{\max(\varepsilon|y_1|, \varepsilon|y_2|) + t < x \leq \min(\delta, \delta + t)\}.$$

Et le résultat se déduit du fait que

$$Rf_! \left( \mathbb{C}_{U_{\delta, \varepsilon}^1 \cap U_{\delta, \varepsilon}^2} \right) = 0.$$

□

**Proposition 1.3.13.** Soient  $(X, Z_1, \sigma_1)$ ,  $(X, Z_2, \sigma_2)$  des données de noyau sur  $X$  et  $(Y, Z, \sigma)$  une donnée de noyau sur  $Y$ . Supposons que  $Z_1$  et  $Z_2$  soient des sous-variétés transverses de  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme lisse qui induit un isomorphisme  $Z_1 \cap Z_2 \xrightarrow{\sim} Z$ . Soit  $N$  une partie fermée de  $\mathcal{T}(\sigma_1) \cap \mathcal{T}(\sigma_2)$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\mathcal{Z}(\sigma_1) \cap \mathcal{Z}(\sigma_2) \subset N$ ,
2.  $f^*\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$  pour tout  $x \in N$ ,
3.  $\sigma_1(x) \notin T_{f(x)}^*Y$  pour tout  $x \in N \setminus (\mathcal{Z}(\sigma_1) \cup \mathcal{Z}(\sigma_2))$ ,
4.  $(\mathbb{R}_{\geq 0}\sigma_1(x) + \mathbb{R}_{\geq 0}\sigma_2(x)) \cap T_{f(x)}^*Y = \{0\}$  pour tout  $x \in (\mathcal{T}(\sigma_1) \cap \mathcal{T}(\sigma_2)) \setminus N$ ,
5. le morphisme  $Z_k \rightarrow Y$  est lisse en tout point de  $\mathcal{Z}(\sigma_k)$  pour  $k = 1, 2$ .

Alors, il existe un isomorphisme naturel

$$Rf_!(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\sigma}(Z, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(N)}.$$

DÉMONSTRATION. — Le morphisme recherché est obtenu par la composition suivante :

$$\begin{aligned} Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X)) &\rightarrow Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1+\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N) \\ &= Rf_{!!}(\mathcal{L}_{f^*\sigma}(Z_1 \cap Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_N) \rightarrow \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(N)}. \end{aligned}$$

En utilisant la remarque 1.1.8, il suffit de vérifier que ce morphisme induit des isomorphismes

$$Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(N)} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(x_0)}$$

pour tout  $x_0 \in \mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2)$ .

— Supposons tout d'abord que l'on ait  $\sigma_1(x_0) = \sigma_2(x_0) = 0$ . D'après l'hypothèse (1) le point  $x_0$  appartient à  $N$ , ce qui donne  $\sigma(f(x_0)) = 0$  en utilisant l'hypothèse (2). La proposition 1.2.10 assure alors que

$$\begin{aligned} Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) &= Rf_{!!}(\mathbb{C}_{Z_1} \otimes \mathbb{C}_{Z_2} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) \\ &= \mathbb{C}_Z \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(x_0)} = \mathcal{L}_\sigma(Z, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(N)} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(x_0)} \end{aligned}$$

et l'assertion se trouve vérifiée dans ce cas.

— Supposons maintenant que  $\sigma_1(x_0) = 0$  et  $\sigma_1(x_0) \neq 0$ . En utilisant la proposition 1.2.10 on obtient cette fois

$$\begin{aligned} Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) &= Rf_{!!}(\mathbb{C}_{Z_1} \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}) \\ &= Rf_{!!}i_{1!!}i_1^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(x_0)}, \end{aligned}$$

où  $i_1$  désigne l'inclusion de  $Z_1$  dans  $X$ . D'après la proposition 1.3.5 on a  $i_1^{-1}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) = \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, Z_1)$ . L'hypothèse (5) assure que le morphisme de  $Z_1$  dans  $Y$  est lisse au voisinage de  $x_0$ . Lorsque  $x_0$  appartient à  $N$ , le corollaire 1.3.7 et l'hypothèse (2) entraînent que

$$Rf_{!!}i_{1!!}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, Z_1) = \mathcal{L}_\sigma(Z, Y)$$

au voisinage de  $x_0$ . Nous pouvons donc supposer que  $x$  appartient à  $(\mathcal{J}(\sigma_1) \cap \mathcal{J}(\sigma_2)) \setminus N$ . Dans ce cas l'hypothèse (4) implique que  $\sigma_2(x_0) \notin T_{f(x_0)}^*Y$  et il suffit d'appliquer le lemme 1.3.8 pour obtenir

$$Rf_{!!}i_{1!!}\mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_1 \cap Z_2, Z_1) = 0.$$

Cela prouve l'assertion dans le cas considéré.

— Nous sommes ainsi ramener à supposer que  $\sigma_1(x_0) \neq 0$  et  $\sigma_2(x_0) \neq 0$ . Lorsque  $x_0$  n'appartient pas à  $N$ , le résultat découle de l'hypothèse (4) et du lemme 1.3.12. Nous pouvons donc supposer que  $x_0$  appartient à  $N$ .

Comme lors de la démonstration de lemme 1.3.12, nous pouvons nous ramener au cas où  $X$  est de dimension relative 1 sur  $Y$ . En effet supposons que notre assertion soit vraie dans le cas où la dimension relative est égale à 1. Posons  $E = T_{x_0}(f^{-1}f(x_0))$  et fixons une droite  $\ell \subset E$  telle que  $\sigma_1(x_0)|_\ell \neq 0$ . On peut alors décomposer le morphisme  $f$  au voisinage de  $x_0$  sous la forme d'une composée de morphismes lisses

$$X \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} Y$$

vérifiant  $T_{x_0}(g^{-1}g(x_0)) = \ell$ . Le morphisme  $g$  vérifie les conditions (1) à (4) et en appliquant le cas de la dimension relative 1 à  $g$ , on obtient

$$Rf_{!!}(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X)) = Rh_{!!}\mathcal{L}_{h^*\sigma}(g(Z_1 \cap Z_2), Y') = \mathcal{L}_\sigma(Z, Y),$$

où le dernier isomorphisme est obtenu grâce au corollaire 1.3.7.

Considérons donc le cas où la dimension relative de  $X$  sur  $Y$  est égale à 1. D'après l'hypothèse (3), le morphisme de  $Z_k$  dans  $Y$  est un plongement au voisinage de  $x_0$  et  $T_{x_0}Z_k = f_*^{-1}(T_{f(x_0)}Z'_k) \cap \sigma_k(x_0)^{-1}(0)$  où  $Z_k = f(Z'_k)$ . On voit alors que  $Z_1$  et  $Z'_2$  sont des sous-variétés transverses de  $Y$  et que  $Z$  est une sous-variété de codimension 1 de  $Z' := Z'_1 \cap Z'_2$ . On a

$$\sigma(f(x_0)) \notin T_{Z'}^*Y.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} T_{x_0}(Z_1 \cap Z_2) &= f_*^{-1}(T_{f(x_0)}Z') \cap \sigma_1(x_0)^{-1}(0) \cap \sigma_2(x_0)^{-1}(0) \\ &= f_*^{-1}\left(T_{f(x_0)}Z' \cap \sigma(f(x_0))^{-1}(0)\right) \cap \sigma_1(x_0)^{-1}(0), \end{aligned}$$

ce qui implique  $T_{f(x_0)}Z = T_{f(x_0)}Z' \cap \sigma(f(x_0))^{-1}(0) \neq T_{f(x_0)}Z'$ . Cela permet de prendre des coordonnées locales  $(t, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^n$  sur  $Y$  telles que  $\sigma(f(x_0)) = -dt(f(x_0))$  et  $Z'_k = \{y_k = 0\}$ . En utilisant l'hypothèse (3), on peut alors choisir un système de coordonnées  $(x, t, y_1, y_2, z)$  sur  $X$  tel que le morphisme  $f$  soit la projection obtenue en oubliant  $x$ , l'on ait  $\sigma_1(x_0) = -dx(x_0)$  (on a donc aussi  $\sigma_2(x_0) = dx(x_0) - dt(x_0)$ ), ainsi que  $Z_1 = \{y_1 = 0, x = 0\}$ . Posons  $Z_2 = \{y_2 = 0, x = \varphi(t, y_1, z)\}$ . Quitte à remplacer  $\varphi(t, y_1, z)$  par  $t$ , on peut supposer depuis le début que

$$Z_2 = \{y_2 = 0, x = t\} \text{ et } Z = \{y_1 = 0, y_2 = 0, t = 0\}.$$

En utilisant le corollaire 1.2.16, on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} &= \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^1} \otimes \beta_X(Ri_{1*}\omega_{Z_1/X}^{\otimes -1}), \\ \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} &= \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^2} \otimes \beta_X(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X}^{\otimes -1}), \end{aligned}$$

où les ouverts  $U_\varepsilon^k$  sont donnés par

$$U_\varepsilon^1 = \{\varepsilon|y_1| < x\} \text{ et } U_\varepsilon^2 = \{\varepsilon|y_2| < t - x\}.$$

Cela nous assure que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} &= \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2} \otimes \beta_X(Ri_{1*}\omega_{Z_1/X}^{\otimes -1}) \otimes \beta_X(Ri_{2*}\omega_{Z_2/X}^{\otimes -1}) \\ &= \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2} \otimes \beta_X(f^{-1}Ri_*\omega_{Z/Y}^{\otimes -1}) \otimes \omega_{X/Y}^{\otimes -1}. \end{aligned}$$

Le fait que la dimension relative de  $X$  sur  $Y$  soit 1, entraîne que  $\omega_{X/Y}^{\otimes -1} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0} = \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}[1]$  et on en déduit un isomorphisme

$$\begin{aligned} Rf_{!!}\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{x_0}\right) &= Rf_{!!}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{x_0} \otimes \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2} \otimes \omega_{X/Y}\right) \otimes \beta_Y Ri_*\omega_{Z/Y}^{\otimes -1} \\ &= Rf_{!!}\left(\varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2}\right)[1] \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{f(x_0)} \otimes \beta_Y Ri_*\omega_{Z/Y}^{\otimes -1}. \end{aligned}$$

Puisque  $U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2 = \{\varepsilon|y_1| < x < t - \varepsilon|y_2|\}$ , on a

$$Rf_!(\mathbb{C}_{U_\varepsilon^1 \cap U_\varepsilon^2}) = \mathbb{C}_{\{\varepsilon(|y_1|+|y_2|)<t\}}[-1].$$

On en déduit finalement que

$$\begin{aligned} Rf_!!\left(\mathcal{L}_{\sigma_1}(Z_1, X) \otimes \mathcal{L}_{\sigma_2}(Z_2, X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{x_0}\right) &= \left(\varinjlim_{\varepsilon>0} \mathbb{C}_{\{\varepsilon(|y_1|+|y_2|)<t\}}\right) \otimes \beta_Y Ri_* \omega_{Z/Y}^{\otimes -1} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(x_0)} \\ &= \mathcal{L}_\sigma(Z, Y) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(x_0)} \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 1.3.14.** *Soient  $X_1, X_2, X_3$  des variétés et pour tout  $1 \leq i < j \leq 3$  des données de noyau  $(X_i \times X_j, Z_{ij}, \sigma_{ij})$ . Supposons que  $Z_{12} \times X_3$  et  $X_1 \times Z_{23}$  soient transverses dans  $X_1 \times X_2 \times X_3$  et que les projections  $p_{ij} : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_i \times X_j$  induisent un isomorphisme  $Z_{12} \times_{Z_2} Z_{23} \xrightarrow{\sim} Z_{13}$ . Notons  $p_2 : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_2$  la seconde projection et  $p_{2*} : T^*(X_1 \times X_2 \times X_3) \rightarrow T^*X_2$  la projection induite. On se donne une partie fermée  $N \subset \mathcal{T}(\sigma_{12}) \times_{X_2} \mathcal{T}(\sigma_{23})$  vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $\mathcal{Z}(\sigma_{12}) \times_{X_2} \mathcal{Z}(\sigma_{23}) \subset N$ ,
- (ii)  $p_{13}^* \sigma_{13}(x) = p_{12}^* \sigma_{12}(x) + p_{23}^* \sigma_{23}(x)$  pour tout  $x \in N$ ,
- (iii)  $p_{2*} \sigma_{12}(x) \notin T_{X_2}^* X_2$  pour tout  $x \in N \setminus (\mathcal{Z}(\sigma_{12}) \times X_3 \cup X_1 \times \mathcal{Z}(\sigma_{23}))$ ,
- (iv)  $\mathbb{R}_{\geq 0} p_{2*} \sigma_{12}(x) \neq \mathbb{R}_{\leq 0} p_{2*} \sigma_{23}(x)$  pour tout  $x \in (\mathcal{T}(\sigma_{12}) \times_{X_2} \mathcal{T}(\sigma_{23})) \setminus N$ ,
- (v) le morphisme  $Z_{12} \rightarrow X_1$  est lisse en tout point de  $\mathcal{Z}(\sigma_{12})$  et le morphisme  $Z_{23} \rightarrow X_3$  est lisse en tout point de  $\mathcal{Z}(\sigma_{23})$ .

Alors, on a un isomorphisme

$$\mathcal{L}_{\sigma_{12}}(Z_{12}, X_1 \times X_2) \circ \mathcal{L}_{\sigma_{23}}(Z_{23}, X_2 \times X_3) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\sigma_{13}}(Z_{13}, X_1 \times X_3) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(N)}.$$

DÉMONSTRATION. — La proposition 1.3.5, assure que

$$\begin{aligned} p_{12}^{-1} \mathcal{L}_{\sigma_{12}}(Z_{12}, X_1 \times X_2) &= \mathcal{L}_{p_{12}^* \sigma_{12}}(Z_{12} \times X_3, X_1 \times X_2 \times X_3), \\ p_{23}^{-1} \mathcal{L}_{\sigma_{23}}(Z_{23}, X_2 \times X_3) &= \mathcal{L}_{p_{23}^* \sigma_{23}}(X_1 \times Z_{23}, X_1 \times X_2 \times X_3), \end{aligned}$$

et il suffit alors d'appliquer la proposition 1.3.13 pour obtenir

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{\sigma_{12}}(Z_{12}, X_1 \times X_2) \circ \mathcal{L}_{\sigma_{23}}(Z_{23}, X_2 \times X_3) \\ &= Rp_{13}!!\left(\mathcal{L}_{p_{12}^* \sigma_{12}}(Z_{12} \times X_3, X_1 \times X_2 \times X_3) \otimes \mathcal{L}_{p_{23}^* \sigma_{23}}(X_1 \times Z_{23}, X_1 \times X_2 \times X_3)\right) \\ &= \mathcal{L}_{\sigma_{13}}(Z_{13}, X_1 \times X_3) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{f(N)} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.  $\square$



## CHAPITRE 2

### MICROLOCALISATION DES IND-FAISCEAUX

#### 2.1. Le noyau $K_{\mathfrak{X}}$ de l'ind-microlocalisation

Dans ce chapitre nous construisons le noyau de microlocalisation en utilisant les méthodes du chapitre précédent à partir de la 1-forme fondamentale  $\omega_X$  de  $T^*X$ . Puisque la construction n'utilise qu'une 1-forme, nous allons nous intéresser plus généralement aux variétés symplectiques homogènes. Une *variété symplectique homogène* est une variété  $\mathfrak{X}$  de dimension paire munie d'une 1-forme  $\omega_{\mathfrak{X}}$  telle que  $(d\omega_{\mathfrak{X}})^{\dim \mathfrak{X}/2}$  ne s'annule jamais. Un résultat classique assure qu'il existe un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  tel que l'on ait localement

$$d\omega_{\mathfrak{X}} = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i \quad (187)$$

lorsque  $\omega_{\mathfrak{X}}$  ne s'annule pas.

