HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Université de Rennes 1

Mention : Mathématiques

École doctorale Matisse

présentée par

Florian Ivorra

préparée à l'Institut de recherche mathématique de Rennes, UMR 6625 du CNRS

MOTIFS MIXTES, FAISCEAUX PERVERS, CYCLES PROCHES ET RÉCIPROCITÉ

soutenue le 26 novembre 2014
devant le jury composé de :

Pierre Berthelot
Professeur émérite, Université de Rennes 1 / examinateur
Jean-Benoît Bost
Professeur, Université Paris 11 / examinateur
Bernard Le Stum
Maître de conférences, Université de Rennes 1 / examinateur
Marc Levine
Professeur, Universität Duisburg-Essen / rapporteur
François Loeser
Professeur, Université Paris 6 / rapporteur
Claude Sabbah
Directeur de recherche, École polytechnique / examinateur

au vu des rapports de :
Annette Huber-Klawitter
Professeur, Universität Freiburg
Marc Levine
Professeur, Universität Duisburg-Essen
François Loeser
Professeur, Université Paris 6

Table des matières

Remerciements

Je suis extrêmement reconnaissant envers Annette Huber-Klawitter, François Loeser et Marc Levine d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon habilitation et les remercie chaleureusement du temps qu'ils ont bien voulu consacrer à ce travail et de l'intérêt qu'ils y ont porté. Je voudrais associer également à ces remerciements Pierre Berthelot, Jean-Benoît Bost, Bernard Le Stum et Claude Sabbah qui me font l'honneur et le plaisir de participer également au jury de cette habilitation.

Certains des travaux présentés dans ce mémoire ont été obtenus en collaboration. Je remercie vivement mes co-auteurs, Joseph Ayoub, Kay Rülling et Julien Sebag, pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux et leur amitié. Mes remerciements vont aussi à Bruno Kahn pour m'avoir fait part de ses idées autour de la notion de faisceaux à réciprocité et pour m'avoir suggéré et incité à travailler dans cette direction.

Je dois des remerciements particulièrement à Marc Levine qui m'a offert à de nombreuses reprises la possibilité de séjourner longuement à Essen, ainsi qu'aux membres de l'Institut de mathématiques de Rennes, collègues et personnels administratifs, pour les excellentes conditions de travail qu'ils ont pu me fournir durant ces années.

1 Présentation générale des travaux

1.1 Introduction

Imaginée par A. Grothendieck au début des années 60 comme théorie cohomologique universelle des variétés algébriques et intimement liée aux cycles algébriques, la théorie des motifs après une longue phase de gestation a connu à partir des années 90 un renouveau et un essor très important avec tout particulièrement le développement de la théorie de l'homotopie motivique, analogue en géométrie algébrique de la topologie algébrique classique.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent mes travaux que le présent mémoire de synthèse se propose de présenter. S'agissant d'une habilitation à diriger des recherches j'ai choisi d'exclure de cette présentation les travaux issus de ma thèse de doctorat afin de me concentrer sur les recherches réalisées depuis ma soutenance. Ainsi le travail [KSIW06], prolongement de mon travail de DEA, ainsi que les travaux [Ivo06, Ivo07, Ivo10, Ivo11b] qui ont fait l'objet de ma thèse de doctorat ne figureront pas dans cette exposition, tout comme [Ivo11a] qui est un texte d'exposition. Le lecteur trouvera à la fin de ce chapitre la liste complète de mes travaux.

1.1.1 Travaux présentés

Si l'on tente de regrouper les recherches que j'ai menées ces dernières années par thèmes, trois directions principales émergent, les travaux [Ivo08] et [IS12] par les questions qu'ils abordent étant plus isolés.

Je me suis intéressé aux relations entre la théorie des motifs, les faisceaux pervers et la théorie de Hodge développée par M. Saito. Mes travaux [Ivo12, Ivo14b, Ivo14d, Ivo14c] se rattachent à ces questions.

La théorie des cycles proches motiviques, sous différentes formes, constitue le thème central de [IS13, AIS13]. En collaboration avec J. Ayoub et J. Sebag, j'y étudie en effet certains liens entre la théorie des cycles proches développée dans le cadre de la théorie homotopique stable des schémas par J. Ayoub, la géométrie analytique rigide ou les travaux de J. Denef et F. Loeser basés sur l'intégration motivique.

Quant aux articles [Ivo14a], ou [IR12] en collaboration avec K. Rülling, ils portent sur la notion de modules de cycles, de faisceaux invariants par homotopie et d'une généralisation de ces derniers introduite par B. Kahn basée sur la théorie du corps de classes de M. Rosenlicht et J.-P. Serre pour les groupes algébriques.

La théorie des motifs forme le dénominateur commun de ces recherches, les motifs y apparaissent cependant sous diverses formes :

- catégories abéliennes de motifs [Ivo14d, Ivo14c], les travaux de M. Nori jouant alors un rôle essentiel ;
- catégories triangulées de motifs qu'il s'agisse de celles produites par la théorie homotopique des schémas [IS13, AIS13, Ivo14c] ou bien de celle construite par M. Levine [Ivo08] ;
- motifs rigides associés aux variétés analytiques rigides [AIS13] ;
- motifs virtuels (sous la forme du groupe de Grothendieck des variétés ou bien des groupes de Grothendieck des catégories de motifs) apparaissant dans la théorie de l'intégration motivique [IS12, IS13] ;
- motifs non invariants par homotopie, ou une ébauche de ceux-ci dans [IR12].

1.1.2 Organisation du présent mémoire

Dans la suite de ce chapitre, je donne un aperçu, sans preuves, des résultats que j'ai obtenus depuis la thèse et indique quelques motivations. Le lecteur souhaitant avoir de plus amples détails pourra se référer aux chapitres suivants, que l'on pourra lire indépendamment les uns des autres, et dans lesquels j'ai essayé de donner une présentation relativement détaillée et précise des résultats obtenus en essayant toutefois d'éviter les considérations les plus techniques. De ce fait, plutôt que de donner des preuves complètes (que l'on pourra trouver dans les articles), j'ai préféré présenter les étapes les plus importantes des démonstrations ainsi que les idées essentielles.

Le lecteur trouvera au second chapitre un survol de différents aspects de la théorie des motifs intervenant dans mes travaux. Cela constitue l'occasion, je l'espère, de mettre en évidence les principaux travaux sur lesquels mes recherches s'appuient, le rôle joué par les travaux de nombreux mathématiciens et toute l'influence qu'ils ont pu avoir. On trouvera également certains rappels au cours du texte.

Les chapitres restants reflètent les principaux thèmes de mes recherches dont ils reprennent l'organisation. Mes travaux sont ainsi regroupés suivant les trois directions principales, un chapitre étant dédié à chacune d'entre elles, et pour ne pas allonger trop le présent mémoire, j'ai choisi de ne pas détailler plus les résultats de [Ivo08] et [IS12].

1.2 Faisceaux pervers, modules de Hodges mixtes et motifs

1.2.1 Motivation

Les travaux [Ivo12, Ivo14b, Ivo14d, Ivo14c] ont pour origine le problème de construire un foncteur de réalisation de Hodge dans un contexte relatif, problème auquel nous avons finalement pu apporter une solution dans [Ivo14c]. Soit X un k-schéma, on peut associer à tout X-schéma quasi-projectif lisse, son homologie de Hodge

$$a_!^{\mathscr{H}} a^!_{\mathscr{H}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \tag{1}$$

en appliquant le formalisme des six opérations au morphisme structural $a : Y \to X$ [Sai90]. Ceci fournit un foncteur

$$\mathsf{Sm}/X \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))$$

dont on souhaite montrer qu'il provient d'un foncteur $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\text{ct}}(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))$ de sorte que (1) soit l'image du motif homologique de Y. Les travaux [Hub00, Ayo10, Hub04, Ayo14] et [Ivo07, Ivo10] apportent une réponse complète à l'analogue ℓ-adique ou Betti de ce problème. En théorie de Hodge, les résultats fournis par la littérature sont bien moins satisfaisants puisqu'ils ne concernent que les coefficients absolus i.e. les motifs mixtes sur $\mathsf{Spec}(\mathbb{C})$. En notant $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ la catégorie abélienne des structures de Hodge mixtes polarisables, plusieurs constructions différentes de foncteurs triangulés

$$\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}})$$

ont été données : celle de A. Huber que l'on trouvera dans [Hub00, Hub04], celle de M. Levine donnée dans [Lev98] et une construction due à M. Nori qui bien que non publiée se trouve esquissée dans [Lev05, Nor].

1.2.2 Complexes de Hodge ou modules de Hodge mixtes ? [Ivo12, Ivo14b]

Dans un premier temps, nous avons essayé de généraliser l'approche de A. Huber et M. Levine. Pour cela le prérequis est de pouvoir disposer d'une version relative de l'équivalence de A. Beĭlinson entre la catégorie dérivée des structures de Hodge mixtes polarisables et la catégorie de complexes de Hodge mixtes polarisables [Beĭ86]. Cela conduit purement à un problème de théorie de Hodge auquel nous avons apporté une réponse partielle dans [Ivo12, Ivo14b].

Rappelons que si X est une variété algébrique complexe, M. Saito a introduit dans [Sai00] des catégories de complexes de Hodge mixtes sur X. Plus précisément, il construit deux catégories triangulées $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})$ ainsi que des foncteurs triangulés :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q}) \arrow[u, "\mathrm{DR}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$ est la catégorie abélienne des modules de Hodge mixtes [Sai88, Sai90].

Lorsque $X = \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$ l'un des théorèmes principaux de [Sai90] assure que les catégories $\mathrm{MHM}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})$ et $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ sont équivalentes, M. Saito montre alors dans ce cas [Sai00, 2.10] que le foncteur ε

$$\varepsilon : \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$$

est une équivalence, ce qui montre en particulier que la catégorie des complexes de Hodge mixtes de M. Saito et celle de A. Beĭlinson sont équivalentes. Bien que leurs définitions soient très similaires, la construction de M. Saito est plus complexe que celle de A. Beĭlinson et il n'est pas clair a priori qu'elles produisent un résultat équivalent.

Bien que la définition de la catégorie de complexes de Hodge mixtes $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ soit un peu trop grossière pour espérer que le foncteur ε soit essentiellement surjectif, on peut néamoins se poser la question suivante :

Question. — *Soit X une variété algébrique complexe lisse. Le foncteur ε de* M. Saito *est-il pleinement fidèle ? Autrement dit, le morphisme induit*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\underline{\mathscr{M}},\underline{\mathscr{N}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\varepsilon(\underline{\mathscr{M}}),\varepsilon(\underline{\mathscr{N}}))$$

est-il un isomorphisme pour tout complexe de modules de Hodge mixtes $\underline{\mathscr{M}},\underline{\mathscr{N}}$?