Notons  $p_i : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  ( $i = 1, 2$ ) la projection sur le  $i$ -ème facteur. Alors  $\sigma_{\mathfrak{X}} = p_1^* \omega_{\mathfrak{X}} - p_2^* \omega_{\mathfrak{X}}$  donne une section de  $T_{\Delta_{\mathfrak{X}}}^*(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$  sur la diagonale  $\Delta_{\mathfrak{X}}$ .

**Définition 2.1.1.** Le noyau de microlocalisation est le noyau défini sur  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  par

$$K_{\mathfrak{X}} = \mathcal{L}_{\sigma_{\mathfrak{X}}}(\Delta_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}) \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}})).$$

Le lemme suivant montre que  $K_{\mathfrak{X}}$  est une sorte de projecteur.

**Lemme 2.1.2.** *Il existe un morphisme naturel*

$$\varepsilon_{\mathfrak{X}} : \mathbb{C}_{\Delta_{\mathfrak{X}}} \rightarrow K_{\mathfrak{X}}$$

tel que les compositions

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{X}} &= K_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{C}_{\Delta_{\mathfrak{X}}} \xrightarrow{K_{\mathfrak{X}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{X}}} K_{\mathfrak{X}} \circ K_{\mathfrak{X}}, \\ K_{\mathfrak{X}} &= \mathbb{C}_{\Delta_{\mathfrak{X}}} \circ K_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{X}} \circ K_{\mathfrak{X}}} K_{\mathfrak{X}} \circ K_{\mathfrak{X}}, \end{aligned}$$

soient des isomorphismes et que ces deux isomorphismes coïncident.

**DÉMONSTRATION.** — On a construit le morphisme  $\varepsilon_{\mathfrak{X}}$  dans le corollaire 1.2.12. La deuxième assertion se déduit aisément de la proposition 1.3.14. La dernière assertion est une conséquence du lemme 2.1.3 ci-dessous. □

**Lemme 2.1.3.** Soient  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur et  $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow F$  un morphisme de foncteurs. Supposons que pour tout objet  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  les morphismes

$$\alpha_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(F(X)) \quad F(\alpha_X) : F(X) \rightarrow F(F(X))$$

soient des isomorphismes. Alors

1. pour tout  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , la composition avec  $\alpha_X$  définit une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(Y)),$$

2.  $\alpha_{F(X)} = F(\alpha_X)$  pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

**Lemme 2.1.4.** Étant données deux variétés symplectiques homogènes  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$ , on a

$$K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} \circ (K_{\mathfrak{X}} \boxtimes K_{\mathfrak{Y}}) = K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} \quad \text{et} \quad K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} \circ K_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}}.$$

DÉMONSTRATION. — Le dernier isomorphisme s'obtient en appliquant la proposition 1.3.14 à  $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}, \mathfrak{X})$  et le premier se déduit du second puisque l'on a

$$K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} \circ (K_{\mathfrak{X}} \boxtimes K_{\mathfrak{Y}}) = (K_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} \circ K_{\mathfrak{X}}) \circ K_{\mathfrak{Y}}.$$

□

Considérons maintenant une variété  $X$  et posons  $\mathfrak{X} := T^*X$ . Alors  $\mathfrak{X}$  possède une structure canonique de variété symplectique homogène. Le foncteur de (ind)-microlocalisation est défini par :

$$\mu_X : D^b(\mathbb{C}_X) \rightarrow D^b(\mathbb{C}_{T^*X}) \quad ; \quad \mathcal{F} \mapsto \mu_X \mathcal{F} := K_{\mathfrak{X}} \circ \pi_X^{-1} \mathcal{F}.$$

La proposition suivante montre que le foncteur de microlocalisation  $\mu_X$  peut être vu comme une transformation intégrale associée à un noyau  $L_X \in D^b(\mathbb{C}_{T^*X \times X})$  qui s'avère souvent plus utile que  $K_{\mathfrak{X}}$ .

**Définition 2.1.5.** On définit le noyau  $L_X \in D^b(\mathbb{C}_{T^*X \times X})$  par

$$L_X = \mathcal{L}_{\sigma_X}(T^*X \times_X X, T^*X \times X),$$

où la section  $\sigma_X$  est induite par  $\omega_X$  sur le premier facteur et par  $-\text{id}$  sur le second.

*Remarque 2.1.6.* Soit  $(x; \xi)$  un système de coordonnées sur  $T^*X$ . Alors  $\sigma_X$  est défini par

$$\sigma_X(x; \xi) = ((x, \xi; \xi, 0), (x, -\xi)) \in T^*\mathfrak{X} \times T^*\mathfrak{X}.$$

De plus,  $\mathcal{J}(\sigma_X) = T^*X \times_X X$ .

**Proposition 2.1.7.** Soit  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$ . Il existe un isomorphisme canonique

$$\mu_X \mathcal{F} = L_X \circ \mathcal{F}.$$

DÉMONSTRATION. — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T^*X \times T^*X & & \\
 & & \downarrow q & \searrow p_2 & \\
 & p_1 & & & T^*X \\
 & & T^*X \times X & & \downarrow \pi_X \\
 & & \swarrow p'_1 & \searrow p'_2 & X \\
 T^*X & & & & 
 \end{array} \tag{188}$$

Puisque  $q$  vérifie les hypothèses du corollaire 1.3.7, on a l'isomorphisme  $Rq_{!!}K_{\mathfrak{X}} = L_X$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} L_X \circ \mathcal{F} &= Rp'_{1!!} \left( Rq_{!!}K_{\mathfrak{X}} \otimes p_2'^{-1}\mathcal{F} \right) = Rp'_{1!!} Rq_{!!} (K_{\mathfrak{X}} \otimes q^{-1}p_2'^{-1}\mathcal{F}) \\ &= Rp_{1!!} (K_{\mathfrak{X}} \otimes p_2^{-1}\pi_X^{-1}\mathcal{F}) = K_{\mathfrak{X}} \circ \pi_X^{-1}\mathcal{F} = \mu_X \mathcal{F}. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant se déduit immédiatement du lemme 2.1.2.

**Lemme 2.1.8.** *Étant donné  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$ , on a*

$$K_{T^*X} \circ \mu_X \mathcal{F} = \mu_X \mathcal{F}.$$

*Exemple 2.1.9.* Donnons maintenant un exemple simple de calcul de microlocalisation. Soit  $Z \subset X$  une sous-variété fermée. En remarquant que  $\mathbb{C}_Z = \mathcal{L}_0(Z, X)$ , il suffit d'appliquer la proposition 1.3.14 au triplet  $(T^*X, X, \text{pt})$  avec  $N = T^*X \times_X Z$ , pour obtenir

$$\mu_X(\mathbb{C}_Z) = \mathcal{L}_{\omega_Z}(T^*X \times_X Z, T^*X).$$

On remarquera que le support de  $\mu_X(\mathbb{C}_Z)$  est le fibré conormal  $T_Z^*X$  de  $Z$  dans  $X$ . Prenons alors un système de coordonnées locales  $(x, z)$  de  $X$  tel que la sous-variété  $Z$  soit donnée par  $Z = \{x = 0\}$ . Notons les coordonnées correspondantes sur  $T^*X$  par  $(x, z, \xi, \zeta)$ . Alors sur  $T^*X$ , on a

$$\mu_X(\mathbb{C}_Z) = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{\{-(\xi, x) > \varepsilon|x|\}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\{x=0, \zeta=0\}}[\text{codim } Z].$$

On a par ailleurs

$$\mu_X(\tilde{\mathbb{C}}_Z) = \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X \times_X Z}. \quad (189)$$

**Lemme 2.1.10.** *Soit  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_{T^*X}))$ . Alors*

$$(K_{T^*X} \circ \mathcal{F}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} = \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X}.$$

*En particulier, si  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$  alors*

$$\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} = \pi_X^{-1} \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X}.$$

DÉMONSTRATION. — Avec les notations utilisées dans (188), on a d'après la proposition 1.2.10 un isomorphisme :

$$K_{T^*X} \otimes p_1^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} = \mathbb{C}_{\Delta_{T^*X}} \otimes p_1^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X}.$$

Par conséquent, on a pour  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_{T^*X}))$

$$\begin{aligned} (K_{T^*X} \circ \mathcal{F}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} &= Rp_{1!!} (K_{T^*X} \otimes p_2^{-1}\mathcal{F}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} = Rp_{1!!} \left( K_{T^*X} \otimes p_1^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} \otimes p_2^{-1}\mathcal{F} \right) \\ &= Rp_{1!!} \left( \mathbb{C}_{\Delta_{T^*X}} \otimes p_1^{-1} \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} \otimes p_2^{-1}\mathcal{F} \right) = Rp_{1!!} \left( \mathbb{C}_{\Delta_{T^*X}} \otimes p_2^{-1}\mathcal{F} \right) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X} \\ &= \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T_X^*X}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

*Remarque 2.1.11.* Le ind-faisceau  $\mu_X \mathcal{F}$  est conique au sens où il est équivariant sous l'action de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $T^*X$ . On ne développera pas ici la théorie des ind-faisceaux coniques et nous ne donnerons que les conséquences qui nous suffisent dans notre contexte. On a, pour tout  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_X))$ , l'isomorphisme suivant :

$$\mu_X \mathcal{F}|_{\dot{T}^*X} = \gamma^{-1} R\gamma_* \mu_X \mathcal{F}|_{\dot{T}^*X}.$$

où  $S^*X$  désigne le fibré sphérique associé à  $T^*X$  et  $\gamma : \dot{T}^*X \rightarrow S^*X$  la projection naturelle. Le noyau  $L_X$  possède des propriétés similaires.

**Lemme 2.1.12.** *Soient  $X$  une variété réelle et  $\pi_E : E \rightarrow X$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Désignons par  $SE$  le fibré sphérique associé à  $E$  et par*

$$j : \dot{E} \hookrightarrow E \quad p : \dot{E} \rightarrow SE$$

les morphismes naturels. Soit  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_E))$  tel qu'il existe  $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_{SE}))$  tel que l'on ait  $j^{-1}\mathcal{F} = p^{-1}\mathcal{G}$ . Les assertions suivantes sont satisfaites.

1.  $R\pi_{E*} Rj_!! j^{-1}\mathcal{F} = 0$ .
2.  $R\pi_{E*}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R\pi_{E!!}(\tilde{\mathbb{C}}_X \otimes \mathcal{F})$ , où  $X$  est identifié à la section nulle de  $E$ .
3. Il existe un triangle distingué

$$R\dot{\pi}_{E!!} j^{-1}\mathcal{F} \rightarrow R\pi_{E!!} \mathcal{F} \rightarrow R\pi_{E*} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}.$$

DÉMONSTRATION. — Désignons par  $E_X$  l'éclatement réel de  $E$  le long de  $X$  identifié à la section nulle. On a  $E_X = (\dot{E} \times \mathbb{R}_{\geq 0})/\mathbb{R}_{>0}$ , et par conséquent  $E_X = \dot{E} \sqcup SE$  en tant qu'ensemble. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \dot{E} & \xrightarrow{i} & E_X & \xrightarrow{q} & SE \\ & \searrow j & \downarrow \pi_{E_X} & & \downarrow \pi_{SE} \\ & & E & \xrightarrow{\pi_E} & X \end{array}$$

où  $\pi_{E_X}$  et  $\pi_{SE}$  sont propres. Nous allons tout d'abord montrer que

$$Rq_* R\dot{i}_!! j^{-1}\mathcal{F} = 0. \quad (190)$$

Puisque  $q$  est localement trivial de fibre  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , on a

$$q^! \mathcal{G} = q^{-1} \mathcal{G} \otimes q^! \mathbb{C}_{SE} = q^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{i(\dot{E})}[1].$$

On en déduit que

$$Rq_* \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) = Rq_* R\mathcal{H}om \left( \mathbb{C}_{E_X}[1], q^! \mathcal{G} \right) = R\mathcal{H}om \left( Rq_!! \mathbb{C}_{E_X}[1], \mathcal{G} \right) = 0$$

puisque  $Rq_!! \mathbb{C}_{E_X} = 0$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Rq_* \left( \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} / \tilde{\mathbb{C}}_{i(\dot{E})} \right) \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) &= Rq_!! \left( \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} / \tilde{\mathbb{C}}_{i(\dot{E})} \right) \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) \\ &= Rq_!! \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} / \tilde{\mathbb{C}}_{i(\dot{E})} \right) \otimes \mathcal{G} = 0. \end{aligned}$$

On déduit le résultat souhaité du triangle distingué

$$Rq_* \left( \tilde{\mathbb{C}}_{i(\dot{E})} \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) \rightarrow Rq_* \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) \rightarrow Rq_* \left( \left( \mathbb{C}_{i(\dot{E})} / \tilde{\mathbb{C}}_{i(\dot{E})} \right) \otimes q^{-1} \mathcal{G} \right) \xrightarrow{+1},$$

dans lequel le premier terme est isomorphe à  $Rq_* Ri_{!!} j^{-1} \mathcal{F}$ .

(1). En remarquant que l'on a les isomorphismes

$$\begin{aligned} R\pi_{E^*} Rj_{!!} j^{-1} \mathcal{F} &= R\pi_{E^*} R\pi_{E_X!!} Ri_{!!} j^{-1} \mathcal{F} \\ &= R\pi_{E^*} R\pi_{E_X^*} Ri_{!!} j^{-1} \mathcal{F} = R\pi_{SE^*} Rq_* Ri_{!!} j^{-1} \mathcal{F}, \end{aligned}$$

il suffit d'utiliser l'isomorphisme (190).