Remarquons que l'on a un carré commutatif (à un 2-isomorphisme près) de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\text{forgetful}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \arrow[d, "\text{forgetful}"] \\ \mathrm{D^b}(\mathscr{P}(X)) \arrow[r] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q}) \end{tikzcd} \tag{2}$$

où $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q})$ est la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur X^{an} à cohomologie algébriquement constructible, $\mathscr{P}(X)$ est la catégorie des faisceaux pervers et le foncteur $\mathrm{D^b}(\mathscr{P}(X)) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q})$ est celui construit dans [BBD82, 3.1]. Comme l'a montré A. Beĭlinson dans [Beĭ87c], ce foncteur est une équivalence de catégories. Une réponse positive à la question précédente peut donc être vue comme une généralisation en dimension supérieure de l'équivalence de [Beĭ86] et comme un relèvement en théorie de Hodge de l'équivalence de [Beĭ87c].

La construction de ε dans [Sai00] dépend de choix assez arbitraires. Dans [Ivo12] nous avons apporté quelques compléments sur les catégories de complexes de Hodge nécessaires pour établir le résultat principal de [Ivo14b]. Nous vérifions directement que les catégories $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p}$ sont équivalentes, et donnons différentes présentations des catégories $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$. Nous montrons que la catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ des complexes, munis de $\mathbb{Q}$-structures, de $\mathscr{D}_X$-modules filtrés à cohomologie holonome régulière, est munie d'une t-structure relevant la t-structure perverse et utilisons cette t-structure pour construire une variante du foncteur ε :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \xrightarrow{\mathrm{real}_X} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}.$$

pour laquelle les choix sont effectués de manière plus canonique. Il s'agit d'un point essentiellement technique mais qui a son importance dans [Ivo14b]. Dans la suite nous considérerons cette version du foncteur ε.

Rappelons que si X est une variété algébrique complexe lisse purement de dimension d_X, un module de Hodge mixte $\underline{\mathscr{M}}$ sur X est dit lisse lorsque $\mathsf{rat}(\mathscr{M})[-d_X]$ est un système local, où

$$\mathsf{rat} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q})$$

est la composée des foncteurs du carré (2). Énonçons maintenant le résultat principal de [Ivo14b].

Théorème (**[Ivo12, Ivo14b]**). — *Soient X une variété algébrique complexe projective et lisse et $\underline{\mathscr{M}},\underline{\mathscr{N}}$ deux complexes de modules de Hodge mixtes sur X. Si $\underline{\mathscr{M}}$ est à cohomologie lisse* i.e. *si les modules de Hodge mixtes $\mathsf{H}^i(\underline{\mathscr{M}})$ sont lisses pour tout $i\in\mathbb{Z}$, alors le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\underline{\mathscr{M}},\underline{\mathscr{N}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\mathrm{real}_X(\underline{\mathscr{M}}),\mathrm{real}_X(\underline{\mathscr{N}}))$$

est un isomorphisme.

Notons que ce résultat est insuffisant pour permettre de construire les foncteurs de réalisations de Hodge pour des variétés algébriques complexes lisses. Il l'est probablement si l'on accepte de se restreindre aux motifs lisses mais nous n'avons pas cherché à vérifier ce point.

1.2.3 Motifs de Nori pervers : [Ivo14d]

Fixons un corps k de caractéristique zéro ainsi qu'un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. En utilisant une approche tannakienne, Madhav Nori a construit une catégorie abélienne $\mathrm{EHM}(k,\mathbb{Q})$. Bien que M. Nori n'ait pas lui même publié son travail, on en trouvera plusieurs survol dans la littérature (voir e.g. [Lev05, vW11, HMS12]). Très grossièrement la catégorie des motifs de Nori $\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k)$ est la catégorie abélienne universelle ayant un foncteur, $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle, de réalisation de Betti, à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et une théorie homologique pour les couples formés d'une k-variété quasi-projective et d'un sous-schéma fermé. Être un motif dans $\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k)$ est la meilleure structure que l'on puisse mettre sur l'homologie relative des k-schémas quasi-projectifs. En particulier, puisque l'homologie relative porte une structure de Hodge mixte polarisable, la construction de M. Nori assure que le foncteur de réalisation de Betti se factorise en un foncteur exact et fidèle

$$\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k) \to \mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}.$$

Dans [Ivo14d] nous généralisons le travail de M. Nori aux k-schémas quasi-projectifs obtenant une catégorie abélienne de motifs de réalisation des faisceaux pervers. Ceci repose sur le théorème suivant qui permet en particulier d'appliquer les idées de M. Nori aux catégories de faisceaux pervers puisqu'elles en vérifient les hypothèses.

Théorème ([**Ivo14d**]). — *Soient K un corps de caractéristique zéro et $\mathscr{P}$ une catégorie abélienne K-linéaire, noethérienne, artinienne et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(P,Q)$ soit de dimension finie sur K pour tout $P,Q \in \mathscr{P}$. Alors pour tout carquois $\mathscr{Q}$ et toute représentation $T : \mathscr{Q} \to \mathscr{P}$, il existe une catégorie abélienne K-linéaire $\mathscr{A}$, une représentation $R : \mathscr{Q} \to \mathscr{A}$, un foncteur K-linéaire exact et fidèle $F : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ et un isomorphisme de représentations $\alpha : F \circ R \to T$ tels que le quadruplet $(\mathscr{A}, R, F, \alpha)$ satisfasse la propriété universelle suivante.*

Pour tout quadruplet $(\mathscr{B}, S, G, \beta)$, où $\mathscr{B}$ est une catégorie abélienne K-linéaire, $S : \mathscr{Q} \to \mathscr{B}$ est une représentation, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{P}$ est un foncteur K-linéaire exact et fidèle $G : \mathscr{B} \to \mathscr{P}$, et $\beta : G \circ S \to T$ est un isomorphisme de représentations, les conditions suivantes sont satisfaites.

– *Il existe un foncteur K-linéaire $H : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs)*

$$\gamma : H \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta : G \circ H \xrightarrow{\simeq} F$$

tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H \circ R \arrow[r, "G\star\gamma"] \arrow[d, "\delta\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

– *Si $H' : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un foncteur K-linéaire et*

$$\gamma' : H' \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta' : G \circ H' \xrightarrow{\simeq} F$$

sont deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs) tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H' \circ R \arrow[r, "G\star\gamma'"] \arrow[d, "\delta'\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

soit commutatif, alors il existe une unique transformation naturelle $\theta : H \to H'$ telle que $\gamma' \circ (\theta \star R) = \gamma$ et $\delta' \circ (G \star \theta) = \delta$.

Lorsque $\mathscr{P}$ est la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie, ce résultat est dû à M. Nori. Nous déduisons la version générale donnée ci-dessus du théorème de M. Nori en utilisant la caractérisation des catégories de modules sur une K-coalgèbre obtenue par M. Takeuchi dans [Tak77].

Ceci permet alors de paraphraser la construction de la catégorie de motifs mixtes de M. Nori en utilisant cette fois l'homologie perverse relative. Le travail de A. Beĭlinson dans [Beĭ87c] munit en effet les catégories dérivées $\mathrm{D^b}(\mathscr{P}(X))$ d'un formalisme des six foncteurs donnant notamment les adjonctions

$$\mathrm{D^b}(\mathscr{P}(X)) \underset{f_*^{\mathscr{P}}}{\overset{f^*_{\mathscr{P}}}{\leftrightarrows}} \mathrm{D^b}(\mathscr{P}(Y)) \underset{f^!_{\mathscr{P}}}{\overset{f_!^{\mathscr{P}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D^b}(\mathscr{P}(X)).$$

Fixons alors une k-variété quasi-projective X et définissons un triplet relatif (Y, Z, i) comme la donnée d'une k-variété Y munie d'un morphisme de k-variétés $a : Y \to X$, d'un sous-schéma fermé Z de Y et d'un entier relatif $i \in \mathbb{Z}$. À un tel triplet (Y, Z, i) se trouve associé un faisceau pervers sur X

$$\mathsf{T}_X^{\mathscr{P}}(Y, Z, i) := \mathsf{H}^{-i}_{\mathscr{P}}(a_!^{\mathscr{P}}(u_*^{\mathscr{P}} u^!_{\mathscr{P}} a^!_{\mathscr{P}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{P}})))$$

où $u : U \hookrightarrow Y$ est l'immersion ouverte du complémentaire de Z dans Y.

En considérant, comme dans la construction de M. Nori, le carquois $\mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}}$ ayant pour sommets les triplets relatifs et deux types d'arêtes différentes, celles correspondant à la fonctorialité de l'homologie perverse relative et celles correspondant aux morphismes bord, l'homologie perverse définit une représentation

$$\mathsf{T}_X^{\mathscr{M}} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{M}(X).$$

En appliquant le théorème à cette représentation, l'on obtient une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X)$ munie d'un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle

$$\mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}} : \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X) \to \mathscr{P}(X)$$

et d'une factorisation

$$\mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X)$$

de la représentation d'homologie perverse $\mathsf{T}_X^{\mathscr{P}}$. Par construction $\mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{Spec}\, k)$ coïncide avec la catégorie $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$ des motifs effectifs homologiques de M. Nori. La propriété universelle assure en outre que le foncteur $\mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}}$ se factorise par la catégorie $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{go}}$ des modules de Hodge mixtes d'origine géométrique de M. Saito. On peut également définir une catégorie abélienne $\mathscr{N}(X)$ de motifs pervers qui ne sont plus nécessairement effectifs.

1.2.4 Réalisation de Hodge et motifs de Nori pervers : [Ivo14c]

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Notons $\mathbf{Sha}(\mathscr{A},\mathbb{Q})$ la catégorie des faisceaux additifs de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur $\mathscr{A}$ pour la topologie des épimorphismes. Le théorème de plongement prouvé par P. Gabriel dans [Gab62] et généralisé aux catégorie exactes par D. Quillen dans [Qui73] assure que le foncteur de Yoneda

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{i} : \mathscr{A} & \to & \mathbf{Sha}(\mathscr{A},\mathbb{Q}) \\ A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,A) \end{array}$$

est exact, pleinement fidèle et qu'il induit

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{A}}(\mathbf{Sha}(\mathscr{A},\mathbb{Q})),$$

un foncteur triangulé pleinement fidèle.

Résultats principaux de [Ivo14c]. — *Soit X un k-schéma quasi-projectif lisse. Nous construisons une adjonction*

$$\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}) \rightleftarrows \mathrm{D}(\mathbf{Sha}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}),\mathbb{Q})) : \mathsf{RR}^{\mathscr{H}}_X$$

le terme de droite étant la catégorie dérivée non bornée de la catégorie abélienne $\mathbf{Sha}(\mathrm{MHM}(X)),\mathbb{Q})$.