(2). En appliquant le foncteur  $R\pi_{E^*}(- \otimes \mathcal{F})$  au triangle distingué

$$\tilde{\mathbb{C}}_{\dot{E}} \rightarrow \mathbb{C}_E \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_X \xrightarrow{+1}, \quad (191)$$

on obtient le triangle distingué

$$R\pi_{E^*}(\tilde{\mathbb{C}}_{\dot{E}} \otimes \mathcal{F}) \rightarrow R\pi_{E^*} \mathcal{F} \rightarrow R\pi_{E^*}(\tilde{\mathbb{C}}_X \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{+1},$$

dans lequel le premier terme s'annule d'après (1).

(3). En appliquant le foncteur  $R\pi_{E!!}(- \otimes \mathcal{F})$  au triangle distingué (191), on obtient le triangle distingué

$$R\pi_{E!!}(\tilde{\mathbb{C}}_{\dot{E}} \otimes \mathcal{F}) \rightarrow R\pi_{E!!} \mathcal{F} \rightarrow R\pi_{E!!}(\tilde{\mathbb{C}}_X \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{+1},$$

dans lequel le premier terme est isomorphe à  $R\dot{\pi}_{E!!} j^{-1} \mathcal{F}$  et le dernier à  $R\pi_{E^*} \mathcal{F}$  d'après (2).  $\square$

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))$ . Les assertions suivantes sont satisfaites.*

1.  $R\pi_{X^*} \mu_X \mathcal{F} = \mathcal{F}$ .
2.  $R\pi_{X!!} \mu_X \mathcal{F} = \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{F}$ .
3.  $R\dot{\pi}_{X!!}(\mu_X \mathcal{F}|_{\dot{T}^* X}) = (\mathbb{C}_{X \times X \setminus \Delta_X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X}) \circ \mathcal{F}$ .
4. On a le triangle distingué naturel

$$R\dot{\pi}_{X!!}(\mu_X \mathcal{F}|_{\dot{T}^* X}) \rightarrow R\pi_{X!!} \mu_X \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{+1}.$$

DÉMONSTRATION. — Remarquons tout d'abord que l'assertion (4) se déduit immédiatement du lemme 2.1.12 et de l'assertion (1). Il reste donc à vérifier les trois premières assertions.

(1). D'après le lemme 2.1.12, on a

$$R\pi_{X^*} \mu_X \mathcal{F} = R\pi_{X^*}(\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^* X}) = R\pi_{X!!}(\pi_X^{-1} \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^* X}) = \mathcal{F} \otimes R\pi_{X!!} \tilde{\mathbb{C}}_{T^* X} = \mathcal{F},$$

où le second isomorphisme provient du lemme 2.1.10.

(2) et (3). Désignons par  $p : T^* X \times X \rightarrow X \times X$  le morphisme canonique. On a alors, les isomorphismes

$$\begin{aligned} R\pi_{X!!} \mu_X \mathcal{F} &= (Rp_{!!} L_X) \circ \mathcal{F} \\ R\dot{\pi}_{X!!}(\mu_X \mathcal{F}|_{\dot{T}^* X}) &= (Rp_{!!}(L_X \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\dot{T}^* X \times X})) \circ \mathcal{F}, \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour prouver les assertions (2) et (3), il suffit de vérifier que

$$Rp_{!!} L_X = \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X}, \quad (192)$$

$$Rp_{!!}(L_X \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\dot{T}^* X \times X}) = \mathbb{C}_{X \times X \setminus \Delta_X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \quad (193)$$

Le morphisme naturel donné dans le corollaire 1.2.12

$$L_X \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \otimes \beta_{T^*X \times_X X} \left( \omega_{T^*X \times_X X/T^*X \times_X X}^{\otimes -1} \right) = p^! \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X}$$

fournit un morphisme  $Rp_{!!} L_X \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X}$ . Montrons tout d'abord (193). Prenons un système de coordonnées locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sur  $X$  et notons  $((x; \xi), x')$  les coordonnées locales associées sur  $T^*X \times X$ . On a

$$\begin{aligned} L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} &= \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{\{((x; \xi), x') : \langle \xi, x' - x \rangle > \varepsilon |x - x'| \}} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \otimes \beta \left( Ri_* \omega_{T^*X \times_X X/T^*X \times_X X}^{\otimes -1} \right) \\ &= \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{\{((x; \xi), x') : \langle \xi, x' - x \rangle > \varepsilon |x - x'| \}} \otimes p^{-1} \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X} [n]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$Rp_{!!} \left( L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) = Rp_{!!} \left( \varinjlim_{\varepsilon > 0, R > 0} \mathbb{C}_{\{((x; \xi), x') : \langle \xi, x' - x \rangle > \varepsilon |x - x'|, |\xi| < R \}} \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X} [n].$$

Pour  $0 < \varepsilon < R$ , on a

$$R^k p_! \left( \mathbb{C}_{\{((x; \xi), x') : \langle \xi, x' - x \rangle > \varepsilon |x - x'|, |\xi| < R \}} \right) = \begin{cases} \mathbb{C}_{\{0 < |x' - x| < \varepsilon^{-1} R\}} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$Rp_{!!} \left( L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) = \mathbb{C}_{X \times X \setminus \Delta_X} [-n] \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X} [n] = \mathbb{C}_{X \times X \setminus \Delta_X} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X},$$

ce qui prouve (193). Considérons le morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccc} Rp_{!!} \left( L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) & \longrightarrow & Rp_{!!} (L_X) & \longrightarrow & Rp_{!!} \left( L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_{X \times X \setminus \Delta_X} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{C}}_{\Delta_X} & \longrightarrow & \mathbb{C}_{\Delta_X} \xrightarrow{+1} \cdot \end{array}$$

D'après (193) la flèche verticale gauche est un isomorphisme et la flèche verticale droite est un isomorphisme puisque l'on a

$$Rp_{!!} \left( L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) = Rp_{!!} \left( \mathbb{C}_{T^*X \times_X X} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) = \mathbb{C}_{\Delta_X} \otimes Rp_{!!} \left( \tilde{\mathcal{C}}_{T^*X \times_X X} \right) = \mathbb{C}_{\Delta_X}.$$

L'isomorphisme (192) s'en déduit, ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 2.1.14.** *Étant donnés  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))$  et  $\mathcal{G} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_Y))$ , on a un isomorphisme*

$$\mu_{X \times Y} (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = K_{T^*(X \times Y)} \circ (\mu_X \mathcal{F} \boxtimes \mu_Y \mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. — C'est une conséquence directe du lemme 2.1.4.  $\square$

**2.2. Le lien entre  $\mu hom$  et la microlocalisation classique**

**Proposition 2.2.1.** Soient  $\sigma \in \Gamma(X, \Omega_X^1)$  et  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^b(\mathbb{C}_X)$ . Alors, on a un isomorphisme

$$\sigma^{-1} \mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}}(\Delta_X, X \times X) \circ \mathcal{G}),$$

où  $\tilde{\sigma} = q_1^* \sigma - q_2^* \sigma$  avec  $q_k : X \times X \rightarrow X$ , la projection sur le  $k$ -ième facteur.

DÉMONSTRATION. — Par définition, on a

$$\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\wedge,$$

où  $\nu hom$  est la spécialisation du foncteur  $R\mathcal{H}om$  et  $(-)^^\wedge$  est la transformation de Fourier-Sato. En posant

$$P' = \left\{ ((x; \xi), (x; v)) \in T^*X \times_X TX : \langle \xi, v \rangle \leq 0 \right\},$$

la transformation de Fourier-Sato est la transformation intégrale par le noyau  $\mathbb{C}_{P'}$ . Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 TX & & \\
 \pi_2 \uparrow & \swarrow \text{id}_{TX} & \\
 T^*X \times_X TX & \xleftarrow{\sigma'} & TX \\
 \pi_1 \downarrow & \square & \downarrow \tau_X \\
 T^*X & \xleftarrow{\sigma} & X.
 \end{array} \tag{194}$$

On a alors  $\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\wedge = R\pi_{1!}(\pi_2^{-1} \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathbb{C}_{P'})$ . Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \sigma^{-1} \mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sigma^{-1} R\pi_{1!}(\pi_2^{-1} \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathbb{C}_{P'}) \\
 &= R\tau_{X!} \sigma'^{-1}(\pi_2^{-1} \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathbb{C}_{P'}) = R\tau_{X!}(\nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathbb{C}_{P'_\sigma})
 \end{aligned}$$

où on a posé  $P'_\sigma = \sigma'^{-1}(P') = \{(x, v) \in TX : \langle \sigma(x), v \rangle \leq 0\}$ . Considérons le diagramme de déformation normale de  $\Delta_X$  dans  $X \times X$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 TX & \xrightarrow{\sim} & T_{\Delta_X}(X \times X) & \xrightarrow{s} & \widetilde{X \times X} & \xleftarrow{j} & \Omega \\
 \downarrow \tau_X & & \downarrow i & & \downarrow p & \swarrow \tilde{p} & \\
 X & \xrightarrow{i} & X \times X & & X \times X & & \\
 & \searrow \text{id}_X & & & \downarrow q_1, q_2 & & \\
 & & & & X & & 
 \end{array}$$

Par définition  $\nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  est donné par  $s^{-1} Rj_* \tilde{p}^{-1} R\mathcal{H}om(q_2^{-1} \mathcal{F}, q_1^! \mathcal{G})$ . Puisque le morphisme  $\tilde{p}$  est lisse on a

$$\tilde{p}^{-1} R\mathcal{H}om(q_2^{-1} \mathcal{F}, q_1^! \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\tilde{p}^{-1} q_2^{-1} \mathcal{F}, \tilde{p}^{-1} q_1^! \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(j^{-1} p_2^{-1} \mathcal{F}, j^{-1} p^{-1} q_1^! \mathcal{G}).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= s^{-1} Rj_* R\mathcal{H}om(j^{-1} p_2^{-1} \mathcal{F}, j^{-1} p_1^{-1} q_1^! \mathcal{G}) = s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, Rj_* j^{-1} p_1^{-1} q_1^! \mathcal{G}) \\ &= s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, Rj_* j^{-1} p_1^{-1} \mathcal{G}) \otimes \tau_X^{-1} \omega_X. \end{aligned}$$

Puisque  $p_1$  est lisse, on a l'estimation

$$\text{SS}(p_1^{-1} \mathcal{G}) \cap \text{SS}(\mathbb{C}_\Omega) \subset (p_1)_\pi^{-1}(T^* X) \cap \left( T_{T_{\Delta_X}(X \times X)}^* \widetilde{X \times X} \cup T_{\widetilde{X \times X}}^* \widetilde{X \times X} \right) \subset T_{\widetilde{X \times X}}^* \widetilde{X \times X},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} Rj_* j^{-1} p_1^{-1} \mathcal{G} &= R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_\Omega, p_1^{-1} \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_\Omega, \mathbb{C}_X) \otimes p_1^{-1} \mathcal{G} \\ &= \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes p_1^{-1} \mathcal{G}. \end{aligned}$$

En appliquant ceci, on obtient

$$\begin{aligned} \nu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}}) \otimes \tau_X^{-1} \omega_X \\ &= s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}}) \otimes \tau_X^{-1} \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1}, \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= R\tau_{X!} (s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}}) \otimes \tau_X^{-1} \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \otimes \mathbb{C}_{P'_\sigma}) \\ &= Rp_{2!} Rs_! (s^{-1} R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}}) \otimes \tau_X^{-1} \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \otimes \mathbb{C}_{P'_\sigma}) \\ &= Rp_{2!} (R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}}) \otimes \mathbb{C}_{P'_\sigma} \otimes p^{-1} Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1}). \end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat intermédiaire s'obtient au moyen de la théorie classique des faisceaux. Toutefois les formules de la catégories dérivée des ind-faisceaux nous permettent de poursuivre les calculs. En utilisant la propriété (176) du foncteur  $\beta$  et la proposition 1.1.5, on a

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= Rp_{2!} R\mathcal{H}om \left( p_2^{-1} \mathcal{F}, p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \beta_{\widetilde{X \times X}} \left( \mathbb{C}_{P'_\sigma} \otimes p^{-1} Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \\ &= R\mathcal{H}om \left( \mathcal{F}, Rp_{2!!} \left( p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}}_{P'_\sigma} \otimes p^{-1} \beta_{X \times X} \left( Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} &Rp_{2!!} \left( p_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}}_{P'_\sigma} \otimes p^{-1} \beta_{X \times X} \left( Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \\ &= Rq_{2!!} Rp_{1!!} \left( p^{-1} q_1^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}}_{P'_\sigma} \otimes p^{-1} \beta_{X \times X} \left( Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \\ &= Rq_{2!!} \left( q_1^{-1} \mathcal{G} \otimes Rp_{1!!} \left( \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}}_{P'_\sigma} \right) \otimes \beta_{X \times X} \left( Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \\ &= Rq_{1!!} \left( q_2^{-1} \mathcal{G} \otimes Rp_{1!!} \left( \mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}}_{P'_\sigma} \right) \otimes \beta_{X \times X} \left( Ri_* \omega_{\Delta_X/X \times X}^{\otimes -1} \right) \right) \\ &= Rq_{1!!} \left( q_2^{-1} \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}}(\Delta_X, X \times X) \right) = \mathcal{L}_{\tilde{\sigma}}(\Delta_X, X \times X) \circ \mathcal{G}. \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. □

**Corollaire 2.2.2.** Soit  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$ . Alors, on a un isomorphisme

$$\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\pi_X^{-1} \mathcal{F}, \mu_X \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\mu_X \mathcal{F}, \mu_X \mathcal{G}).$$



DÉMONSTRATION. — Considérons la 1-forme fondamentale  $\omega_X \in \Gamma(T^*X, \Omega_{T^*X}^1)$  du fibré cotangent de  $X$ . Alors, on a

$$\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \omega_X^{-1} \mu \mathcal{H}om(\pi_X^{-1} \mathcal{F}, \pi_X^{-1} \mathcal{G}).$$

En utilisant la proposition 2.2.1, on obtient un isomorphisme naturel

$$\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\pi_X^{-1} \mathcal{F}, K_{T^*X} \circ \pi_X^{-1} \mathcal{G}) = R\mathcal{H}om(\pi_X^{-1} \mathcal{F}, \mu_X \mathcal{G}).$$

Le dernier isomorphisme est une conséquence des lemmes 2.1.3 et 2.1.2. □

**Proposition 2.2.3.** *Soient  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$  et  $Z$  une sous-variété fermée de  $X$ . Désignons par  $i$  l'immersion fermée  $i : T^*X \times_X Z \hookrightarrow T^*X$ . Alors, on a un isomorphisme naturel*

$$\mu_Z(\mathcal{F}) = \alpha_{T^*X \times_X Z}(i^! \mu_X \mathcal{F})|_{T_Z^*X} = R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{T^*X \times_X Z}, i^{-1} \mu_X \mathcal{F})|_{T_Z^*X}.$$

Ici  $\mu_Z(\mathcal{F})$  désigne le foncteur classique de microlocalisation de Sato.