1. *En notant $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q})$ formée des motifs étales constructibles, l'adjoint à gauche $\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X$ induit un foncteur triangulé*
$$\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X : \mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})).$$
2. *Si $a : Y \to X$ est un morphisme lisse de k-schémas quasi-projectif et Y est un schéma affine, alors l'image du motif homologique $\mathrm{M}_X(Y)$ par le foncteur $\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X$ est isomorphe au complexe d'homologie de Hodge $a^{\mathscr{H}}_! a^!_{\mathscr{H}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{H}}_X)$ où*
$$a^{\mathscr{H}}_! : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})) \rightleftarrows \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) : a^!_{\mathscr{H}}$$
sont les foncteurs fournis par le formalisme des six opérations construit par M. Saito *dans [Sai90].*

Notons que dans la construction, l'on peut considérer la catégorie des modules de Hodge mixtes d'origine géométrique. On peut en outre montrer, comme pour les motifs de M. Nori, que l'on dispose d'un résultat plus fin. Par construction, de la catégorie de motifs pervers de [Ivo14d], l'on peut remarquer que le foncteur de réalisation de Hodge $\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X$ se factorise par la catégorie dérivée bornée de $\mathscr{N}(X)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{N}(X)) \arrow[r] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \\ \mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q}). \arrow[u, dotted, "\mathsf{RL}^{\mathscr{N}}_X"] \arrow[ur, "\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X"'] & \end{tikzcd}$$

Lorsque $X = \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$, l'on retrouve en particulier le foncteur de réalisation construit par M. Nori.

1.3 Fibres de Milnor, cycles proches motiviques et motifs rigides

1.3.1 Motif proche et cycles proches virtuels de J. Denef et F. Loeser : [IS13]

Dans [IS13], en collaboration avec J. Sebag, nous nous sommes intéressés au lien entre la théorie des cycles proches motiviques développée par J. Denef et F. Loeser via l'intégration motivique et la théorie des cycles proches construite par J. Ayoub en théorie homotopique stable des schémas.

Le contexte est le suivant : on se donne un corps k de caractéristique zéro, un k-schéma quasi-projectif lisse X et un morphisme de k-schémas $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. On a donc un diagramme commutatif de morphismes de k-schémas

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta := \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_k & \sigma := \mathsf{Spec}(k), \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où i est la section nulle et j désigne l'immersion ouverte canonique.

Dans [DL98, DL01, DL02, Loe00, Loe09], par analogie avec les travaux de J.-I. Igusa, J. Denef and F. Loeser ont associé au morphisme f une série formelle $Z_f(T)$ à coefficients dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$. Les coefficients de cette fonction Zêta sont construits à partir du schéma des arcs de X et J. Denef et F. Loeser ont montré, en utilisant la formule de changement de variables pour les intégrales motiviques, que l'on pouvait explicitement les calculer à l'aide de n'importe qu'elle résolution plongée des singularités de la fibre spéciale dans X. L'expression obtenue montre que la fonction Zêta de J. Denef et F. Loeser est une fonction rationnelle de T. Ce résultat de rationalité leur permet de définir un élément ψ_f du groupe de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$ par passage à la limite :

$$\psi_f := -\left(\lim_{T\to+\infty} Z_f(T)\right)$$

les cycles proches virtuels de J. Denef et Loeser. Si $x \in X_\sigma(k)$ est un point rationnel, en prenant l'image de ψ_f par le morphisme canonique $x^* : \mathscr{M}_{X_\sigma} \to \mathscr{M}_k$ on obtient un élément de $\mathscr{M}_k$

$$\psi_{f,x} := x^*\psi_f$$

que J. Denef et F. Loeser appellent la fibre de Milnor motivique au point x. Leur terminologie se trouve justifiée notamment par le fait que, pour $k = \mathbb{C}$, la fibre de Milnor usuelle et $\psi_{f,x}$ ont même caractéristique d'Euler (à support compact).

Dans la même situation, J. Ayoub a construit dans [Ayo07b] un foncteur cycles proches

$$\Psi_f : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\eta) \to \mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma)$$

où $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}$ désigne la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique stable des schémas à coefficients dans $\mathfrak{M}$ formée par les objets constructibles. Cette construction s'inspire du travail de M. Rapoport et T. Zink [RZ82] et se réalise sur le complexe des cycles proches classiques lorsque $k = \mathbb{C}$ (voir [Ayo10, Théorème 4.9]).

Le théorème principal de [IS13] (raffiné grâce à un résultat de [AIS13]) montre que les deux théories coïncident. Pour cela remarquons que l'on dispose d'un morphisme d'anneaux canonique (voir [IS13, Lemma 2.1])

$$\chi_{X_\sigma,\mathrm{c}} : \mathscr{M}_{X_\sigma} \to \mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma))$$

uniquement déterminé par la formule

$$\chi_{X_\sigma,c}([Y]) = [\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}(Y)]$$

où Y est un X_σ-schéma quasi-projectif et $\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}(Y)$ est le motif cohomologique à support compact de Y.

Le résultat principal de [IS13] est alors le théorème suivant :

***Théorème* ([IS13]).** — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme de k-schémas. On a alors l'égalité*

$$[\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \chi_{X_\sigma,\mathrm{c}}(\psi_f)$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma))$.

En appliquant le théorème de changement de base propre de [Ayo07a], on en déduit que la fibre de Milnor motivique de J. Denef et F. Loeser est un avatar au moins dans le K_0 de la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k)$ de la théorie des cycles proches de J. Ayoub.

***Corollaire* ([IS13]).** — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme plat de k-schémas. Soit $x \in X_\sigma(k)$ un point rationnel. On a alors l'égalité*

$$[x^*\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \chi_{k,\mathrm{c}}(\psi_{f,x}).$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$

Notons que les fonctions Zêta de J. Denef et F. Loeser, et donc les cycles proches motiviques qui s'en déduisent, ne sont a priori motiviques que dans un sens virtuel puisque définies uniquement dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$. Dans [DL98], J. Denef et F. Loeser ont posé la question de savoir si elles sont réellement motiviques c'est-à-dire définissables dans une catégorie de motifs convenables. Le théorème précédent peut être vu comme un début de réponse positive à cette question.

Il montre que la limite de la fonction Zêta est motivique puisque donnée par le motif proche $\Psi_f(\mathbb{1}_X)$ de J. Ayoub.

Notons qu'avec les fonctions Zêta de J. Denef et F. Loeser l'on se trouve dans une situation un peu orthogonale à celle des fonctions Zêta de M. Kapranov [Kap00] qui généralisent les fonctions Zêta de Hasse-Weil. En effet ces dernières sont motiviques par définition, mais l'on ignore cependant si elles sont rationnelles dans $\mathscr{M}_k[[T]]$ (ce qui fournirait une preuve motivique du théorème de rationalité de B. Dwork prouvé dans [Dwo60]). Lorsqu'on les regarde plutôt dans $\mathrm{K}_0(\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k,\mathbb{Q}))$, la rationalité des fonctions Zêta de M. Kapranov se déduit de la conjecture sur la dimension finie des motifs de Chow de S.-I. Kimura et P. O'Sullivan qui est largement ouverte (voir par exemple [Ivo11a] ou [And04] pour un survol).

1.3.2 Cycles proches motiviques et géométrie rigide : [AIS13]

Dans [AIS13], en collaboration avec J. Ayoub et J. Sebag nous nous sommes intéressés au lien entre la théorie des cycles proches motiviques de J. Ayoub et la géométrie rigide. En cohomologie ℓ-adique un tel lien avait été conjecturé par P. Deligne et établi par V. Berkovich dans [Ber94, Ber96].

On suppose que k est un corps de caractéristique zéro, on note $R = k[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t et K sont corps des fractions. Soient $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ un R-schéma séparé de type fini et $\hat{f} : \mathscr{X} \to \mathsf{Spf}(R)$ son completé t-adique qui est un R-schéma formel topologiquement de type fini.

Les travaux de J. Ayoub [Ayo07b, Ayo09] fournissent également dans ce contexte un foncteur cycles proches

$$\Psi_f : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \to \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma)$$

ainsi qu'un foncteur d'analytification $\mathrm{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K) \to \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

Soit Z est un sous-ensemble localement fermé de la fibre spéciale X_σ. Le théorème principal de [AIS13] permet de relier d'une part l'image directe de restriction des cycles proches à Z au motif rigide du tube de Z dans la fibre générique $\mathscr{X}_\eta$. Notons qu'une telle comparaison nécessite un pont entre deux mondes a priori différents : le motif rigide du tube appartient en effet à la catégorie $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ des motifs rigides sur le corps K tandis que l'image directe des cycles proches appartient à la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$ des motifs sur le corps résiduel k.

Un tel pont a été construit par J. Ayoub dans [Ayo09]. En effet l'un des principaux résultats de ce travail est la construction d'une équivalence

$$\mathfrak{R} : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k)$$

entre la catégorie des motifs rigides sur K et la sous-catégorie pleine $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m,k})$ formée des motifs quasi-unipotents. En composant avec l'image réciproque par la section unité de $\mathbb{G}_{m,k}$, l'on obtient ainsi un foncteur triangulé

$$1^* \circ \mathfrak{R} : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) \to \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k).$$

Le résultat principal de [AIS13] s'énonce alors comme suit :

Théorème ([**AIS13**]). — *Soit $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ un R-schéma séparé de type fini de fibre générique X_η lisse sur K. On note $\mathscr{X}$ la complétion t-adique de X. Soient $z : Z \hookrightarrow X_\sigma$ l'inclusion d'un sous-ensemble localement fermé et $]Z[$ le tube de Z dans $\mathscr{X}_\eta$. Soit M un objet de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(]Z[), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq (f_\sigma \circ z)_*(\Psi_f(M|_{X_\eta})|_Z).$$

On obtient en particulier le corollaire suivant :

Corollaire ([**AIS13**]). — *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^\vee_{rig}(]Z[)) \simeq (f_\sigma \circ z)_*(\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}))|_Z.$$

Ce résultat peut-être vu comme un analogue motivique des résultats de V. Berkovich reliant cycles proches étales, et cohomologie étale non-archimédienne des tubes. Pour obtenir ce résultat, nous montrons dans [AIS13] comment calculer les motifs de tubes ou les cycles proches dans le cas semi-stable généralisant ainsi les résultats obtenus par J. Ayoub dans [Ayo07b] pour les motifs étales à coefficients rationnels.

Supposons que X soit un k-schéma quasi-projectif et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme de k-schémas. Rappelons que si $\mathscr{X}$ désigne le complété du R-schéma obtenu à partir de X par changement de base le long du morphisme canonique $\mathsf{Spec}(R) \to \mathbb{A}^1_k$, J. Nicaise et J. Sebag appellent fibre de Milnor analytique le tube $\mathscr{F}_x :=]x[$ dans $\mathscr{X}_\eta$. La conjonction des résultats de [AIS13] et [IS13] montre que la fibre de Milnor introduite par J. Denef et F. Loeser ne dépend dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$ que du motif de la fibre de Milnor analytique :

Corollaire ([**AIS13**]). — *On a, dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$, l'égalité :*

$$[1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^\vee_{rig}(\mathscr{F}_x))] = \chi_{k,c}(\psi_{f,x}).$$

1.4 Modules de cycles et foncteurs à réciprocité

1.4.1 Une idée de B. Kahn comme point de départ

Une notion de foncteurs à réciprocité a été introduite en 1991 par B. Kahn (voir par exemple [Kah]) suite aux généralisations de la K-théorie de Milnor développées par M. Somekawa pour les groupes algébriques commutatifs. Le but de B. Kahn était de s'inspirer des symboles locaux pour les groupes algébriques commutatifs lisses, construits par M. Rosenlicht et J.-P. Serre [Ros57, Ser84], et des lois de réciprocité qu'ils satisfont, pour développer une théorie contenant à la fois les groupes algébriques commutatifs lisses et les faisceaux invariants par homotopie avec transferts de V. Voevodsky.

1.4.2 Le LEGO® des zéros cycles

Les travaux de M. Somekawa, inspirés par K. Kato, puis leurs prolongements par M. Spiess, W. Raskind et R. Akhtar ont mis en évidence un suprenant Lego® permettant de fabriquer certains groupes de zéro cycles à partir d'autres via une construction de type K-théorique. Fixons un corps k. On peut ainsi, en partant de certains foncteurs du type $E/k \mapsto G(E)$, $E/k \mapsto \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X)(E) := \mathrm{CH}_0(X_E)$ où E/k est une extension de type fini, G est une variété semi-abélienne sur k et X une variété projective lisse sur k, définir des groupes de K-théorie généralisant la K-théorie de Milnor et dans lesquels les relations de Steinberg sont remplacées par des relations plus complexes faisant intervenir des symboles locaux. On dispose ainsi du théorème suivant qui généralise le théorème de Y. Nesterenko et A. Suslin [NS89] :

***Théorème* (M. Spieß - W. Raskind ; R. Akhtar).** — *Soient k un corps et $X_1, \dots, X_r$ des k-variétés projectives lisses et équidimensionnelles. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}(k; \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_1), \dots, \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_r), \underbrace{\mathbb{G}_m, \dots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}}) \simeq \mathrm{CH}^{d+n}(X, n)$$

où $X := X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ et d est la dimension de X.

Lorsque $n = 0$ ce résultat est dû à M. Spiess et W. Raskind dans [RS00] et la version plus générale est un théorème prouvé par R. Akhtar dans [Akh04]. On suppose maintenant k parfait. Si $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ sont des faisceaux Nisnevich avec transferts sur k invariants par homotopie, B. Kahn et T. Yamazaki ont défini un K-groupe

$$\mathrm{K}(k, \mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n)$$

et montrent dans [KY13] le théorème suivant qui permet grâce à la théorie des motifs de récupérer les résultats précédents :

***Théorème* (B. Kahn - T. Yamazaki).** — *Soient k un corps parfait et $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ des faisceaux Nisnevich avec transferts sur k invariants par homotopie. On a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}(k; \mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(\mathbb{Z}, \mathscr{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{F}_n)$$

Tous ces résultats concernent le monde invariant par homotopie, mais l'on dispose cependant d'un analogue additif du théorème de Y. Nesterenko et A. Suslin (voir [BE03] pour $m = 1$ et [RÖ7] en général) :

***Théorème* (S. Bloch - H. Esnault ; K. Rülling).** — *Soient k un corps et $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ des entiers. Il existe un isomorphisme*

$$\mathbb{W}_m \Omega^{n-1}_{k/\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TCH}^n(k, n; m)$$

qui identifie les groupes de Chow additifs de zéro cycles avec le complexe de de Rham-Witt généralisé.

1.4.3 Les résultats de [IR12]

En collaboration avec K. Rülling, notre principale contribution dans [IR12], a consisté à montrer que, comme conjecturé par B. Kahn, ce Lego® des zéros cycles s'intégre dans la théorie des foncteurs à réciprocité. Cela permet d'enrichir en retour ce Lego® en permettant de fabriquer des groupes de zéros cycles à partir de foncteurs à réciprocité comme $\mathbb{G}_a$ et de retrouver ce faisant les groupes de zéro cycles additifs de S. Bloch et H. Esnault.

Dans [IR12], nous avons introduit une certaine notion de foncteurs à réciprocité (à comparer avec la définition plus récente de [KSY]). Comme suggéré par B. Kahn, nous avons vérifié que (a) les k-groupes algébriques commutatifs et lisses[(1)] ; (b) les faisceaux Nisnevich invariants avec transferts par homotopie ; (c) les modules de cycles de M. Rost ; (d) les différentielles de Kähler absolues fournissent autant d'exemples de foncteurs à réciprocité. Notons que dans le cas des faisceaux Nisnevich avec transferts invariant par homotopie, pour être plus précis, l'on attache canoniquement à un tel faisceau $\mathscr{F} \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$ un foncteur à réciprocité $\hat{\mathscr{F}} \in \mathbf{RF}$

La construction principale de [IR12] permet de fabriquer à partir d'une famille de foncteurs à réciprocité $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ un nouveau foncteur à reciprocité noté $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n)$ et satisfaisant une propriété universelle analogue à celle d'un produit tensoriel. Notre construction est compatible au produit tensoriel de faisceaux Nisnevich avec transferts. Plus précisément :

Théorème **([IR12]).** — *Soient $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$. Il existe un isomorphisme dans* $\mathbf{RF}$

$$\mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \ldots, \hat{\mathscr{F}}_n) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \cdots \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \mathscr{F}_n)^{\wedge}.$$

On peut comparer ce résultat à celui de B. Kahn et T. Yamazaki dans [KY13] qui montre que le terme de droite évalué en k est isomorphe au groupe $\mathrm{K}(k; \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n)$. En particulier, on obtient que $\mathrm{T}(G_1, \ldots, G_n)(k)$ avec G_i des variétés semi-abéliennes n'est autre que le groupe défini par M. Somekawa. L'on en déduit comme dans [KY13] le résultat suivant :

Corollaire **([IR12]).** — *Soient $X_1, \ldots, X_r$ des k-variétés projectives lisses et équidimensionnelles. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et toute extension de type fini E/k, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{T}(\mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_1), \ldots, \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_r), \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})(E) \cong \mathrm{CH}^{d+n}(X_E, n).$$

où $X := X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ et d est la dimension de X

Le lien avec les différentielles de Kähler, et donc les groupes de zéros cycles additifs $\mathrm{TCH}^n(k, n, 1)$ via le théorème de [BE03], est fourni par le théorème suivant :

(1) Ceci est essentiellement une conséquence d'un théorème de M. Rosenlicht [Ros57].

Théorème ([**IR12**]). — *Supposons k de caractéristique nulle. Alors on a un isomorphisme pour toute extension de type fini E/k*

$$\mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})(E) \simeq \Omega^n_{E/\mathbb{Z}}.$$

Ce résultat a été conjecturé par B. Kahn. Comme nous l'avons montré dans [IR12], il n'est pas valable en caractéristique positive. La raison essentielle est que le groupe algébrique $\mathbb{G}_a$ (où le foncteur à réciprocité $\mathbb{G}_a$) a alors plus d'endomorphismes qu'en caractéristique nulle : il faut prendre en compte le Frobenius. Nous avons également vérifié le résultat suivant :

Théorème ([**IR12**]). — *Supposons* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Si* $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n \in \mathbf{RF}$, *alors*

$$\mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n) = 0.$$

1.4.4 Théorie de l'intersection selon M. Rost et A_∞-algèbres

Présentons succintement le résultat de [Ivo14a]. Dans [Ros96] M. Rost a généralisé la théorie de l'intersection classique dans deux directions, tout d'abord en considérant le complexe de Gersten dans son entier et non plus seulement son homologie en degré zéro mais également en autorisant des coefficients plus généraux que la K-théorie de Milnor : les *modules de cycles* (ces derniers étant essentiellement des modules gradués sur la K-théorie de Milnor munis de certains morphismes supplémentaires). À un module de cycles M, M. Rost associe un complexe de cycles $C_*(X, M)$, qui est un complexe analogue au complexe de Gersten de composantes données par

$$C_p(X, M, n) := \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M_{n+p}(\kappa(x)),$$

et construit une théorie de l'intersection sur les groupes d'homologie de ce complexe.

Théorème ([**Ivo14a**]). — *Soit X un k-schéma lisse de type fini et M un module de cycles muni d'une structure d'anneaux. Alors, il existe sur le complexe de cycles $C^*(X, M)_\mathbb{Q} := C^*(X, M) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, une structure de A_∞-algèbre qui induit sur l'homologie le produit d'intersection défini dans [Ros96].*

Dans [Ivo14a], on construit ainsi par perturbation homologique une famille de morphismes gradués de bidegré $(2 - n, 0)$,

$$m_n : C^*(X, M)_\mathbb{Q}^{\otimes n} \to C^*(X, M)_\mathbb{Q}$$

que l'on peut voir comme des *produits d'intersection supérieurs*. Pour tout $n \geqslant 1$, ces derniers vérifient la relation

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{r+st} m_{r+1+t} \circ \left(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}\right) = 0,$$

la somme étant prise sur tous les entiers positifs r, s, t tels que $r + s + t = n$. Le morphisme m_1 est la différentielle du complexe de cycles et m_2 un morphisme fermé qui induit sur la cohomologie le produit d'intersection de [Ros96].

1.5 Autres contributions

1.5.1 Motifs de Levine et de Voevodsky : [Ivo08]

Soit k un corps. Dans [Lev98], M. Levine a construit une catégorie triangulée de motifs. Sa construction tire parti des possibilités offertes par les DG catégories qui permettent d'imposer des relations à homotopie près entre morphismes et s'appuie également sur les lemmes de déplacements. Grossièrement l'idée consiste à construire une catégorie triangulée $\mathcal{DM}(k)$ par générateurs et relations de sorte qu'elle puisse se réaliser dans des théories de type Bloch-Ogus et définisse la bonne cohomologie motivique. Ainsi si X est un k-schéma quasi-projectif lisse, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{CH}^p(X, q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{DM}(k)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_X(p)[2p-q])$$

où $\mathbb{Z}_X$ est le motif cohomologique de X dans $\mathcal{DM}(k)$. L'approche de V. Voevodsky via les correspondances finies aboutissant à la construction de la catégorie triangulée des motifs géométriques $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ dans [Voe00] est radicalement différente. Elle évite les lemmes de déplacements (tout au moins dans la construction puisque ceux-ci sont essentiels pour démontrer certains des théorèmes clefs). Tout comme dans la théorie de M. Levine, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{CH}^p(X, q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathrm{M}(X), \mathbb{Z}(p)[2p-q])$$

où $\mathrm{M}(X)$ désigne le motif homologique de X dans $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ (voir [Voe00] pour une preuve en caractéristique zéro et [Voe02] en général)

Lorsque k est de caractéristique zéro, M. Levine a montré dans [Lev98, Part I, Ch. VI, 2.5.5] que les deux approches produisent des catégories triangulées équivalentes. Dans [Ivo08], en utilisant certains résultats de [Ivo07], nous avons étendu son résultat aux corps parfaits de caractéristique positive :

***Théorème* ([Ivo08]).** — *Soit k un corps parfait. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite*

- $\mathrm{char}(k) = 0$ *et* $A = \mathbb{Z}$, *ou*
- $\mathrm{char}(k) > 0$ *et* $A = \mathbb{Q}$.