Nous renvoyons au chapitre IV de [84] pour la définition et l'étude détaillée de  $\mu_Z$ . Nous remarquons simplement ici que  $\mu_Z(\mathcal{F}) = \mu hom(\mathbb{C}_Z, \mathcal{F})|_{T_Z^*X}$ .

DÉMONSTRATION. — D'après le corollaire 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} \mu_Z(\mathcal{F}) &= R\mathcal{H}om(\pi_X^{-1} \mathbb{C}_Z, \mu_X(\mathcal{F}))|_{T_Z^*X} = R\mathcal{H}om(Ri_!! \mathbb{C}_{T^*X \times_X Z}, \mu_X(\mathcal{F}))|_{T_Z^*X} \\ &= R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{T^*X \times_X Z}, i^! \mu_X(\mathcal{F}))|_{T_Z^*X}. \end{aligned}$$

□

### 2.3. Micro-support et ind-faisceaux

Le microsupport  $SS(\mathcal{F})$  d'un objet  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$  est un cône involutif fermé dans le fibré cotangent  $T^*X$  qui décrit les co-directions dans lesquelles la cohomologie de  $\mathcal{F}$  ne se propage pas (cf. [84] [83]). Rappelons la notion de micro-support correspondante introduite dans [88].

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne. Considérons le foncteur

$$J : D^b(\text{Ind}(\mathcal{C})) \rightarrow D^b(\mathcal{C})^\wedge \quad \text{donné par} \quad \mathcal{F} \mapsto \text{Hom}_{D^b(\text{Ind}(\mathcal{C}))}(-, \mathcal{F})$$

où  $D^b(\mathcal{C})^\wedge$  désigne la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur  $D^b(\mathcal{C})$ . on peut remarquer que le foncteur  $J$  se factorise à travers  $\text{Ind}(D^b(\mathcal{C}))$ .

*Remarque 2.3.1.* Le foncteur  $J$  est conservatif, ce qui est une conséquence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D^b(\text{Ind}(\mathcal{C})) & \xrightarrow{J} & \text{Ind}(D^b(\mathcal{C})) \\ & \searrow H^k & \swarrow IH^k \\ & \text{Ind}(\mathcal{C}) & \end{array}$$

Nous supposons maintenant que notre catégorie  $\mathcal{C}$  satisfait la condition suivante.

**$\mathcal{C}$  possède suffisamment d'injectifs et est de dimension homologique finie**

Rappelons que dans ce cas  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme dans  $\text{Ind}(D^b(\mathcal{C}))$  si et seulement si  $IH^k(\varphi)$  est un isomorphisme pour tout  $k$ .

On vérifie lors aisément le résultat suivant.

**Lemme 2.3.2.** Soient  $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$  et  $\{\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}\}_{i \in I}$  un système inductif filtrant de morphismes dans  $\mathrm{D}^b(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ . Alors  $\varinjlim \mathrm{J}(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(\mathcal{F})$  si et seulement si on a

$$\varinjlim \mathrm{H}^k(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k(\mathcal{F}).$$

En particulier lorsque  $\varinjlim \mathrm{J}(\mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(\mathcal{F})$  on a alors  $\varinjlim \mathrm{J}(\tau^{\leq n} \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(\tau^{\leq n} \mathcal{F})$  pour tout  $k$ .

Nous allons appliquer les résultats ci-dessus au cas des ind-faisceaux, en prenant comme catégorie  $\mathcal{C}$ , la catégorie  $\mathrm{Mod}^c(\mathbb{C}_X)$ . Étant donnée une variété notée  $X$ , nous désignerons par

$$J_X : \mathrm{D}^b\mathrm{I}(\mathbb{C}_X) \rightarrow (\mathrm{D}^b(\mathrm{Mod}^c(\mathbb{C}_X)))^\wedge$$

le foncteur canonique.

**Proposition 2.3.3.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application continue,  $\{\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}\}_{i \in I}$  un système inductif filtrant de morphismes dans  $\mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X))$  et  $\{\mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{G}\}_{i \in I}$  un système inductif filtrant dans  $\mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_Y))$  tels que

$$J_X(\mathcal{F}) = \varinjlim_{i \in I} J_X(\mathcal{F}_i) \quad \text{et} \quad J_Y(\mathcal{G}) = \varinjlim_{i \in I} J_Y(\mathcal{G}_i)$$

Les assertions suivantes sont satisfaites.

1.  $J_Y(Rf_!\mathcal{F}) = \varinjlim_{i \in I} J_Y(Rf_!\mathcal{F}_i)$ .
2. Étant donné  $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X))$ , on a  $J_X(\mathcal{K} \otimes \mathcal{F}) = \varinjlim_{i \in I} J_X(\mathcal{K} \otimes \mathcal{F}_i)$ .
3.  $J_X(f^{-1}\mathcal{G}) = \varinjlim_{i \in I} J_X(f^{-1}\mathcal{G}_i)$  et  $J_X(f^!\mathcal{G}) = \varinjlim_{i \in I} J_X(f^!\mathcal{G}_i)$ .
4.  $J_{T^*X}(\mu_X \mathcal{F}) = \varinjlim_{i \in I} J_{T^*X}(\mu_X \mathcal{F}_i)$ .

DÉMONSTRATION. — En utilisant le lemme 2.3.2, on peut par dévissage se réduire au cas des ind-faisceaux usuels, auquel cas ces formules sont évidentes.  $\square$

**Définition 2.3.4.** Supposons donné un objet  $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X))$ .

1. Le microsupport de  $\mathcal{F}$ , noté  $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ , est la partie conique fermée de  $T^*X$  dont le complémentaire est l'ensemble des points  $p \in T^*X$  tels qu'il existe un voisinage ouvert conique  $U$  de  $p$  dans  $T^*X$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $\pi_X(p)$  et un petit système inductif filtrant  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  d'objets  $\mathcal{F}_i \in \mathrm{D}^b(\mathrm{Mod}^c(\mathbb{C}_X))$  vérifiant  $\mathrm{SS}(\mathcal{F}_i) \cap U = \emptyset$  et

$$J_X(\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}_W) = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i \otimes \mathbb{C}_W.$$

2. On pose  $\mathrm{SS}_0(\mathcal{F}) = \mathrm{Supp}(\mu_X \mathcal{F})$ .

**Remarque 2.3.5.** Le microsupport défini ci-dessus coïncide avec la définition classique [84, defn 5.1.2] pour les objets de  $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$ , il vérifie l'inégalité triangulaire et on a

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \mathrm{SS}(\mathcal{F}) \cap T_X^*X, \quad \mathrm{SS}(\alpha_X(\mathcal{F})) \subset \mathrm{SS}(\mathcal{F}) \quad \text{pour } \mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X)).$$

En général on prendra garde qu'il n'est plus nécessairement involutif dans  $T^*X$ .

La proposition suivante permet de comparer les deux notions introduites dans la définition 2.3.4.

**Proposition 2.3.6.** *Soit  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_X))$ . Alors, on a*

$$\mathrm{SS}_0(\mathcal{F}) \subset \mathrm{SS}(\mathcal{F}).$$

*Si  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$  alors*

$$\mathrm{SS}_0(\mathcal{F}) = \mathrm{SS}(\mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION. — Le résultats pour les faisceaux est en fait une conséquence évidente du corollaire 2.2.2 puisque

$$\mathrm{SS}(\mathcal{F}) = \mathrm{Supp}(\mu\mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})) = \mathrm{Supp}(R\mathcal{H}om(\mu_X\mathcal{F}, \mu_X\mathcal{F})) = \mathrm{Supp}(\mu_X\mathcal{F}).$$

Considérons maintenant le cas général. Supposons que  $p$  n'appartienne pas à  $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ . Considérons un système inductif filtrant  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  dans  $D^b(\mathrm{Mod}^c(\mathbb{C}_X))$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $\pi_X(p)$  ainsi qu'un voisinage  $U \subset \pi_{T^*X}^{-1}(W)$  de  $p$  tels que

$$J_X(\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}_W) = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i \otimes \mathbb{C}_W$$

et  $\mathrm{SS}(\mathcal{F}) \cap \bar{U} = \emptyset$ . En utilisant la proposition 2.3.3, on voit que

$$J_X(\mu_X(\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}_W)) = \varinjlim_{i \in I} J_X(\mu_X(\mathcal{F}_i \otimes \mathbb{C}_W)),$$

ce qui donne  $\mu_X\mathcal{F}|_U = 0$  puisque l'on sait que pour les faisceaux  $\mathrm{Supp}(\mu_X\mathcal{F}_i) = \mathrm{SS}(\mathcal{F}_i)$ .  $\square$

*Remarque 2.3.7.* Étant donnée une sous-variété fermée  $Z$  de  $X$ , on a

$$\begin{aligned} \mathrm{SS}_0(\mathbb{C}_Z) &= \mathrm{SS}(\mathbb{C}_Z) = T_Z^*X \quad \text{et} \\ \mathrm{SS}_0(\tilde{\mathbb{C}}_Z) &= T^*X \times_X Z, \quad \mathrm{SS}(\tilde{\mathbb{C}}_Z) = T_Z^*X. \end{aligned}$$

**Lemme 2.3.8.** *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $T^*X$ ,  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_\Omega)$  et  $\mathcal{G} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_\Omega))$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  soit cohomologiquement constructible [84, defn 3.4.1]. Supposons de plus*

$$\omega_X^{-1}(\mathrm{SS}(\mathcal{F})) \cap \mathrm{Supp}(\mathcal{G}) = \emptyset,$$

où  $\omega_X$  désigne l'application  $T^*X \rightarrow T^*(T^*X)$ . On a alors un isomorphisme dans  $D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_\Omega))$

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. — Quitte à réduire un peu  $\Omega$ , on peut se ramener au cas où  $\omega_X^{-1}(\mathrm{SS}(\mathcal{F})) = \emptyset$ . Supposons tout d'abord que  $\mathcal{G}$  appartienne à  $D^b(\mathbb{C}_\Omega)$ . D'après la remarque 1.1.8, il s'agit de vérifier que pour  $p = (x_0, \xi_0) \in \Omega$  on a un isomorphisme

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p \xrightarrow{\sim} R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p.$$

Puisque  $p \notin T_X^*X$ , on sait que

$$(\mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p = \otimes (\mathbb{K}_\Omega \circ \tilde{\mathbb{C}}_{(p,p)}) \otimes \mathcal{G} = \varinjlim_{\rho > 0} \mathbb{C}_{K_\rho} \otimes \left( \left( \varinjlim_{\substack{\delta > 0, \varepsilon > 0}} \mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \right) [-n] \circ \mathcal{G} \right), \quad (195)$$

où l'on pose

$$\begin{aligned} K_\rho &= \{(x, \xi) : |x - x_0| \leq \rho, |\xi - \xi_0| \leq \rho\} \\ F_{\delta,\varepsilon} &= \{((x, \xi), (x', \xi')) : \delta \geq \langle \xi_0, x' - x \rangle \varepsilon > (|x' - x| + |\xi' - \xi|)\}. \end{aligned}$$

Notons  $p_1 : T^*\Omega \times T^*\Omega \rightarrow T^*\Omega$  la première projection. Lorsque  $\varepsilon$ ,  $\delta$  et  $\rho$  sont suffisamment petits, on voit que  $\pi_{T^*X}^{-1}K_\rho \cap p_1(\mathrm{SS}(\mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}}))$  est contenu dans un voisinage suffisamment petit de

$\omega_X(p)$  et qu'il en est de même pour  $\pi_{T^*X}^{-1}K_\rho \cap \text{SS}(\mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G})$ . Par conséquent, on obtient, d'après les hypothèses

$$\pi_{T^*X}^{-1}K_\rho \cap \text{SS}(\mathcal{F}) \cap \text{SS}(\mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G}) \subset T_{T^*X}^*T^*X.$$

Le corollaire 6.4.3 de [84] nous assure alors que l'on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}_{K_\rho} \otimes R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_{K_\rho} \otimes R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G})$$

dans  $D^b(\mathbb{C}_\Omega)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} J_\Omega\left(R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p\right) &= \varinjlim_{\delta,\varepsilon,\rho>0} J_\Omega\left(\mathbb{C}_{K_\rho} \otimes R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G})[-n]\right) \\ &= \varinjlim_{\delta,\varepsilon,\rho>0} J_\Omega\left(\mathbb{C}_{K_\rho} \otimes R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_{F_{\delta,\varepsilon}} \circ \mathcal{G})[-n]\right) \\ &= J_\Omega\left(R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p\right), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme lorsque  $\mathcal{G} \in D^b(\mathbb{C}_\Omega)$ . Dans le cas général, en prenant un système inductif filtrant  $\mathcal{G}_k$  dans  $D^b(\mathbb{C}_\Omega)$  tel que  $J_\Omega(\mathcal{G}) = \varinjlim_k \mathcal{G}_k$ , on a

$$\begin{aligned} J_\Omega(R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}) &= \varinjlim_k J_\Omega(R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_\Omega) \otimes (\mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}_k)) \\ &= \varinjlim_k J_\Omega(R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G}_k)) = J_\Omega(R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{K}_\Omega \circ \mathcal{G})), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous allons maintenant étendre aux ind-faisceaux un résultat bien connu pour les faisceaux.