Alors il existe une équivalence de catégories triangulées tensorielles

$$\mathcal{DM}(k, A) \xrightarrow{\Upsilon} \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k, A)$$

telle que pour tout k-schéma quasi-projectif lisse X et tout entier relatif n, l'on ait un isomorphisme

$$\Upsilon(\mathbb{Z}_X(n)) \simeq \mathrm{M}(X)^*(n)$$

où $\mathrm{M}(X)^*$ *désigne le dual du motif de* X *dans* $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k, A)$*. En outre, l'équivalence* Υ *induit une équivalence de catégories triangulées tensorielles*

$$\mathcal{DM}(k)^{\mathrm{pr}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)^{\mathrm{pr}}$$

entre les enveloppes pseudo-abéliennes des sous-catégories triangulées à coefficients entiers engendrées par les motifs des k*-schémas projectifs lisses.*

1.5.2 Géométrie par morceaux, motifs et K-équivalence : [IS12]

Dans [IS12], nous nous sommes intéressés, en collaboration avec J. Sebag, aux liens entre motifs, K-équivalence et géométrie algébrique par morceaux.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Rappelons que deux k-variétés X et Y connexes, propres et lisses sur k, sont dites K*-équivalentes* s'il existe une k-variété Z connexe, propre et lisse sur k, et des morphismes birationnels de k-schémas $X \leftarrow Z \to Y$ tels que les diviseurs canoniques relatifs $K_{Z/X}$ et $K_{Z/Y}$ soient égaux.

Dans [Bat99] V. Batyrev a montré l'invariance par K-équivalence des nombres de Betti des variétés algébriques complexes projectives lisses. Puis M. Kontsevich, en utilisant l'intégration motivique, a raffiné ce résultat aux nombres de Hodge dans [Kon95]. Les nombres de Betti ou de Hodge d'une k-variété, projective et lisse sur k, n'étant que des avatars numériques de son motif, il apparaît raisonnable de se demander si l'invariance des nombres de Hodge au sein d'une même classe de K-équivalence ne serait pas simplement le reflet d'un résultat de nature motivique.

Question KM. — *Deux* k*-variétés* X *et* Y *connexes, projectives et lisses sur* k*, et* K*-équivalentes ont-elles des motifs de Chow isomorphes dans* $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q})$ *ou tout au moins des groupes de Chow isomorphes ?*

Cette question peut se trouver dans la littérature (voir, par exemple, [Wan04] pour un énoncé légèrement affiné) et une réponse positive lui a été donnée dans un certain nombre de cas très spécifiques de K-équivalence, comme le flop ordinaire (voir [LLW10, Theorem 01] ou [Orl05, Theorem 1] pour une preuve radicalement différente).

Dans [IS12] nous avons avancé, et justifié dans certains cas simples, la possibilité d'une division de la question KM en deux sous-questions faisant intervenir la géométrie par morceaux. La première peut-être vu comme un raffinement du résultat obtenu par M. Kontsevich via l'intégration motivique :

Question KP. — *Deux* k*-variétés connexes, projectives et lisses sur* k*,* K*-équivalentes sont-elles isomorphes par morceaux, ou ont-elles même classe dans l'anneau de Grothendieck des variétés* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$ *?*

La seconde fait apparaître un lien, assez surprenant à première vue, entre le groupe de Grothendieck des variétés et la catégorie des motifs de Chow :

Question PM. — *Deux k-variétés connexes, projectives et lisses sur k, qui ont la même classe dans l'anneau de Grothendieck des variétés* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$*, ont-elles des motifs de Chow isomorphes dans* $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k,\mathbb{Q})$*, ou des groupes de Chow isomorphes ?*

Comme nous l'avons expliqué dans [IS12], la question PM admet une réponse positive si la conjecture de dimension finie de S.-I. Kimura [Kim05] et P. O'Sullivan est vraie. Ceci se déduit du théorème de nilpotence de S.-I. Kimura et du théorème de semi-simplicité de U. Jannsen [Jan92]. Inconditionnellement la réponse à la question PM se trouve positive pour les surfaces. Nous avons en effet le résultat suivant :

Proposition (**[IS12]**). — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soient X et Y deux k-surfaces projectives et lisses sur k. Supposons que $[X] = [Y]$ dans l'anneau* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$*. Alors il existe un isomorphisme de motifs $h_{\mathsf{rat}}(X) \simeq h_{\mathsf{rat}}(Y)$ dans* $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q})$*.*

En utilisant le présentation du K_0 des variétés obtenue par F. Bittner dans [Bit04] ainsi que le théorème de finitude de [GJRW96, Proposition 6.1], l'on peut également vérifier que PM est encore valable en codimension un. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition (**[IS12]**). — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X et Y deux k-variétés connexes, projectives et lisses sur k, telles que $[X] = [Y]$ dans l'anneau* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$*.*

1. *Les groupes de Néron-Severi* $\mathrm{NS}(X)$ *et* $\mathrm{NS}(Y)$ *sont isomorphes.*
2. *Si le corps k est une extension de type fini de $\mathbb{Q}$, alors les groupes de Picard* $\mathrm{Pic}(X)$ *et* $\mathrm{Pic}(Y)$ *sont isomorphes.*

En ce qui concerne le problème KP nous obtenons le théorème suivant (nous renvoyons à [IS12] pour la notion de lieu K-exceptionnel) :

Théorème (**[IS12]**). — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soient X et Y deux k-variétés connexes, projectives et lisses sur k, K-équivalentes. Fixons (C_X, C_Y) un lieu K-exceptionnel. Supposons*

1. *ou bien $\dim(C_X) \leqslant 2$;*
2. *ou bien que les k-variétés C_X et C_Y sont isomorphes à des sommes disjointes de k-variétés de la forme $S \times_k \mathbf{P}_k^{r-2}$ ($r \geqslant 3$), où S est une k-surface intègre projective.*

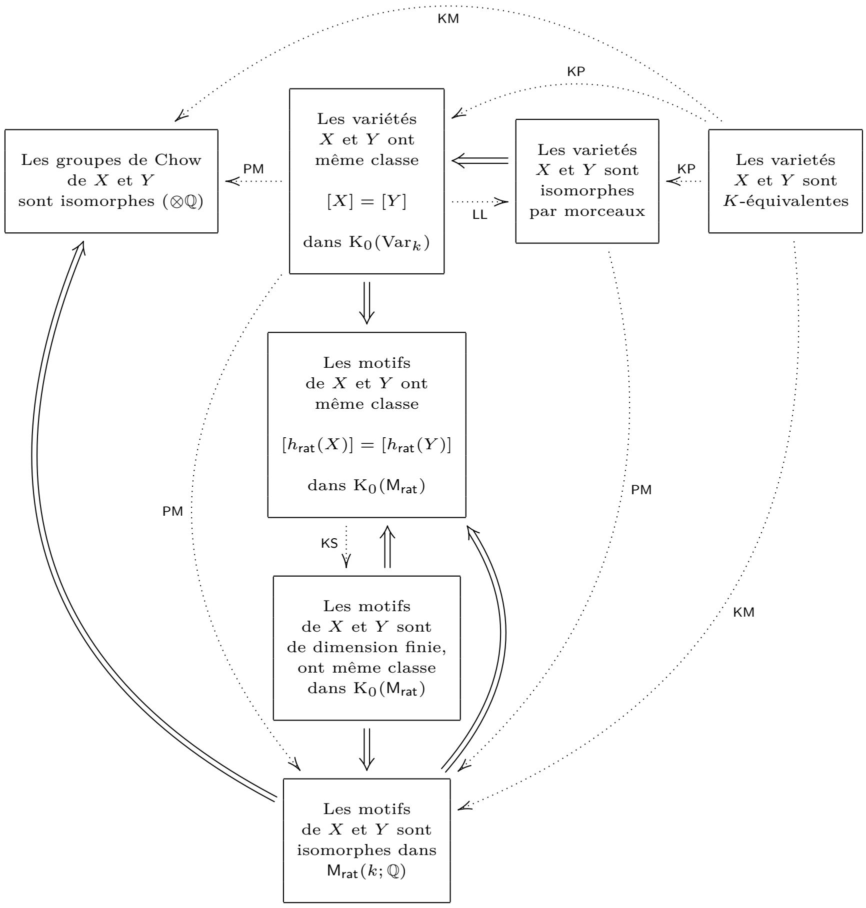
Alors les k-variétés X et Y sont isomorphes par morceaux.

Ceci implique en particulier le résultat suivant :

Corollaire 1.5.1. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X, Y deux k-variétés propres et lisses, K-équivalentes, de dimension $d \leqslant 4$. Alors X, Y sont isomorphes par morceaux et ont la même classe dans l'anneau* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$*.*

Notons que des problèmes de simplication « à la Zariski » peuvent constituer *a priori* des obstructions à la validité de KP. Ce type de problèmes semble pouvoir être formellement contourné en remplaçant l'existence d'un isomorphisme par morceaux (resp. l'égalité des classes dans l'anneau $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$) dans la formulation de la question KP par l'égalité des classes dans l'anneau $\mathscr{M}_k = \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$.

Le diagramme ci-dessous résument certaines des questions autour de la géométrie par morceaux, des motifs et de la K-équivalence. Le symbole LL fait référence au problème posé par M. Larsen et V. Lunts dans [LL03].



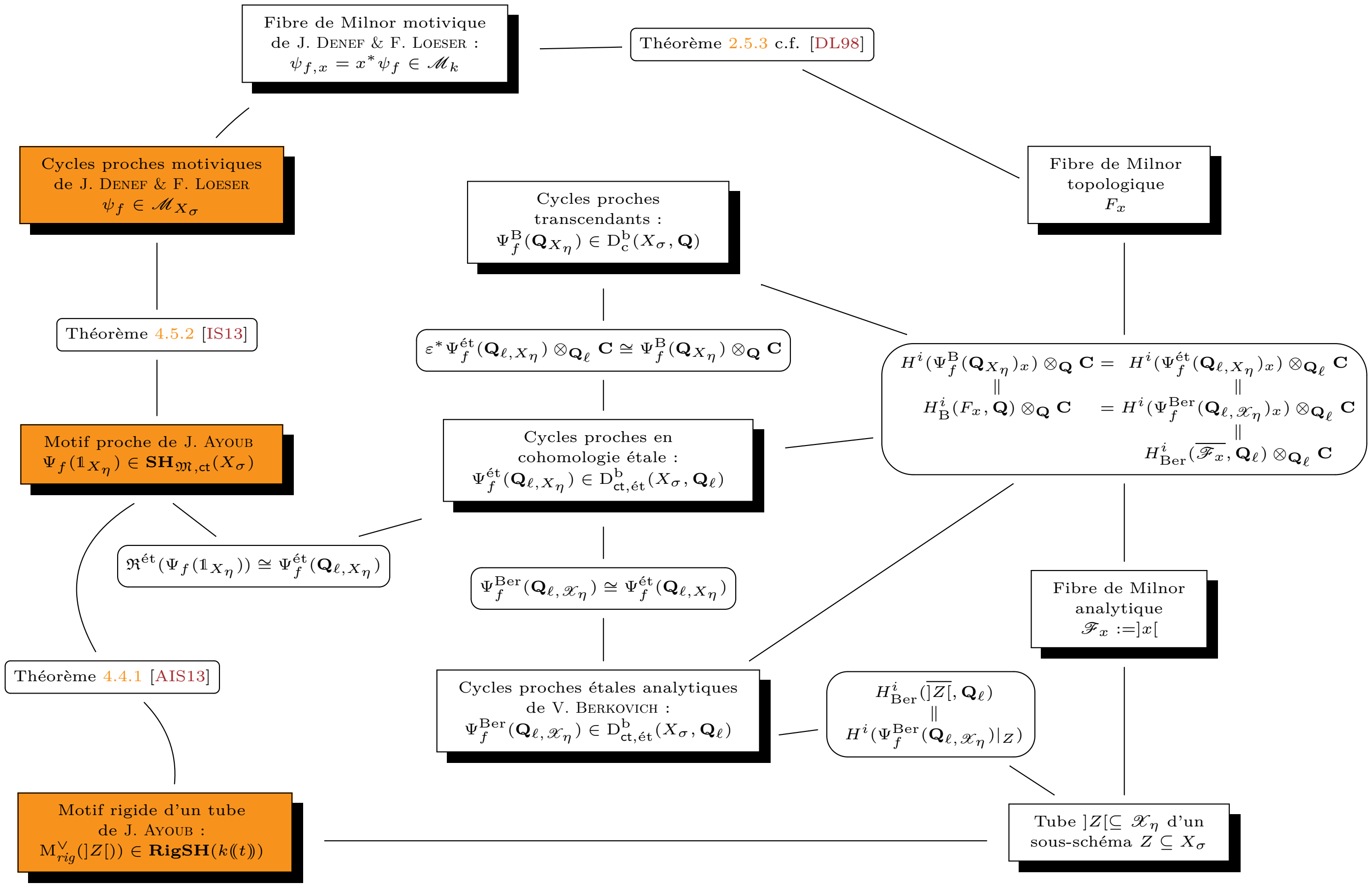


Figure 1. Différentes incarnations des cycles proches et des fibres de Milnor

Bibliographie personnelle

[AIS13] J. Ayoub, F. Ivorra & J. Sebag – “Motives of rigid analytic tubes and nearby motivic sheaves”, Submitted for publication, 2013.

[IR12] F. Ivorra & K. Rülling – “K-groups of reciprocity functors”, Submitted for publication, 2012.

[IS12] F. Ivorra & J. Sebag – “Géométrie algébrique par morceaux, K-équivalence et motifs”, *Enseign. Math. (2)* **58** (2012), no. 3-4, p. 375–403.

[IS13] ———, “Nearby motives and motivic nearby cycles”, *Selecta Math. (N.S.)* **19** (2013), no. 4, p. 879–902.

[Ivo06] F. Ivorra – “Réalisation l-adique des motifs mixtes”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 7, p. 505–510.

[Ivo07] ———, “Réalisation l-adique des motifs triangulés géométriques. I”, *Doc. Math.* **12** (2007), p. 607–671.

[Ivo08] ———, “Levine’s motivic comparison theorem revisited”, *J. Reine Angew. Math.* **617** (2008), p. 67–107.

[Ivo10] ———, “Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques. II”, *Math. Z.* **265** (2010), no. 1, p. 221–247.

[Ivo11a] ———, “Finite dimensional motives and applications (following S-I. Kimura, p. O’Sullivan and others)”, in *Autour des motifs—École d’été Franco-Asiatique de Géométrie Algébrique et de Théorie des Nombres/Asian-French Summer School on Algebraic Geometry and Number Theory. Volume II*, Panor. Synthèses, Soc. Math. France, Paris, (2011), To appear, p. 64 pages.

[Ivo11b] ———, “Triangulated motives over Noetherian separated schemes”, in *Motivic integration and its interactions with model theory and non-Archimedean geometry. Volume II*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 384, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, p. 108–177.

[Ivo12] ———, "Mixed Hodge complexes on algebraic varieties and t-structure", Submitted for publication, 2012.

[Ivo14a] ———, "Cycle modules and the intersection A_∞-algebra", *Manuscripta Math.* **144** (2014), no. 1-2, p. 165–197.

[Ivo14b] ———, "Mixed Hodge complexes and higher extensions of mixed Hodge modules on algebraic varieties", To appear in Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 2014.

[Ivo14c] ———, "Perverse, Hodge and motivic realizations of étale motives", Submitted for publication, 2014.

[Ivo14d] ———, "Perverse Nori motives", Submitted for publication, 2014.

[KSIW06] M. Kashiwara, P. Schapira, F. Ivorra & I. Waschkies – "Microlocalization of ind-sheaves", in *Studies in Lie theory*, Progr. Math., vol. 243, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, p. 171–221.

2

Interlude : quelques éléments de théorie des motifs

Dans ce chapitre nous donnons un rapide aperçu de certains aspects de la théorie des motifs qui jouent un rôle important dans les travaux exposés dans les chapitres suivants. Pour nos besoins, il sera suffisant de considérer les motifs sur des k-schémas quasi-projectifs où k est un corps de caractéristique zéro. Dans certaines constructions comme celle des catégories homotopiques stables et pour certains théorèmes cette hypothèse est complètement inutile mais pour d'autres comme la construction de M. Nori elle devient essentielle.

Pour simplifier l'exposition et rendre la présentation homogène nous supposons dans la suite que k est un corps de caractéristique zéro. Parfois nous aurons besoin de supposer donné un plongement de k dans $\mathbb{C}$.

2.1 Catégories abéliennes de motifs

2.1.1 Motifs purs (et mixtes) : la vision de A. Grothendieck

C'est en travaillant à la preuve des conjectures de A. Weil que A. Grothendieck imagine la notion de motifs au cours des années 1963-1969. Ses travaux lui ont permis de développer les outils cohomologiques nécessaires pour aborder ces conjectures et en démontrer une partie[(1)] mais il est alors frappé par « *l'abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes* » [Grob, 2.16, p.44] qu'il a mises en évidence. Afin d'en expliquer les propriétés communes ainsi que les isomorphismes qui permettent de les comparer, il imagine que ces théories sont autant d'incarnations différentes d'une théorie plus fine : la théorie des motifs. Cependant comme l'avait expliqué J.-P. Serre, il n'existe pas de cohomologie de Weil à coefficients rationnels sur un corps fini (voir [Gro68, §1.7]). Pour tenir compte de cette obstruction, il envisage que la

(1) La preuve de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis sera donnée par P. Deligne [Del74a, Del80]

cohomologie recherchée pourrait prendre ses valeurs non plus dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, mais dans une certaine catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire dont les objets sont baptisés motifs (voir [And04]).

Cette vision s'appuie également sur la notion de poids, inspirée initialement par J.-P. Serre. En partant des conjectures de Weil, A. Grothendieck réalise que les motifs associés aux variétés algébriques projectives lisses sont « purs », formant les briques de bases semi-simples de la théorie tandis que les motifs des variétés quelconques se décomposent virtuellement comme des sommes de motifs purs [Grob, p.185, p. 792]. À partir de là, P. Deligne imagine que cette décomposition virtuelle provient de l'existence d'une filtration par le poids dans la catégorie des motifs, dont les gradués sont purs, intuition dont il montre toute l'importance en développant la théorie de Hodge mixte [Del71, Del74b].

Pour donner corps à ses idées et fonder la notion de motif semi-simples (ou purs) sur un corps, A. Grothendieck construit à partir des cycles algébriques, la catégorie $\mathsf{M}_{\mathsf{num}}(k, \mathbb{Q})$ des motifs numériques et énonce, sous forme conjecturale, certaines des propriétés attendues de ces motifs en termes de cohomologie ℓ-adique et de groupes de cycles algébriques. Ces conjectures standard [Gro69] constituent pour A. Grothendieck la « *"quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la classique "théorie de Hodge", valable pour les variétés algébriques "ordinaires"* » [Grob, 2.16, p.44] (E. Bombieri est également parvenu à ces conjectures indépendamment).

Malheureusement pratiquement aucun progrès n'a été obtenu dans la direction de ces conjectures qui demeurent essentiellement entièrement ouvertes à l'heure actuelle. Dans [Jan92], U. Jannsen a cependant pu montrer que la catégorie $\mathsf{M}_{\mathsf{num}}(k, \mathbb{Q})$ est une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire semi-simple (et même que l'équivalence numérique est la seule relation d'équivalence adéquate sur les cycles algébriques pour laquelle cette propriété est vraie).

Dans l'esprit de A. Grothendieck, les catégories de motifs (purs ou mixtes) doivent fournir une théorie de Galois motivique par l'intermédiaire du formalisme des catégories tannakiennes développé par N. Saavedra sous sa direction [SR72] (voir [DMOS82, Del90] également). L'on se heurte alors aux conjectures standard puisque pour qu'une cohomologie de Weil puisse se factoriser par $\mathsf{M}_{\mathsf{num}}(k, \mathbb{Q})$ et définir un foncteur fibre, il est nécessaire par exemple que l'équivalence homologique définie par cette cohomologie coïncide avec l'équivalence numérique ce qui est l'une des conjectures standard.

2.1.2 Approches non conjecturales via les réalisations

Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour éviter le recours aux conjectures standard et disposer d'une catégorie de motifs purs sur k non conjecturale, P. Deligne a introduit dans [DMOS82] la notion de cycles de Hodge absolus. L'idée est de remplacer les cycles algébriques par les classes de cohomologie qui devraient être algébriques si la conjecture de Hodge est vraie (cette idée a été raffinée par Y. André dans [And96]).

En reprenant la construction de Grothendieck, en utilisant cette fois les cycles de Hodge absolus, P. Deligne et J.-S. Milne obtiennent une catégorie tannakienne semi-simple sur $\mathbb{Q}$ dont les objets sont appelés des motifs de Hodge absolus (voir [DMOS82, II, Proposition 6.5]).