**Proposition 2.3.9.** *Soient  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X), \mathcal{G} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  soit cohomologiquement constructible et que la condition non-caractéristique suivante soit satisfaite*

$$\text{SS}(\mathcal{F}) \cap \text{SS}_0(\mathcal{G}) \subset T_X^*X.$$

Alors, on a un isomorphisme

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. — Puisque  $\omega_X^{-1}\text{SS}(\pi_X^{-1}\mathcal{F}) = \text{SS}(\mathcal{F})$ , la condition non-caractéristique peut s'écrire

$$\omega_X^{-1}\text{SS}(\pi_X^{-1}\mathcal{F}) \cap \text{Supp}(\mu_X\mathcal{G}) \cap \dot{T}^*X = \emptyset,$$

et le lemme 2.3.8 assure que

$$\begin{aligned} \left(\pi_X^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes \mu_X\mathcal{G}\right)|_{\dot{T}^*X} &= \left(R\mathcal{H}om(\pi_X^{-1}\mathcal{F}, \mathbb{C}_{T^*X}) \otimes \mu_X\mathcal{G}\right)|_{\dot{T}^*X} \\ &= R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\pi_X^{-1}\mathcal{F}, \mu_X\mathcal{G})|_{\dot{T}^*X}. \end{aligned}$$

En appliquant le foncteur  $R\dot{\pi}_{X!!}$ , on obtient

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes R\dot{\pi}_{X!!}(\mu_X\mathcal{F}|_{\dot{T}^*X}) = R\mathcal{J}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, R\dot{\pi}_{X!!}(\mu_X\mathcal{G}|_{\dot{T}^*X})).$$

La proposition 2.1.13 nous donne maintenant le morphisme de triangles distingués suivant

$$\begin{array}{ccccc} D'_X \mathcal{F} \otimes R\pi_{X!!}(\mu_X \mathcal{G}|_{T^*X}) & \longrightarrow & D'_X \mathcal{F} \otimes (\tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}) & \longrightarrow & D'_X \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{+1} \cdot \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \\ R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, R\pi_{X!!}(\mu_X \mathcal{G}|_{T^*X})) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{+1} \cdot \end{array}$$

dans lequel  $D'_X \mathcal{F} = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X)$ . Le lemme suivant montre que la flèche verticale du milieu est un isomorphisme ce qui entraîne que la flèche de droite est aussi un isomorphisme.  $\square$

**Lemme 2.3.10.** *Soient  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$  et  $\mathcal{G} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  soit cohomologiquement constructible. Alors, on a un isomorphisme*

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes (\tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. — Notons  $p_k : X \times X \rightarrow X$  la projection sur le  $k$ -ième facteur. On a pour  $\mathcal{G} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$

$$p_1^{-1} R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes p_2^{-1} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(p_1^{-1} \mathcal{F}, p_2^{-1} \mathcal{G}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes (\tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}) &= Rp_{1!!}(p_1^{-1} R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbb{C}_X) \otimes p_2^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X}) \\ &= Rp_{1!!}(R\mathcal{H}om(p_1^{-1} \mathcal{F}, p_2^{-1} \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X}) \\ &= Rp_{1!!} R\mathcal{H}om(p_1^{-1} \mathcal{F}, p_2^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X}) \\ &= R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, Rp_{1!!}(p_2^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X})) = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{G}) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Corollaire 2.3.11.** *Supposons que  $i : Z \hookrightarrow X$  soit une immersion fermée et que  $\mathcal{F} \in D^b(I(\mathbb{C}_X))$  vérifie la condition*

$$SS_0(\mathcal{F}) \cap T_Z^* X \subset T_X^* X.$$

Alors, on a un isomorphisme

$$i^{-1} \mathcal{F} \otimes \omega_{Z/X} \xrightarrow{\sim} i^! \mathcal{F}.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de remarquer que

$$i^{-1} \mathcal{F} \otimes \omega_{Z/X} = i^{-1} \mathcal{F} \otimes i^{-1} R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_Z, \mathbb{C}_X) = i^{-1} R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_Z, \mathcal{F}) = i^! \mathcal{F}.$$

$\square$

**Lemme 2.3.12.** *Soit  $\Omega \subset \dot{T}^* X$  un ouvert et  $\mathcal{K} \in D^b(I(\mathbb{C}_{Y \times \Omega}))$ . Supposons que l'on ait*

$$SS(\mathcal{K})^a \cap (T^* Y \times \omega_X(\Omega)) = \emptyset,$$

où  $a$  désigne l'application antipodale. Alors

$$(\mathcal{K} \circ K_{T^* X})|_{Y \times \Omega} = 0.$$

DÉMONSTRATION. — On peut aisément réduire la démonstration au cas où  $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathbb{C}_{Y \times \Omega})$ . D'après la remarque 1.1.8, il suffit de prouver que pour tout point  $p \in Y \times \Omega$ , on a

$$(\mathcal{K} \circ \mathbf{K}_{T^*X}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p = 0.$$

Nous pouvons supposer que  $X$  et  $Y$  sont affines et que  $p = (y_0, x_0; \xi_0)$ . On a alors

$$\mathbf{K}_{T^*X} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{(x_0; \xi_0)} = \varinjlim_{\delta, \varepsilon > 0} \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}}[2 \dim X],$$

où on a posé  $F_{\delta, \varepsilon} = \{\delta \geq \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|x' - x| + |\xi' - \xi|)\}$ . Par conséquent, il suffit de prouver qu'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  vérifiant

$$(\mathcal{K} \circ \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}})|_U = 0$$

pour  $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ . Notons  $p_{ij}$  la projection de  $Y \times \Omega \times \Omega$  sur son  $(i, j)$ -ième facteur. Alors, on a

$$\mathcal{K} \circ \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}} = R p_{13!}(p_{12}^{-1} \mathcal{K} \otimes p_{23}^{-1} \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}}).$$

Lorsque  $\mathrm{SS}(F_{\delta, \varepsilon})$  est contenu dans un voisinage suffisamment petit de  $(\omega_X(p), -\omega_X(p))$ , le microsupport  $\mathrm{SS}(p_{12}^{-1} \mathcal{K} \otimes p_{23}^{-1} \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}})$  n'intersecte pas  $T^*Y \times \{-\langle \xi_0, dx \rangle\} \times T^*\Omega$ . Sachant que le morphisme de  $Y \times \mathrm{Supp}(\mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}})$  dans  $Y \times \mathbb{R} \times T^*X$  induit par  $\langle \xi_0, x \rangle$  est propre, la proposition 5.4.17 de [84] nous assure alors que  $(\mathcal{K} \circ \mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}})|_U = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.3.13.** Soient  $\mathcal{K} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_{Y \times X}))$  un noyau et  $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_X))$ . Supposons que

$$\mathrm{SS}(\mathcal{K})^a \cap (T^*Y \times \mathrm{SS}_0 \mathcal{F}) \subset T^*Y \times T_X^*X.$$

Alors, on a un isomorphisme

$$\mathcal{K} \circ \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K} \circ \mathcal{F}.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de prouver que  $\mathcal{K} \circ (\mathrm{Ker}(\tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \rightarrow \mathbb{C}_{\Delta_X})) \circ \mathcal{F} = 0$ . Notons  $p$  la projection de  $Y \times T^*X$  sur  $Y \times X$ . On a

$$\mathrm{SS}(p^{-1} \mathcal{K}) \subset \left\{ ((y; \eta), (x, \xi; \xi', 0)) : ((y; \eta), (x; \xi)) \in \mathrm{SS}(\mathcal{K}) \right\}$$

On en déduit d'après l'hypothèse que

$$\begin{aligned} & \mathrm{SS}(\pi_X^{-1} \mathcal{K}) \cap \left( T^*Y \times \omega_X(\mathrm{SS}_0 \mathcal{F} \setminus T_X^*X) \right) \\ & \subset \left\{ ((y; \eta), (x, \xi; \xi, 0)) : ((y; \eta), (x; \xi)) \in \mathrm{SS} \mathcal{K}, (x, \xi) \in \mathrm{SS}_0 \mathcal{F} \setminus T_X^*X \right\} \end{aligned}$$

est vide. Par conséquent le lemme 2.3.12 assure que

$$\mathrm{supp}(p^{-1} \mathcal{K} \circ \mathbf{K}_{T^*X}) \cap (Y \times \mathrm{SS}_0(\mathcal{F})) \subset Y \times T_X^*X.$$

Notons  $p_1 : Y \times T^*X \rightarrow Y$  et  $p_2 : Y \times T^*X \rightarrow T^*X$  les projections. Alors

$$\begin{aligned} p^{-1} \mathcal{K} \circ (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X}) &= p^{-1} \mathcal{K} \circ \mathbf{K}_{T^*X} \circ (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X}) \\ &= R p_{1!} \left( (p^{-1} \mathcal{K} \circ \mathbf{K}_{T^*X}) \otimes p_2^{-1} (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Cela prouve la proposition puisque  $p^{-1} \mathcal{K} \circ (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X}) = \mathcal{K} \circ R \pi_{X!} (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X})$  d'après l'assertion (3) du lemme 1.1.10, et  $R \pi_{X!} (\mu_X \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_{T^*X}) = (\mathrm{Ker}(\tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_X} \rightarrow \mathbb{C}_{\Delta_X})) \circ \mathcal{F}$  d'après l'assertion (3) de la proposition 2.1.13.  $\square$

## 2.4. Propriétés fonctorielles de la microlocalisation

Pour étudier les propriétés fonctorielles du foncteur  $\mu_X$ , il est particulièrement commode d'introduire différents noyaux de transfert. Ils ne seront utilisés qu'à l'intérieur des démonstrations afin de conserver les notations les plus simples possibles. Dans la suite, nous utiliserons souvent le lemme 1.1.10 sans le mentionner.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. Rappelons que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T^*X & \xleftarrow{f_d} T^*Y \times_Y X \xrightarrow{f_\pi} & T^*Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On peut remarquer que  $f_d^* \omega_X = f_\pi^* \omega_Y$ . Considérons les applications

$$\begin{aligned} (T^*Y \times_Y X) \times X & \xrightarrow{f_d \times \text{id}_X} T^*X \times X, \\ (T^*Y \times_Y Y) \times Y & \xrightarrow{f_\pi \times \text{id}_Y} T^*Y \times Y, \\ T^*Y \times X & \xrightarrow{\text{id}_{T^*X} \times f} T^*Y \times Y. \end{aligned}$$

Elles définissent des morphismes

$$\begin{aligned} \Gamma(T^*X \times_X X, \Omega_{T^*X \times X}^1) & \longrightarrow \Gamma(T^*Y \times_Y X, \Omega_{(T^*Y \times_Y X) \times X}^1), \\ \Gamma(T^*Y, \Omega_{T^*Y \times Y}^1) & \longrightarrow \Gamma(T^*Y \times_Y X, \Omega_{(T^*Y \times_Y X) \times Y}^1), \\ \Gamma(T^*Y, \Omega_{T^*Y \times Y}^1) & \longrightarrow \Gamma(T^*Y \times_Y X, \Omega_{T^*Y \times X}^1). \end{aligned}$$

Nous désignerons par  $\sigma_{Y \leftarrow X}$ ,  $\sigma_{X \rightarrow Y}$  et  $\sigma_{X|Y}$  les images respectives des sections  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  et  $\sigma_Y$  de la définition 2.1.5. Nous posons par ailleurs

$$\begin{aligned} L_{Y \leftarrow X} & = \mathcal{L}_{\sigma_{Y \leftarrow X}}((T^*Y \times_Y X) \times_X X, (T^*Y \times_Y X) \times_X X), \\ L_{X \rightarrow Y} & = \mathcal{L}_{\sigma_{X \rightarrow Y}}((T^*Y \times_Y X) \times_Y Y, (T^*Y \times_Y X) \times_Y Y), \\ L_{X|Y} & = \mathcal{L}_{\sigma_{X|Y}}(T^*Y \times_Y X, T^*T^*Y \times X). \end{aligned}$$

Remarquons que lorsque l'on prend pour morphisme l'identité de  $X$ , les trois noyaux définis précédemment coïncident et sont isomorphes à  $L_X$ .

Les résultats du chapitre 1 nous donne aisément le lemme suivant.

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. On a des isomorphismes*

1.  $L_X = R(\text{id}_{T^*X} \times \pi_X)!! K_{T^*X}$ .
2.  $(f_d \times \text{id}_X)^{-1} L_X = L_{Y \leftarrow X}$ .
3.  $L_{X|Y} = (\text{id}_{T^*Y} \times f)^{-1} L_Y$ .
4.  $K_{T^*Y} \circ_{T^*Y} L_{X|Y} = L_{X|Y}$ .
5.  $(f_\pi \times \text{id}_Y)^{-1} L_Y = L_{X \rightarrow Y}$ .

On dispose en outre de morphismes,

6.  $R(f_\pi \times \text{id}_X)!! L_{Y \leftarrow X} \rightarrow K_{T^*Y} \circ_{T^*Y} R(f_\pi \times \text{id}_X)!! L_{Y \leftarrow X} \xrightarrow{\sim} L_{X|Y}$ ,
7.  $R(\text{id}_{T^*Y \times_Y X} \times f)!! L_{Y \leftarrow X} \rightarrow L_{X \rightarrow Y}$ ,

ces derniers étant des isomorphismes lorsque l'on suppose  $f$  lisse.

En nous appuyant sur ces résultats nous allons maintenant détailler le comportement du foncteur de microlocalisation par rapport aux images directes propres et aux images inverses. Dans la section suivante nous en déduirons les propriétés par rapport à la convolution.

**Théorème 2.4.2 (Image directe propre).** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés et  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_X))$ . Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. On a un morphisme naturel et un isomorphisme naturel

$$Rf_{\pi!}f_d^{-1}\mu_X\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}_{T^*Y} \circ Rf_{\pi!!}f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mu_Y(Rf_{!!}\mathcal{F}).$$

2. Lorsque  $f$  est lisse, ces derniers fournissent un isomorphisme

$$Rf_{\pi!}f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mu_Y(Rf_{!!}\mathcal{F}).$$

DÉMONSTRATION. — D'après l'assertion (2) du lemme 2.4.1, on a  $f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) = \mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \circ \mathcal{F}$ . L'assertion (6) du lemme 2.4.1 assure alors que l'on a un morphisme naturel

$$R(f_{\pi} \times \text{id}_X)_{!!}\mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \rightarrow \mathbf{K}_{T^*Y} \circ_{T^*Y} R(f_{\pi} \times \text{id}_X)_{!!}\mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}_{X|Y}$$

qui est un isomorphisme lorsque  $f$  est lisse. Nous avons par ailleurs

$$(R(f_{\pi} \times \text{id}_X)_{!!}\mathbf{L}_{Y \leftarrow X}) \circ \mathcal{F} = Rf_{\pi!!}f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) \quad \mathbf{L}_{X|Y} \circ \mathcal{F} = \mu_Y(Rf_{!!}\mathcal{F}).$$

Par conséquent, on dispose des morphismes naturels

$$Rf_{\pi!}f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{K}_{T^*Y} \circ Rf_{\pi!!}f_d^{-1}\mu_X(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mu_Y(Rf_{!!}\mathcal{F}),$$

ces derniers étant des isomorphismes lorsque  $f$  est lisse.  $\square$

**Proposition 2.4.3 (Image inverse).** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés et  $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_Y))$ . Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. On a un morphisme naturel

$$f_d^{-1}\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) \rightarrow f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}),$$

qui est un isomorphisme lorsque  $f$  est lisse.