Dans [Jan90], U. Jannsen étend le travail de P. Deligne aux motifs mixtes (voir également [Jan95] pour un survol). Plus précisément, en considérant simultanément les réalisations ℓ-adiques, de de Rham, et de Betti[(2)], il construit une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathcal{MR}_k$, montre que les différentes cohomologies (de Rham, ℓ-adiques, Betti) munies de leurs structures additionnelles et des isomorphismes de comparaison définissent des foncteurs

$$\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}} : \mathsf{Sm}/k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{MR}_k \qquad i \in \mathbb{N}$$

et prouve que les objets de $\mathcal{MR}_k$ sont munis d'une filtration par le poids [Jan90, 2.5] (exhaustive et finie). La catégorie des motifs mixtes $\mathrm{J}\mathscr{MM}(k, \mathbb{Q})$ est alors la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{MR}_k$ engendrée par les $\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}}(X)$ où X est un k-schéma quasi-projectif lisse. Elle est stable par la filtration par le poids et la sous-catégorie tannakienne engendrée par les $\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}}$ des k-schémas projectifs lisses, s'identifie canoniquement à la catégorie des motifs purs de Hodge absolus (voir [Jan90, 4.4 Theorem]).

La catégorie triangulée correspondante est construite par A. Huber dans [Hub95]. Cette catégorie, notée $D_{\mathcal{MR}}$, est munie d'une t-structure dont le coeur est la catégorie $\mathcal{MR}_k$ de U. Jannsen. À un k-schéma quasi-projectif X est associé un objet $R_{\mathcal{MR}}(X)$ de sorte que les foncteurs cohomologiques associés à la t-structure composés avec $R_{\mathcal{MR}}$ redonnent les $\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}}$. Cela permet de définir une cohomologie absolue (pour les cycles de Hodge absolus) qui raffine la cohomologie de Hodge absolue de A. Beĭlinson:

$$H^p_{\mathcal{MR}}(X, \mathbb{Q}(q)) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{MR}}}(\mathbb{1}_k, R_{\mathcal{MR}}(X)(q)[p]).$$

et que l'on peut comparer avec la cohomologie motivique. En effet A. Huber construit des classes de Chern supérieures et celles-ci définissent des morphismes fonctoriels:

$$K_q(X)^{(p)}_{\mathbb{Q}} \to H^{2p-q}_{\mathcal{MR}}(X, \mathbb{Q}(p))$$

le terme de droite étant les sous-espaces propres de la K-théorie algébrique pour les opérations de Adams.

2.1.3 La catégorie abélienne des motifs mixtes de M. Nori

En utilisant une approche tannakienne, Madhav Nori a construit une catégorie abélienne $\mathrm{N}\mathscr{MM}(k)$ de motifs sur le corps k. Bien que M. Nori n'est pas lui

(2) chaque plongement $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ définissant une telle réalisation

même publié son travail, on en trouvera plusieurs survol dans la littérature (voir e.g. [Lev05, vW11, HMS12]). Très grossièrement la catégorie des motifs de Nori $\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k)$ est la catégorie abélienne universelle ayant un foncteur, $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle, de réalisation de Betti à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et une théorie homologique pour les couples formés d'une k-variété quasi-projective et d'un sous-schéma fermé. Être un motif dans $\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k)$ est la meilleure structure que l'on puisse mettre sur l'homologie relative des k-schémas quasi-projectifs. La construction de M. Nori s'inspire de la philosophie des groupes de Galois motiviques de A. Grothendieck et plus particulièrement du formalisme tannakien qui en forme l'ossature.

Dans la suite, nous donnons plus de détails sur la construction de M. Nori dont les idées jouent un rôle essentiel dans [Ivo14d, Ivo14c].

2.1.4 Catégorie abélienne associée à une représentation de carquois

Soit $\mathsf{mod}(K)$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie. Si V est un K-espace vectoriel de dimension finie, on note $V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ l'espace vectoriel dual. Les K-coalgèbres dans la suite sont supposées coassociatives et counitaires.

Soient $\mathscr{Q}$ un carquois et

$$T : \mathscr{Q} \to \mathsf{mod}(K)$$

une représentation de ce carquois $\mathscr{Q}$ à valeurs dans la catégorie $\mathsf{mod}(K)$ des K-espaces vectoriels de dimension finie.

À partir de cette représentation, M. Nori construit un quadruplet $(\mathscr{A}, R, F, \alpha)$ où $\mathscr{A}$ est une catégorie abélienne K-linéaire, $R : \mathscr{Q} \to \mathscr{A}$ est une représentation, $F : \mathscr{A} \to \mathsf{mod}(K)$ est un foncteur K-linéaire exact et fidèle, et $\alpha : F \circ R \to T$ est un isomorphisme de représentations du carquois $\mathscr{Q}$. Le quadruplet construit par M. Nori satisfait la propriété universelle suivante:

***Théorème 2.1.1* (M. Nori).** — *Pour tout quadruplet $(\mathscr{B}, S, G, \beta)$, où $\mathscr{B}$ est une catégorie abélienne K-linéaire, $S : \mathscr{Q} \to \mathscr{B}$ est une représentation, $G : \mathscr{B} \to \mathsf{mod}(K)$ est un foncteur K-linéaire exact et fidèle $G : \mathscr{B} \to \mathsf{mod}(K)$, et $\beta : G \circ S \to T$ est un isomorphisme de représentations, les conditions suivantes sont satisfaites.*

- *Il existe un foncteur K-linéaire $H : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs)*

$$\gamma : H \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta : G \circ H \xrightarrow{\simeq} F$$

  tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H \circ R \arrow[r, "G\star\gamma"] \arrow[d, "\delta\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

  soit commutatif.

– *Si $H' : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un foncteur K-linéaire et*

$$\gamma' : H' \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta' : G \circ H' \xrightarrow{\simeq} F$$

sont deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs) tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H' \circ R \arrow[r, "G\star\gamma'"] \arrow[d, "\delta'\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

soit commutatif, alors il existe une unique transformation naturelle $\theta : H \to H'$ telle que $\gamma' \circ (\theta \star R) = \gamma$ et $\delta' \circ (G \star \theta) = \delta$.

On notera que la propriété universelle n'est en général pas exactement énoncée tel que nous venons de le faire (pour une preuve sous cette forme on pourra se référer à [Ivo14d]). Cette formulation est celle que nous utilisons dans [Ivo14d] pour étendre le formalisme tannakien de M. Nori aux représentations à valeurs dans les catégories de faisceaux pervers.

2.1.5 Esquisse de la construction

Résumons brièvement la construction de M. Nori lorsque le carquois $\mathcal{Q}$ ne possède qu'un nombre fini de sommets (le cas général s'obtenant par un procédé de passage à la limite à partir de ce cas particulier, il ne s'agit pas là d'une hypothèse trop réductrice).

On peut considérer l'anneau des endomorphismes à gauche de la représentation T. Par définition, il s'agit du sous-anneau, noté $\mathrm{End}_K(T)$, du produit

$$\prod_{q \in \mathcal{Q}} \mathrm{End}_K(T(q))$$

formé par les éléments $e = (e_q)_{q \in \mathcal{Q}}$ tel que pour tout sommet $p \in \mathcal{Q}$ et toute arrête $m \in \mathcal{Q}(p, q)$ le carré

$$\begin{tikzcd} T(p) \arrow[r, "T(m)"] \arrow[d, "e_p"] & T(q) \arrow[d, "e_q"] \\ T(p) \arrow[r, "T(m)"] & T(q) \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'anneau $\mathrm{End}_K(T)$ est K-algèbre dont le K-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie. Son dual

$$A := \mathrm{End}_K(T)^\vee$$

est donc muni d'une structure de K-coalgèbre de dimension finie sur K. Pour tout sommet $q \in \mathcal{Q}$, le K-espace vectoriel de dimension finie $T(q)$ est muni d'une structure de $\mathrm{End}_K(T)$-module à gauche via la projection

$$\mathrm{End}_K(T) \to \mathrm{End}_K(T(q))$$

et donc d'une structure de A-comodule à gauche. Ceci montre que la représentation T se relève en une représentation $R : \mathcal{Q} \to \mathsf{comod}(A)$ où l'on voit simplement $T(q)$ comme un A-comodule à gauche. La catégorie abélienne de M. Nori $\mathscr{A}$ est la catégorie $\mathsf{comod}(A)$ des A-comodules de dimension finie. La représentation T est obtenue comme la composition de R et du foncteur d'oubli $F : \mathsf{comod}(A) \to \mathsf{mod}(K)$ qui est K-linéaire exact et fidèle.

Remarque 2.1.2. — Si $\mathcal{Q}$ ne possède pas un nombre fini de sommets, la catégorie abélienne $\mathscr{A}$ de M. Nori est encore une catégorie de comodules de dimension finie sur une K-coalgèbre A. C'est là tout l'intérêt de considérer le dual des endomorphismes de la représentation T et de privilégier plutôt le point de vue des comodules que le point de vue des modules.

2.1.6 Motifs homologiques effectifs

Le point de départ de la construction de M. Nori est le carquois $\mathscr{D}$ défini comme suit. Un sommet de $\mathscr{D}$ est la donnée d'un triplet (X, Z, i) où X est un k-schéma quasi-projectif, Z est un sous-schéma fermé de X et $i \in \mathbb{Z}$ est un entier relatif. Les sommets sont reliés entre eux par deux types d'arrêtes, les arêtes de type fonctorialité et les arêtes de type bord:

- si (Y_1, Z_1, i) et (Y_2, Z_2, i) sont des triplets relatifs, alors chaque morphisme de X-schémas $f : Y_2 \to Y_1$ tel que $f(Z_2) \subseteq Z_1$ définit une arête
$$(Y_2, Z_2, i) \to (Y_1, Z_1, i)\ ; \tag{3}$$
- si (Y, Z, i) est un triplet relatif, alors tout sous-schéma fermé $W \subseteq Z$ définit une arête
$$(Y, Z, i) \to (Z, W, i-1). \tag{4}$$

À un triplet (X, Z, i) on peut associer le groupe d'homologie de Betti relative $H_i(X, Z, \mathbb{Q})$ qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. On peut envoyer l'arête (3) sur le morphisme de fonctorialité

$$H_i(Y_2, Z_2, \mathbb{Q}) \to H_i(Y_1, Z_1, \mathbb{Q}) \tag{5}$$

et l'arête (4) sur le morphisme bord

$$H_i(Y, Z, \mathbb{Q}) \to H_{i-1}(Z, W, \mathbb{Q}). \tag{6}$$

Cela donne une représentation

$$\mathsf{T} : \mathscr{D} \to \mathsf{mod}(\mathbb{Q})$$

du carquois $\mathscr{D}$ et la catégorie $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$ des motifs homologiques effectifs est la catégorie abélienne associée à cette représentation du carquois $\mathscr{D}$. Par construction, tout triplet (X, Z, i) définit un motif $\mathsf{H}_i(Y, Z)$ dans $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$ de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel sous-jacent $H_i(Y, Z, \mathbb{Q})$ et les morphismes (5), (6) proviennent de morphismes entre ces motifs dans $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$.