2. On a un morphisme naturel

$$\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) \rightarrow Rf_{d*}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. — Nous avons

$$f_d^{-1}\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) = \mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G} \quad \text{et} \quad f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) = \mathbf{L}_{X \rightarrow Y} \circ \mathcal{G}.$$

Sachant que  $\mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G} = \left( R(\text{id}_{T^*Y \times YX} \times f)_{!!}\mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \right) \circ \mathcal{G}$  l'assertion (7) du lemme 2.4.1 nous donne un morphisme naturel

$$f_d^{-1}\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) = \left( R(\text{id}_{T^*Y \times YX} \times f)_{!!}\mathbf{L}_{Y \leftarrow X} \right) \circ \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{L}_{X \leftarrow Y} \circ \mathcal{G} = f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}),$$

qui est un isomorphisme lorsque  $f$  est lisse. Par adjonction, le morphisme précédent nous donne le morphisme  $\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) \rightarrow Rf_{d*}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G})$ .  $\square$

**Théorème 2.4.4 (Cas d'un plongement).** *Soit  $f : X \hookrightarrow Y$  un plongement fermé. Alors, étant donné  $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{I}(\mathbb{C}_Y))$ , on a les assertions suivantes.*



1. On a un morphisme naturel

$$Rf_{d!!}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) \rightarrow \mu_X(f^{-1}\mathcal{G}),$$

2. Lorsque  $X$  est non caractéristique pour  $\mathcal{G}$  i.e.  $\text{SS}_0(\mathcal{G}) \cap T_X^*Y \subset T_Y^*Y$ , le morphisme ci-dessus est un isomorphisme

$$Rf_{d!!}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mu_X(f^{-1}\mathcal{G}).$$

En outre  $\text{SS}_0(f^{-1}\mathcal{G}) \subset f_d f_{\pi}^{-1}\text{SS}_0(\mathcal{G})$ .

DÉMONSTRATION. — (1). Considérons les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc} T^*X & \xleftarrow{f_d} & T^*Y \times_Y X & & X \xleftarrow{p} T^*Y \times_Y X \xleftarrow{p_1} (T^*Y \times_Y X) \times X \xrightarrow{p_2} X \\ & & \downarrow f_{\pi} & & \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & T^*Y & & T^*Y \times_Y X & \xleftarrow{p'_1} & (T^*Y \times_Y X) \times Y & \xrightarrow{p'_2} & Y \end{array}$$

On a les isomorphismes

$$f_d^{-1}\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) = L_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G} \quad \text{et} \quad f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) = L_{X \rightarrow Y} \circ \mathcal{G}.$$

Puisque  $f$  est une immersion fermée, le morphisme  $f_d$  est lisse, ce qui nous donne

$$f_d^!\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) = (L_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G}) \otimes \omega_{T^*Y \times_Y X / T^*X}.$$

Les fibrés cotangents étant canoniquement orientables, on a

$$\omega_{T^*Y \times_Y X / T^*X} = p^{-1}\omega_{X/Y}[2(\dim Y - \dim X)] = p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1},$$

où  $p : T^*Y \times_Y X \rightarrow X$  désigne la projection. Par conséquent, on obtient

$$f_d^!\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) = (L_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G}) \otimes p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1}.$$

Maintenant, puisque  $f'$  est une immersion fermée, on obtient, en utilisant la proposition 1.3.9, un isomorphisme  $L_{Y \leftarrow X} = f'^!L_{X \rightarrow Y}$  qui induit un morphisme

$$f'^{-1}L_{X \rightarrow Y} \rightarrow L_{Y \leftarrow X} \otimes \omega_{X \times (T^*Y \times_Y X) / Y \times (T^*Y \times_Y X)}^{\otimes -1} = L_{Y \leftarrow X} \otimes p_2^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1} = L_{Y \leftarrow X} \otimes p_1^{-1}p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1}.$$

Par conséquent il découle du morphisme précédent et du morphisme d'adjonction  $\text{id} \rightarrow Rf'_*f'^{-1} = Rf'_{!!}f'^{-1}$  que l'on a un morphisme

$$\begin{aligned} f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) &= L_{X \rightarrow Y} \circ \mathcal{G} = Rp_{1!!}(L_{X \rightarrow Y} \otimes p'_2{}^{-1}\mathcal{G}) = Rp'_{1!!}Rf'_{!!}f'^{-1}(L_{X \rightarrow Y} \otimes p'_2{}^{-1}\mathcal{G}) \\ &\rightarrow Rp_{1!!}(L_{Y \leftarrow X} \otimes p_1^{-1}p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1} \otimes p_2^{-1}f^{-1}\mathcal{G}) = (L_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G}) \otimes p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient a morphisme

$$f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) \rightarrow (L_{Y \leftarrow X} \circ f^{-1}\mathcal{G}) \otimes p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1} = f_d^{-1}\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) \otimes p^{-1}\omega_{X/Y}^{\otimes -1} = f_d^!\mu_X(f^{-1}\mathcal{G}),$$

d'où par adjonction, le morphisme voulu

$$Rf_{d!!}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) \rightarrow \mu_X(f^{-1}\mathcal{G}).$$

(2). Supposons maintenant que  $X$  est non-caractéristique pour  $\mathcal{G}$ . Par récurrence, on peut supposer que  $X$  est une hypersurface dans  $Y$ . Étant donné  $p \in T^*X$ , nous allons montrer que le morphisme construit précédemment induit des isomorphismes

$$Rf_{d!!}f_{\pi}^{-1}\mu_Y(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mu_X(f^{-1}\mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p$$

ce qui prouvera notre assertion d'après la remarque 1.1.8. Supposons tout d'abord que  $p \in T_X^* X$ . Puisque  $X$  est non-caratéristique pour  $\mathcal{G}$ , on obtient en utilisant le lemme 2.1.10

$$\begin{aligned} Rf_{d!!} f_\pi^{-1} \mu_Y(\mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p &= Rf_{d!!} (f_\pi^{-1} \mu_Y(\mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T_X^* Y}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p = Rf_{d!!} (f_\pi^{-1} (\mu_Y(\mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T_Y^* Y})) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \\ &= Rf_{d!!} (f_\pi^{-1} (\pi_Y^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T_Y^* Y})) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p = Rf_{d!!} (f_d^{-1} \pi_X^{-1} f^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_{T_Y^* Y \times_Y X}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \\ &= \pi_X^{-1} f^{-1} \mathcal{G} \otimes Rf_{d!!} \tilde{\mathcal{C}}_{T_Y^* Y \times_Y X} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p = \pi_X^{-1} f^{-1} \mathcal{G} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \\ &= \mu_X(f^{-1} \mathcal{G}) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait  $p \notin T_X^* X$ . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & q_2 \\ & & & & \curvearrowright \\ T^* X \times X & \xrightarrow{f_1} & T^* X \times Y & \xleftarrow{r} & (T^* Y \times_Y X) \times Y & \xrightarrow{p'_2} & Y \\ & & \downarrow q_1 & \square & \downarrow p'_1 & & \\ & & T^* X & \xleftarrow{f_d} & T^* Y \times_Y X & & \end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$Rf_{d!!} f_\pi^{-1} \mu_Y \mathcal{G} = (Rr_{!!} L_{X \rightarrow Y}) \circ \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mu_X(f^{-1} \mathcal{G}) = L_X \circ f^{-1} \mathcal{G} = (Rf_{1!!} L_X) \circ \mathcal{G}.$$

Par conséquent, en identifiant  $p \in T^* X$  avec  $(p, f(\pi_X(p))) \in T^* X \times Y$ , tout revient à prouver que l'on a

$$\left( Rr_{!!} L_{X \rightarrow Y} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} = \left( Rf_{1!!} L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G}.$$

Prenons un système de coordonnées locales  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$  sur  $Y$  pour lequel  $X$  est donné par  $\{t = 0\}$ . Notons par  $(t, x, \tau, \xi)$  les coordonnées de  $T^* Y$  correspondantes et par  $(x, \xi)$  celles de  $T^* X$ . Posons  $p = (0, \xi_0)$  et notons  $((x, \tau, \xi), (t', x'))$  les coordonnées de  $(T^* Y \times_Y X) \times Y$ . Alors  $r((x, \tau, \xi), (t', x')) = ((x, \xi), (t', x'))$ . On a ainsi

$$Rr_{!!} L_{X \rightarrow Y} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p = Rr_{!!} \left( \varinjlim_{\varepsilon > 0, R > 0} \mathbb{C}_{\{\tau t' + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|t'| + |x' - x|), |\tau| < R\}}[\dim Y] \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p.$$

Puisque la fibre de  $\{\tau t' + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|t'| + |x' - x|), |\tau| < R\}$  au-dessus de  $((x, \xi), t', x')$  est un intervalle ouvert non vide si  $R|t'| + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|t'| + |x' - x|), |\tau| < R$  et un ensemble vide sinon, on obtient

$$Rr_{!!} L_{X \rightarrow Y} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p = \left( \varinjlim_{\varepsilon > 0, R > 0} \mathbb{C}_{\{R|t'| + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|t'| + |x' - x|)\}}[\dim Y - 1] \right) \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p.$$

Et par conséquent

$$\left( Rr_{!!} L_{X \rightarrow Y} \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} = \left( \varinjlim_{\varepsilon > 0, R > 0} \mathbb{C}_{\{R|t'| + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon(|t'| + |x' - x|)\}}[\dim X] \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G}.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \left( Rf_{1!!} L_X \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} &= \left( Rf_{1!!} \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{\{\langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon|x' - x|\}}[\dim X] \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} \\ &= \left( \varinjlim_{\varepsilon > 0} \mathbb{C}_{\{\langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon|x' - x|, t' = 0\}}[\dim X] \otimes \tilde{\mathcal{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de prouver que

$$\left( \varinjlim_{\varepsilon>0, R>0} \mathbb{C}_{\{R|t'|+\langle \xi_0, x'-x \rangle > \varepsilon|x'-x|, 0 < t' \leq \delta\}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p \right) \circ \mathcal{G} = 0.$$

Posons  $U_{\varepsilon, \delta, R} = \{Rt' + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon|x' - x|, 0 < t' \leq \delta\}$ . Lorsque  $\varepsilon, \delta$  sont suffisamment petits et que  $R$  est suffisamment grand, on voit, au voisinage de  $p$ , que le micro-support  $\text{SS}(\mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}})$  est contenu dans un voisinage suffisamment petit  $-Rdt' + \langle \xi_0, d(x - x') \rangle$ . Par conséquent, on obtient

$$\text{SS}(\mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}})^a \cap T^*(T^*X) \otimes \text{SS}_0(\mathcal{G}) \subset T^*(T^*X) \times T_Y^*X$$

sur un voisinage de  $p$  pour  $R \gg 0$ . Par conséquent la proposition 2.3.13 implique que

$$(\mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}} \circ \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_Y}) \circ \mathcal{G} = (\mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}}) \circ \mathcal{G}$$

sur un voisinage de  $p$  pour  $R \gg 0$ . On se trouve ainsi ramener à prouver que

$$\left( \varinjlim_{\varepsilon>0, \delta>0, R>0} \mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p \right) \circ \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_Y} = 0.$$

Considérons la projection sur le premier et troisième facteur

$$h : T^*X \times Y \times Y \rightarrow T^*X \times Y \quad \text{i.e. } ((x; \xi), (t', x'), (t'', x'')) \mapsto ((x; \xi), (t'', x'')).$$

Alors,

$$\left( \varinjlim_{\varepsilon>0, \delta>0, R>0} \mathbb{C}_{U_{\varepsilon, \delta, R}} \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p \right) \circ \tilde{\mathbb{C}}_{\Delta_Y} = Rh_{1!} \left( \varinjlim_{\varepsilon>0, \delta>0, R>0} \mathbb{C}_{V_{\varepsilon, \delta, R}} \right) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p,$$

où  $V_{\varepsilon, \delta, R} = \{Rt' + \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon|x' - x|, 0 < t' \leq \delta, |x' - x''| \leq \delta, |t' - t''| \leq \delta\}$ . Ce qui est nul, d'après le lemme suivant.  $\square$

**Lemme 2.4.5.** Soient  $(t, t', x, y) = (t, t', x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  l'application  $h(t, t', x, y) = (t', y)$ . Étant donné  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $\delta > 0$ , posons  $V_\delta = \{(t, t', x, y) : t + \langle \xi_0, x \rangle > |x|, |x - y| \leq \delta, 0 < t \leq \delta, |t - t'| \leq \delta\}$ . Alors, on a

$$\text{Supp}(Rh_1\mathbb{C}_{V_\delta}) \not\equiv 0.$$

DÉMONSTRATION. — Décomposons  $h$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h_1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h_2} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , où l'on a  $h_1(t, t', x, y) = (t', x, y)$  et  $h_2(t', x, y) = (t', y)$ . Lorsque  $|x - y| \leq \delta$ , la fibre  $V_\delta \cap h_1^{-1}(t', x, y)$  est  $\{t : \max(0, |x| - \langle \xi_0, x \rangle) < t \leq \min(\delta, t' + \delta), t' - \delta \leq t\}$ . Par conséquent, en posant

$$W_\delta = \{(t', x, y) : \max(0, |x| - \langle \xi_0, x \rangle) < t' - \delta \leq \min(\delta, t' + \delta), |x - y| \leq \delta\},$$

on a  $Rh_{1!}\mathbb{C}_{V_\delta} = \mathbb{C}_{W_\delta}$ . Puisque  $\text{supp}(\mathbb{C}_{W_\delta}) \subset \{(t', x, y) : \delta \leq t'\}$ , on obtient

$$\text{supp}(Rh_1\mathbb{C}_{V_\delta}) \subset \{(t', y) : \delta \leq t'\}.$$

$\square$

## 2.5. Convolution microlocale des noyaux

Étant données des variétés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  notons  $p_{ij}$  la projection de  $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$  sur son  $(i, j)$ -ème facteur. Comme précédemment, nous désignons par  $a : T^*X \rightarrow T^*X$  l'application antipodale. Nous définissons alors la projection antipodale  $p_{12}^a$  via la composition

$$p_{12}^a : T^*X \times T^*Y \times T^*Z \xrightarrow{p_{12}} T^*X \times T^*Y \xrightarrow{\text{id} \times a} T^*X \times T^*Y.$$

Étant donnés  $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_{T^*X \times T^*Y}))$  et  $\mathcal{G} \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_{T^*Y \times T^*Z}))$ , nous posons

$$\mathcal{F} \circ^a \mathcal{G} = R p_{13!!} (p_{12}^{a-1} \mathcal{F} \otimes p_{23}^{-1} \mathcal{G}).$$

De manière analogue, lorsque  $S_1 \subset T^*X \times T^*Y$  et  $S_2 \subset T^*Y \times T^*Z$ , nous posons

$$S_1 \times_{T^*Y}^a S_2 = p_{12}^{a-1}(S_1) \cap p_{23}^{a-1}(S_2) \subset T^*X \times T^*Y \times T^*Z.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal.

**Théorème 2.5.1 (Convolution microlocale des noyaux).** Soient  $\mathcal{K}_1 \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_{X \times Y}))$  et  $\mathcal{K}_2 \in D^b(\mathbb{I}(\mathbb{C}_{Y \times Z}))$  deux noyaux.

1. On a un morphisme naturel

$$\mu_{X \times Y}(\mathcal{K}_1) \circ^a \mu_{Y \times Z}(\mathcal{K}_2) \rightarrow \mu_{X \times Z}(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2). \quad (196)$$

2. Supposons que la condition non-caractéristique

$$\text{SS}_0(\mathcal{K}_1) \times_{T^*Y}^a \text{SS}_0(\mathcal{K}_2) \cap (T_X^*X \times T_Y^*Y \times T_Z^*Z) \subset T_X^*X \times T_Y^*Y \times T_Z^*Z, \quad (197)$$

soit vérifiée. Alors (196) est un isomorphisme en dehors de

$$\overline{p_{13}(\text{SS}_0(\mathcal{K}_1) \times_{T^*Y}^a \text{SS}_0(\mathcal{K}_2) \cap T^*X \times T_Y^*Y \times T^*Z)}.$$

DÉMONSTRATION. — (1). Commençons par construire le morphisme. Considérons les variétés  $\mathcal{X}_1 = X \times Y$ ,  $\mathcal{X}_2 = Y \times Z$  et  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 = X \times Y \times Y \times Z$  avec le plongement diagonal

$$\mathcal{Y} := X \times Y \times Z \xrightarrow{j} \mathcal{X}.$$

Posons  $\mathcal{Z} = X \times Z$  et notons  $q_{13} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  la projection. L'application

$$T^*\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} T^*\mathcal{X} \quad \text{donnée par} \quad (x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, y, z; \xi, -\eta, \eta, \zeta)$$

définit un carré cartésien dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & p \\
 & & & & \curvearrowright \\
 & T^*\mathcal{Y} & \hookrightarrow & \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} T^*\mathcal{X} & \xrightarrow{j_\pi} T^*\mathcal{X} \\
 & \downarrow & & \downarrow j_d & \\
 & \mathcal{Y} \times_{\mathcal{Z}} T^*\mathcal{Z} & \xrightarrow{q_{13d}} & T^*\mathcal{Y} & \\
 & \downarrow q_{13\pi} & & & \\
 & T^*\mathcal{Z} & & & \\
 q \curvearrowleft & & & & 
 \end{array}$$

D'après la proposition 2.1.14, nous avons un isomorphisme

$$K_{T^*\mathcal{X}} \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2)) = \mu_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_1 \boxtimes \mathcal{K}_2).$$

En utilisant le théorème 2.4.4, on obtient un morphisme

$$Rj_{d!!}j_{\pi}^{-1}\mu_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_1 \boxtimes \mathcal{K}_2) \rightarrow \mu_{\mathcal{Y}}(j^{-1}(\mathcal{K}_1 \boxtimes \mathcal{K}_2)). \quad (198)$$

Le morphisme  $q_{13}$  étant lisse, l'assertion (2) du théorème 2.4.2, nous donne un isomorphisme

$$Rq_{13\pi!!}q_{13d}^{-1}\mu_{\mathcal{Y}}(j^{-1}(\mathcal{K}_1 \boxtimes \mathcal{K}_2)) \xrightarrow{\sim} \mu_{\mathcal{Z}}(Rq_{13!!}j^{-1}(\mathcal{K}_1 \boxtimes \mathcal{K}_2)) = \mu_{\mathcal{Z}}(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2).$$

Nous obtenons ainsi un morphisme

$$Rq_{!!}p^{-1}\left(\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}} \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2))\right) \rightarrow \mu_{\mathcal{Z}}(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \quad (199)$$

duquel on déduit finalement le morphisme voulu

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \circ^a \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2) &= Rq_{!!}p^{-1}(\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2)) \\ &\rightarrow Rq_{!!}p^{-1}\left(\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}} \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2))\right) \rightarrow \mu_{\mathcal{Z}}(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2). \end{aligned}$$

(2). D'après le théorème 2.4.4, le morphisme (198) est un isomorphisme lorsque les conditions non-caractéristiques sont satisfaites et par suite, sous les mêmes hypothèses, (199) est aussi un isomorphisme. Par conséquent, afin de prouver notre assertion, il nous suffit de prouver que l'on a un isomorphisme

$$\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \circ^a \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2) = Rq_{!!}p^{-1}\left(\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}} \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2))\right) \quad (200)$$

en dehors de  $p_{13}(\text{SS}_0(\mathcal{K}_1) \times_{T^*Y}^a \text{SS}_0(\mathcal{K}_2) \cap T^*X \times T_Y^*Y \times T^*Z)$ . Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \circ^a \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2) &= (\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_1} \circ \mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1)) \circ^a (\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_2} \circ \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2)) \\ &= (\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_1} \circ_{T^*Y} \mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_2}) \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T^*\mathcal{Y} \times T^*\mathcal{X} & \\ q'=(q,\text{id}) \swarrow & & \searrow p'=(p,\text{id}) \\ T^*\mathcal{Z} \times T^*\mathcal{X} & & T^*\mathcal{X} \times T^*\mathcal{X}. \end{array}$$

En utilisant ces notations, nous avons

$$Rq_{!!}p^{-1}\left(\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}} \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2))\right) = (Rq'_{!!}p'^{-1}\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}}) \circ (\mu_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{K}_1) \boxtimes \mu_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{K}_2)).$$

La proposition 1.3.5 et le corollaire 1.3.7, nous assure que

$$Rq'_{!!}p'^{-1}\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}} = \mathcal{L}_{\sigma}(T^*\mathcal{Y}, T^*\mathcal{Z} \times T^*\mathcal{X})$$

où  $T^*\mathcal{Y}$  est plongé dans  $T^*\mathcal{Z} \times T^*\mathcal{X}$  via le morphisme  $(q, p)$  et la section  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma = (\omega_X, \omega_Z, -\omega_X, -\omega_Y, -\omega_Y, -\omega_Z).$$

Afin d'obtenir (200) sous les hypothèses non-caractéristiques, il suffit de prouver que

$$\mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_1} \circ_{T^*\mathcal{Y}} \mathbb{K}_{T^*\mathcal{X}_2} \rightarrow \mathcal{L}_{\sigma}(T^*\mathcal{Z} \times_{T^*\mathcal{Z}} T^*\mathcal{Y}, T^*\mathcal{Z} \times T^*\mathcal{X})$$

est un isomorphisme sur  $T^*\mathcal{Z} \times (T^*X \times_{T^*Y}^a (Y \times Y) \times T^*Z) \subset T^*\mathcal{Z} \times T^*\mathcal{X}$  ce qui est une conséquence de la proposition 1.3.14.  $\square$

## 2.6. Un théorème d'annulation pour les fonctions holomorphes microlocales

Supposons que  $X$  soit une variété complexe. En microlocalisant le faisceau des fonctions holomorphes  $\mathcal{O}_X$  on obtient un objet

$$\mu_X(\mathcal{O}_X) \in D^b(I(\mathbb{C}_{T_X^*})).$$

Ce dernier possède la propriété remarquable suivante.

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $X$  une variété complexe de dimension  $n$ . Alors,  $\mu_X(\mathcal{O}_X)|_{\dot{T}^*X}$  est concentré en degré  $-n$ .*

DÉMONSTRATION. — Nous pouvons supposer que  $X = \mathbb{C}^n$ . Convenons alors de noter

$$q_1 : T^*X \times X \rightarrow T^*X \quad q_2 : T^*X \times X \rightarrow X$$

les projections. Fixons un point  $p = (x_0, \xi_0)$  dans  $\dot{T}^*X$ . On a alors

$$\mu_X(\mathcal{O}_X) \otimes \tilde{\mathbb{C}}_p = \tilde{\mathbb{C}}_p \otimes Rq_{1!} \left( \varinjlim_{\varepsilon, \delta > 0} (\mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}} \otimes q_2^{-1} \mathcal{O}_X) \right) [2n],$$

où  $F_{\delta, \varepsilon} = \{((x, \xi), x') : \delta \geq \langle \xi_0, x' - x \rangle > \varepsilon |x' - x|\}$ . Par conséquent, en utilisant la remarque 1.1.8, il suffit de prouver que

$$Rq_{1!}(\mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}} \otimes q_2^{-1} \mathcal{O}_X)$$

est concentrée en degré  $n$ . Nous avons

$$Rq_{1!}(\mathbb{C}_{F_{\delta, \varepsilon}} \otimes q_2^{-1} \mathcal{O}_X)_{(x_1, \xi_1)} = R\Gamma_c(\{x' \in X : \delta \geq \langle \xi_0, x' - x_1 \rangle > \varepsilon |x' - x_1|\}, \mathcal{O}_X).$$

Notre assertion se déduit donc du fait que la cohomologie à support compact de  $\mathcal{O}_X$  sur la différence de deux ouverts convexe est concentrée en degré  $n$ .  $\square$

Remarquons maintenant que  $H^{-n}(\mu_X(\mathcal{O}_X)|_{\dot{T}^*X})$  possède une structure naturelle de  $\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X}$ -module, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme d'anneaux canonique

$$\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X} \rightarrow \mathcal{E}nd(H^{-n}(\mu_X(\mathcal{O}_X)|_{\dot{T}^*X})).$$

En effet, notons  $p_k : X \times X \rightarrow X$  la  $k$ -ème projection et posons  $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)} := \mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{p_2^{-1} \mathcal{O}_X} p_2^{-1} \mathcal{O}_X^{(n)}$ . On a alors des morphismes

$$Rp_{1!}(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}[n] \otimes p_2^{-1} \mathcal{O}_X) \rightarrow Rp_{1!}(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}[n]) \rightarrow \mathcal{O}_X,$$

qui induisent un morphisme

$$\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}[n] \rightarrow R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{O}_X, p_1^! \mathcal{O}_X).$$

En utilisant le corollaire 2.2.2, on obtient donc un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X \rightarrow \mu_{\Delta_X}((\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}[n])) &\rightarrow \mu_{\Delta_X}(R\mathcal{H}om(p_2^{-1} \mathcal{O}_X, p_1^! \mathcal{O}_X)) \\ &= \mu_{\text{hom}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om(\mu_X(\mathcal{O}_X), \mu_X(\mathcal{O}_X)). \end{aligned}$$

fournissant la structure désirée en passant au  $H^0$ . Par conséquent, le théorème 2.6.1 implique que  $\mu_X(\mathcal{O}_X)|_{\dot{T}^*X}$  appartient à la catégorie dérivée

$$D^b(\text{Mod}(\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X}, I(\mathbb{C}_{\dot{T}^*X})))$$

de la catégorie abélienne  $\text{Mod}(\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X}, \mathbf{I}(\mathbb{C}_{\dot{T}^*X}))$  des ind-faisceaux  $\mathcal{F}$  sur  $\dot{T}^*X$  munis d'un morphisme d'anneaux  $\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X} \rightarrow \text{End}(\mathcal{F})$ .

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

**Théorème 2.6.2.** *Soit  $X$  une variété complexe. Alors  $\mathcal{F} \mapsto \mu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_{\dot{T}^*X}$  est un foncteur bien défini de  $D^b(\mathbb{C}_X)$  dans  $D^b(\mathcal{E}_X|_{\dot{T}^*X})$ .*





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Revêtements étales et groupe fondamental* – Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.
- [2] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* – Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225.
- [3] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 : Théorie des topos* – Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269.
- [4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2* – Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.
- [5] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3* – Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305.
- [6] *Cohomologie  $l$ -adique et fonctions  $L$*  – Springer-Verlag, Berlin, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589.
- [7] E. ANDRONIKOF – « Microlocalisation tempérée », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1994), no. 57, p. 176.
- [8] M. ASAKURA – « Motives and algebraic de Rham cohomology », The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 133–154.

- [9] J. AYOUB – « Le formalisme des 4 opérations », *www.math.uiuc.edu/K-theory/0717*, January 2005.
- [10] P. BALMER & M. SCHLICHTING – « Idempotent completion of triangulated categories », *J. Algebra* **236** (2001), no. 2, p. 819–834.
- [11] P. BAUM, W. FULTON & R. MACPHERSON – « Riemann-Roch for singular varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1975), no. 45, p. 101–145.
- [12] A. A. BEĬLINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5–171.
- [13] S. BLOCH – « Algebraic cycles and higher  $K$ -theory », *Adv. in Math.* **61** (1986), no. 3, p. 267–304.
- [14] ———, « Algebraic cycles and the Beĭlinson conjectures », The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984), Contemp. Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 65–79.
- [15] ———, « Algebraic cycles and the Lie algebra of mixed Tate motives », *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), no. 4, p. 771–791.
- [16] ———, « An elementary presentation for  $K$ -groups and motivic cohomology », Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 239–244.
- [17] ———, « The moving lemma for higher Chow groups », *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no. 3, p. 537–568.
- [18] ———, « Lectures on mixed motives », Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 329–359.
- [19] S. BLOCH & I. KŘÍŽ – « Mixed Tate motives », *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), no. 3, p. 557–605.
- [20] M. BÖKSTEDT & A. NEEMAN – « Homotopy limits in triangulated categories », *Compositio Math.* **86** (1993), no. 2, p. 209–234.
- [21] A. I. BONDAL & M. M. KAPRANOV – « Enhanced triangulated categories », *Mat. Sb.* **181** (1990), no. 5, p. 669–683.
- [22] F. BORCEUX – *Handbook of categorical algebra. 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories and structures.
- [23] K. S. BROWN & S. M. GERSTEN – « Algebraic  $K$ -theory as generalized sheaf cohomology », Algebraic  $K$ -theory, I : Higher  $K$ -theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, p. 266–292. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [24] A. CORTI & M. HANAMURA – « Motivic decomposition and intersection Chow groups. I », *Duke Math. J.* **103** (2000), no. 3, p. 459–522.

- [25] P. DELIGNE – « Théorie de Hodge. I », Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 425–430.
- [26] ———, « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.
- [27] ———, « La conjecture de Weil. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 43, p. 273–307.
- [28] ———, « Théorie de Hodge. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 44, p. 5–77.
- [29] ———, *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$ , Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.
- [30] ———, « La conjecture de Weil. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, p. 137–252.
- [31] P. DELIGNE, J. S. MILNE, A. OGUS & K.-Y. SHIH – *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin, 1982, Philosophical Studies Series in Philosophy, 20.
- [32] F. DÉGLISE – « Modules homotopiques avec transferts et Motifs génériques », Thèse, Université Paris VII Denis Diderot, 2002.
- [33] ———, « Around the gysin triangle », [www.math.univ-paris13.fr/~deglise/preprint.html](http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/preprint.html), January 2005.
- [34] S. EILENBERG & J. A. ZILBER – « On products of complexes », *Amer. J. Math.* **75** (1953), p. 200–204.
- [35] T. EKEDAHL – « On the adic formalism », The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 197–218.
- [36] E. FREITAG & R. KIEHL – *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.
- [37] E. M. FRIEDLANDER – *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Mathematics Studies, vol. 104, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.
- [38] ———, « Motivic complexes of Suslin and Voevodsky », *Astérisque* (1997), no. 245, p. Exp. No. 833, 5, 355–378, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.
- [39] E. M. FRIEDLANDER & A. SUSLIN – « The spectral sequence relating algebraic  $K$ -theory to motivic cohomology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), no. 6, p. 773–875.
- [40] E. M. FRIEDLANDER & V. VOEVODSKY – « Bivariant cycle cohomology », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 138–187.

- [41] W. FULTON – « Rational equivalence on singular varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1975), no. 45, p. 147–167.
- [42] ———, *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 54, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1984.
- [43] ———, *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [44] T. GEISSER & M. LEVINE – « The  $K$ -theory of fields in characteristic  $p$  », *Invent. Math.* **139** (2000), no. 3, p. 459–493.
- [45] ———, « The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky », *J. Reine Angew. Math.* **530** (2001), p. 55–103.
- [46] D. R. GRAYSON – « Universal exactness in algebraic  $K$ -theory », *J. Pure Appl. Algebra* **36** (1985), no. 2, p. 139–141.
- [47] A. GROTHENDIECK – « Motifs », Transcription d'un manuscrit de A. Grothendieck, [www.math.jussieu.fr/~leila/mathtexts.php](http://www.math.jussieu.fr/~leila/mathtexts.php), 1965-1970.
- [48] ———, « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.
- [49] ———, « La théorie des classes de Chern », *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), p. 137–154.
- [50] ———, « Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1960), no. 4, p. 228.
- [51] ———, « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 8, p. 222.
- [52] ———, « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 11, p. 167.
- [53] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1964), no. 20, p. 259.
- [54] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 24, p. 231.
- [55] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 28, p. 255.
- [56] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 32, p. 361.
- [57] ———, « Standard conjectures on algebraic cycles », *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 193–199.

- [58] ———, « Récoltes et Semailles », Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien, 1985.
- [59] M. HANAMURA – « Mixed motives and algebraic cycles. I », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 6, p. 811–821.
- [60] ———, « Mixed motives and algebraic cycles. III », *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 1, p. 61–82.
- [61] ———, « Homological and cohomological motives of algebraic varieties », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 2, p. 319–349.
- [62] ———, « Mixed motives and algebraic cycles. II », *Invent. Math.* **158** (2004), no. 1, p. 105–179.
- [63] H. HIRONAKA – « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II », *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), 109–203; *ibid. (2)* **79** (1964), p. 205–326.
- [64] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [65] M. HOVEY – « Model category structures on chain complexes of sheaves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 6, p. 2441–2457 (electronic).
- [66] A. HUBER – *Mixed motives and their realization in derived categories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1604, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [67] ———, « Mixed perverse sheaves for schemes over number fields », *Compositio Math.* **108** (1997), no. 1, p. 107–121.
- [68] ———, « Realization of Voevodsky’s motives », *J. Algebraic Geom.* **9** (2000), no. 4, p. 755–799.
- [69] ———, « Corrigendum to : “Realization of Voevodsky’s motives” [J. Algebraic Geom. 9 (2000), no. 4, 755–799] », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 1, p. 195–207.
- [70] U. JANNSEN – « Continuous étale cohomology », *Math. Ann.* **280** (1988), no. 2, p. 207–245.
- [71] ———, « On the  $l$ -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology », Galois groups over  $\mathbf{Q}$  (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, p. 315–360.
- [72] ———, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1400, Springer-Verlag, Berlin, 1990, With appendices by S. Bloch and C. Schoen.
- [73] ———, « Motivic sheaves and filtrations on Chow groups », Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 245–302.
- [74] ———, « Mixed motives, motivic cohomology, and Ext-groups », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)* (Basel), Birkhäuser, 1995, p. 667–679.
- [75] U. JANNSEN, S. KLEIMAN & J.-P. SERRE (éds.) – *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55, Providence, RI, American Mathematical Society, 1994.

- [76] ——— (éds.) – *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55, Providence, RI, American Mathematical Society, 1994.
- [77] J. F. JARDINE – *Generalized étale cohomology theories*, Progress in Mathematics, vol. 146, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [78] ———, « Motivic symmetric spectra », *Doc. Math.* **5** (2000), p. 445–553 (electronic).
- [79] B. KAHN – « The Geisser-Levine method revisited and algebraic cycles over a finite field », *Math. Ann.* **324** (2002), no. 3, p. 581–617.
- [80] M. KASHIWARA – « On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **10** (1974/75), p. 563–579.
- [81] ———, « The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 2, p. 319–365.
- [82] ———, « Quantization of contact manifolds », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **32** (1996), no. 1, p. 1–7.
- [83] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – « Microlocal study of sheaves », *Astérisque* (1985), no. 128, p. 235, Corrections to this article can be found in *Astérisque* No. 130, p. 209.
- [84] ———, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.
- [85] ———, « Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1996), no. 64, p. iv+76.
- [86] ———, « Ind-sheaves, distributions, and microlocalization », *Seminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 1998–1999*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 1999, p. Exp. No. XXII, 13.
- [87] ———, « Ind-sheaves », *Astérisque* (2001), no. 271, p. 136.
- [88] ———, « Microlocal study of ind-sheaves. I. Micro-support and regularity », *Astérisque* (2003), no. 284, p. 143–164, *Autour de l'analyse microlocale*.
- [89] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, F. IVORRA & I. WASCHKIES – « Microlocalization of Ind-sheaves », *Studies in Lie Theory : A. Joseph Festschrift*, Birkhäuser, Boston, MA, 2005, p. 171–221.
- [90] K. KATO & S. SAITO – « Global class field theory of arithmetic schemes », *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II* (Boulder, Colo., 1983), *Contemp. Math.*, vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 255–331.
- [91] R. KIEHL & R. WEISSAUER – *Weil conjectures, perverse sheaves and l'adic Fourier transform*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [92] S. L. KLEIMAN – « The standard conjectures », *Motives* (Seattle, WA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 3–20.

- [93] I. KRÍŽ & J. P. MAY – « Derived categories and motives », *Math. Res. Lett.* **1** (1994), no. 1, p. 87–94.
- [94] ———, « Operads, algebras, modules and motives », *Astérisque* (1995), no. 233, p. 145pp.
- [95] M. LEVINE – « Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic  $K$ -theory », *Algebraic  $K$ -theory and algebraic topology* (Lake Louise, AB, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 407, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, p. 167–188.
- [96] ———, « Bloch’s higher Chow groups revisited », *Astérisque* (1994), no. 226, p. 10, 235–320,  $K$ -theory (Strasbourg, 1992).
- [97] ———, « Lambda-operations,  $K$ -theory and motivic cohomology », *Algebraic  $K$ -theory* (Toronto, ON, 1996), Fields Inst. Commun., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 131–184.
- [98] ———, *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [99] ———, « Techniques of localization in the theory of algebraic cycles », *J. Algebraic Geom.* **10** (2001), no. 2, p. 299–363.
- [100] ———, « Algebraic cobordism II », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0577](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0577), June 2002.
- [101] ———, « The homotopy coniveau filtration », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0628](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0628), April 2003.
- [102] M. LEVINE & F. MOREL – « Cobordisme algébrique. I », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), no. 8, p. 723–728.
- [103] ———, « Cobordisme algébrique. II », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), no. 9, p. 815–820.
- [104] ———, « Algebraic cobordism I », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0547](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0547), February 2002.
- [105] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.
- [106] Z. MEBKHOUT – « Une autre équivalence de catégories », *Compositio Math.* **51** (1984), no. 1, p. 63–88.
- [107] ———, « Une équivalence de catégories », *Compositio Math.* **51** (1984), no. 1, p. 51–62.
- [108] F. MOREL & V. VOEVODSKY – «  $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory of schemes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1999), no. 90, p. 45–143 (2001).
- [109] A. NEEMAN – *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [110] Y. A. NISNEVICH – « The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic  $K$ -theory », *Algebraic  $K$ -theory : connections with geometry and topology* (Lake Louise, AB, 1987), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, p. 241–342.

- [111] D. QUILLEN – « Higher algebraic  $K$ -theory. I », Algebraic  $K$ -theory, I : Higher  $K$ -theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [112] M. RAYNAUD & L. GRUSON – « Critères de platitude et de projectivité. Techniques de “platification” d’un module », *Invent. Math.* **13** (1971), p. 1–89.
- [113] P. C. ROBERTS – *Multiplicities and Chern classes in local algebra*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 133, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [114] M. SAITO – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24** (1988), no. 6, p. 849–995 (1989).
- [115] ———, « Mixed Hodge modules », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), no. 2, p. 221–333.
- [116] ———, « Arithmetic mixed sheaves », *Invent. Math.* **144** (2001), no. 3, p. 533–569.
- [117] M. SATO – « Hyperfunctions and partial differential equations », Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and related topics, Tokyo Univ. Press, 1969.
- [118] M. SATO, T. KAWAI & M. KASHIWARA – « Microfunctions and pseudo-differential equations », Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971 ; dedicated to the memory of André Martineau), Springer, Berlin, 1973, p. 265–529. Lecture Notes in Math., Vol. 287.
- [119] A. J. SCHOLL – « Extensions of motives, higher Chow groups and special values of  $L$ -functions », Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92, Progr. Math., vol. 116, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, p. 279–292.
- [120] ———, « Classical motives », Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 163–187.
- [121] J.-P. SERRE – *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [122] N. SPALTENSTEIN – « Resolutions of unbounded complexes », *Compositio Math.* **65** (1988), no. 2, p. 121–154.
- [123] A. SUSLIN & V. VOEVODSKY – « Singular homology of abstract algebraic varieties », *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.
- [124] ———, « Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients », The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, p. 117–189.
- [125] ———, « Relative cycles and Chow sheaves », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 10–86.
- [126] A. A. SUSLIN – « Higher Chow groups and étale cohomology », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 239–254.



- [127] J.-L. VERDIER – « Des catégories dérivées des catégories abéliennes », *Astérisque* (1996), no. 239, p. xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.
- [128] V. VOEVODSKY – « Homology of schemes », *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 1, p. 111–153.
- [129] ———, «  $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, no. Extra Vol. I, 1998, p. 579–604 (electronic).
- [130] ———, « Voevodsky’s Seattle lectures :  $K$ -theory and motivic cohomology », Algebraic  $K$ -theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, Notes by C. Weibel, p. 283–303.
- [131] ———, « Cohomological theory of presheaves with transfers », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 87–137.
- [132] ———, « Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0443](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0443), September 2000.
- [133] ———, « Triangulated categories of motives over a field », Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.
- [134] ———, « Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topology », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0444](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0444), September 2000.
- [135] ———, « Cancellation theorem », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0541](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541), January 2002.
- [136] ———, « Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic », *Int. Math. Res. Not.* (2002), no. 7, p. 351–355.
- [137] ———, « Motives over simplicial schemes », [www.math.uiuc.edu/K-theory/0638](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0638), June 2003.
- [138] ———, « Motivic cohomology with  $\mathbf{Z}/2$ -coefficients », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 98, p. 59–104.
- [139] ———, « Notes on motivic cohomology », written from the IAS lectures by Carlo Mazza and Charles Weibel, [www.math.uiuc.edu/K-theory/0486](http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0486), January 2004.
- [140] I. WASCHKIES – « Faisceaux pervers microlocaux », Thèse, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, 2002.
- [141] ———, « The stack of microlocal perverse sheaves », *Bull. Soc. Math. France* **132** (2004), no. 3, p. 397–462.
- [142] ———, « Microlocal Riemann-Hilbert correspondence », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), no. 1, p. 37–72.
- [143] C. WEIBEL – « Products in higher Chow groups and motivic cohomology », Algebraic  $K$ -theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 305–315.

- [144] ———, « A road map of motivic homotopy and homology theory », *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 131, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, p. 385–392.



**Résumé.** — Dans cette thèse, nous construisons un foncteur de réalisation  $\ell$ -adique à coefficients entiers pour les motifs mixtes triangulés géométriques de V. Voevodsky sur un schéma noethérien séparé. Nous montrons que ce foncteur coïncide avec le foncteur à coefficients rationnels construit par A. Huber pour les motifs mixtes géométriques sur un corps de caractéristique nulle.

L'approche que nous adoptons consiste à étudier localement pour les topologies de Nisnevich et étale les correspondances finies. Nous mettons en évidence l'existence d'une décomposition locale des correspondances dont nous étudions les propriétés. Ces résultats nous permettent de montrer que la résolution de Godement d'un faisceau Nisnevich avec transferts est canoniquement munie de transferts compatibles à la structure multiplicative.

Nous donnons aussi une variante modérée du foncteur de réalisation  $\ell$ -adique dans certaines situations géométriques et nous montrons que pour les motifs sur un corps parfait le foncteur de réalisation que nous construisons est compatible aux classes de cycles  $\ell$ -adiques sur les groupes de Chow supérieurs.

**Mots clefs.** — Motifs mixtes, réalisations  $\ell$ -adiques, cycles algébriques

**Abstract.** — In this work, we provide an integral  $\ell$ -adic realization functor for the geometrical mixed motives of V. Voevodsky over a noetherian separated scheme. We prove that this functor is the same up to isomorphism as the one constructed by A. Huber for rational mixed motives over a ground field of characteristic zero.

Our approach to the realization problem is to study finite correspondences from the Nisnevich and étale local point of view. We set the existence of a local decomposition for finite correspondences which implies the existence of local transfers. This result allows us to provide canonical transfers on the Godement resolution of a Nisnevich sheaf with transfers.

We also give a moderate  $\ell$ -adic realization functor in some geometrical situation and we prove that, for a perfect field, the realization functor is compatible with the  $\ell$ -adic cycle class map on higher Chow groups.

**Key words.** — Mixed motives,  $\ell$ -adic realizations, algebraic cycles