La théorie de Hodge mixte permet de voir que la représentation T se factorise par la catégorie $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ des structures de Hodge polarisables à coefficients rationnels. La propriété universelle du théorème 2.1.1 montre ainsi que le foncteur de réalisation de Betti se factorise en un foncteur

$$\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q}) \to \mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}} \tag{7}$$

$\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle et s'étend en un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle

$$\mathrm{N}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q}) \to \mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}. \tag{8}$$

Remarque 2.1.3. — En considérant la cohomologie plutôt que l'homologie, M. Nori définit une catégorie de motifs cohomologiques effectifs $\mathrm{ECM}(k, \mathbb{Q})$ qui redonne également $\mathrm{N}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q})$ par localisation.

Dans [Jan90], U. Jannsen montre que les foncteurs $\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}} : \mathsf{Sm}/k \to \mathrm{J}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q})$ sont en fait définis pour les paires, de sorte que l'on peut associer à un triplet (X, Z, i) un motif mixte

$$\mathsf{H}^i_{\mathcal{MR}}(X, Z) \in \mathrm{J}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q}).$$

On obtient donc un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire fidèle et exact

$$\mathrm{ECM}(k, \mathbb{Q}) \to \mathrm{J}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q})$$

qui s'étend lui aussi en un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle $\mathrm{N}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q}) \to \mathrm{J}\mathscr{M\!M}(k, \mathbb{Q})$.

2.1.7 Le « basic lemma » et ses applications

L'un des points remarquables de la théorie de M. Nori est que la catégorie $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$ contient en fait bien plus de motifs que ne le suggère à priori la définition: (a) M. Nori a construit un foncteur de réalisation (voir e.g. [Lev05] pour une esquisse de construction)

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{EHM}(k)) \tag{9}$$

où $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ est la catégorie triangulée des motifs effectifs géométriques construite par V. Voevodsky dans [Voe00]; (b) dans [Ara05, Theorem 3.1], D. Arapura a montré que la suite spectrale de Leray en cohomologie de betti associée à un morphisme *projectif* de k-schémas quasi-projectifs est motivique au sens de Nori i.e. qu'elle est l'image, via le foncteur de réalisation de Betti, d'une suite spectrale dans $\mathrm{EHM}(k)$.

En particulier, en composant les foncteurs (9) et (7), on obtient un foncteur de réalisation de Hodge dont la construction est très différente de celle donnée par A. Huber dans [Hub00, Hub04] puisqu'elle n'utilise plus les complexes de Hodge et l'équivalence construite par A. Beĭlinson.

Ces applications reposent sur une conséquence particulière, le « basic lemma » [Nor02, Basic Lemma – first form], d'un résultat bien plus général dû à A. Beĭlinson [Beĭ87c, Lemma 3.3]. Le résultat de A. Beĭlinson joue un rôle crucial dans la définition des foncteurs image directe et image directe à support propre

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})) \underset{f_!^{\mathscr{H}}}{\overset{f_*^{\mathscr{H}}}{\rightrightarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})),$$

associés à un morphisme $f : Y \to X$ de variétés quasi-projectives complexes, dans la théorie de Hodge-Saito [Sai90]. Rappelons l'énoncé du « basic lemma »:

***Lemme 2.1.4* (A. Beĭlinson).** — *Soit Y un k-schéma quasi-projectif. On suppose Y affine et* $\dim(Y) = n$*. Pour tout fermé W de Y de dimension $\leqslant n-1$, il existe un fermé Z de Y contenant W de dimension $\leqslant n-1$ et tel que pour tout entier $i \neq n$*

$$H_i(X, Z, \mathbb{Q}) = 0.$$

Si Y est intègre, on peut en outre choisir Z de sorte que son complémentaire dans Y soit lisse sur k.

Ce lemme permet, partant d'un k-schéma quasi-projectif affine réduit Y de dimension n, de fabriquer par récurrence une suite de sous-schémas fermés réduits

$$\emptyset \subseteq Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots \subseteq Y_n = Y$$

tels que $\dim(Y_i) \leqslant i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ et tels que les conditions suivantes soient vérifiées:

- si $\dim(Y_i) = i$ alors $H_k(Y_i, Y_{i-1}, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq i$;
- si $\dim(Y_i) \leqslant i-1$, alors $Y_i = Y_{i-1}$.

En utilisant les morphismes bord, cette suite de sous-schémas fermés définit un complexe,

$$H_n(Y_n, Y_{n-1}, \mathbb{Q}) \to H_{n-1}(Y_{n-1}, Y_{n-2}, \mathbb{Q}) \to \cdots \to H_0(Y_0, \mathbb{Q}).$$

L'on vérifie aisément par récurrence que le groupe d'homologie H_i de ce complexe est égal au groupe d'homologie $H_i(Y, \mathbb{Q})$ de Y. Mais, par définition de la catégorie $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$, le complexe provient d'un complexe d'objets de $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$, complexe que l'on peut considérer comme étant le motif homologique du schéma affine Y dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q}))$ c'est-à-dire l'image du motif de Y par foncteur de réalisation (9).

2.1.8 Motifs à la Nori sur les schémas quasi-projectifs

Dans [Ara13] D. Arapura propose une généralisation de la théorie de M. Nori dans le cadre relatif. Son approche a pour modèle la théorie des faisceaux constructibles et non la théorie des faisceaux pervers. Plus précisément à un k-schéma quasi-projectif X, il associe une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathcal{M}(X, \mathbb{Q})$ qui est munie d'un foncteur exact et fidèle à valeurs dans la catégorie abélienne des faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur X^{an} algébriquement constructibles. L'idée de base de sa construction est d'utiliser le formalisme tannakien sous la forme donnée par M. Nori. Pour se ramener à des représentations de carquois à valeurs dans des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie à partir de faisceaux constructibles, il faut travailler dans un premier temps à stratifications fixées, choisir un point dans chaque strate (pour pouvoir considérer la fibre du faisceau qui est localement constant sur la strate en ce point) et puis effectuer un passage à la limite sur les stratifications techniquement très délicat.

Dans [Ivo14d, Ivo14c] nous avons développé une approche différente dans laquelle les faisceaux pervers jouent le rôle de modèle cette fois.

2.2 Théorie homotopique stable des schémas

Nous fixons un corps k de caractéristique zéro. Les constructions ainsi qu'un certain nombre de propriétés ou de théorèmes sont vrais dans un contexte plus général. Celui-ci sera suffisant pour nos besoins.

La théorie homotopique stable des schémas a été initiée par F. Morel et V. Voevodsky [MV99, Voe98] et par la suite de nombreux mathématiciens ont contribué à son développement, notamment J. Ayoub dont les travaux [Ayo07a, Ayo07b, Ayo09] jouent un rôle important dans notre travail. Elle constitue le pendant, en géométrie algébrique, de la topologie algébrique classique et plus précisément de la théorie homotopique stable des espaces topologiques dont elle emprunte le langage (catégorie de modèles, ensembles simpliciaux, spectres. . .) et les méthodes.

2.2.1 Les catégories homotopiques stables des schémas

Résumons rapidement les principaux résultats de [Ayo07a, Ayo07b]. Soit X un k-schéma quasi-projectif. La théorie homotopique stable des schémas permet d'associer à tout X-schéma quasi-projectif lisse Y son type d'homotopie stable qui vit dans la catégorie homotopique stable des X-schémas $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$[(3)].

Rappelons les grandes lignes de la construction de cette catégorie triangulée (voir [Ayo07b] pour les détails). Rappelons que celle-ci dépend du choix d'une topologie sur la catégorie Sm/X des X-schémas quasi-projectifs lisses qui peut-être soit la topologie de Nisnevich, soit la topologie étale suivant les besoins (les catégories obtenues étant différentes naturellement). Le point de départ est la catégorie $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ des préfaisceaux sur Sm/X à valeurs dans $\mathfrak{M}$ que l'on munit de la structure de modèle projective. Par localisation de Bousfield, on peut imposer l'invariance par homotopie ainsi que la descente pour la topologie Nisnevich ou étale suivant le choix, pour obtenir

(3) La lettre $\mathfrak{M}$ fait référence à une catégorie de modèle stable $\mathfrak{M}$ qui sert de coefficients dans la construction. Pour nos besoins, il est suffisant de supposer que $\mathfrak{M}$ est soit la catégorie des S^1-spectres d'ensemble simpliciaux, soit la catégorie $\mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ des complexes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels munie de sa structure de modèle projective.

une nouvelle structure de modèle sur $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ appelé la structure de modèle $\mathbb{A}^1$-locale. Notons alors T « la sphère de Tate »

$$T := \frac{\mathbb{G}_{m,X} \otimes \mathbb{1}}{X \otimes \mathbb{1}}$$

et considérons la catégorie $\mathsf{Spt}_T^\Sigma(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ des T-spectres symétriques d'objets de $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$ que l'on munit de la structure de *modèle stable* induite par la structure de modèle $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathfrak{M})$. La catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est par définition la catégorie homotopique de cette catégorie de spectres

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) := \mathsf{Ho}(\mathsf{Spt}_T^\Sigma(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))))$$

pour cette structure de modèle. Le type d'homotopie stable de Y est alors le T-spectre symmétrique $\mathrm{Sus}_T^0(X \otimes \mathbb{1})$.

Dans [Ayo07b], J. Ayoub a construit le formalisme des opérations de Grothendieck sur les catégories homotopiques stables $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$. Plus précisément, pour tout morphisme de k-schémas quasi-projectifs $f : X \to Y$, il construit des adjonctions (voir [Ayo07a, Scholie 1.4.2])

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) \underset{f_*}{\overset{f_*}{\leftrightarrows}} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y) \underset{f^!}{\overset{f_!}{\rightleftarrows}} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X).$$

vérifiant les relations attendues entre ces foncteurs (adjonctions, théorème de changement de base propre, théorème de changement de base lisse), un produit tensoriel $\otimes$, un Hom interne $\underline{\mathsf{Hom}}$ ainsi qu'un foncteur de dualité vérifiant les propriétés familières en théorie ℓ-adique.

2.2.2 Les cycles proches selon J. Ayoub

Les foncteurs cycles proches ont été introduits par A. Grothendieck et son école dans le cadre transcendant et en cohomologie ℓ-adique [SGA73]. Dans [Ayo07a, Ayo07b] J. Ayoub a montré que l'on pouvait les définir non seulement en théorie des motifs mais également en théorie homotopique stable des schémas. La construction de J. Ayoub s'inspire du travail de M. Rapoport et T. Zink [RZ82] et s'inscrit plus généralement dans une étude systématique et axiomatique de foncteurs du type cycles proches : les foncteurs de spécialisation.

Résumons succintement le travail de J. Ayoub en commençant par la théorie des cycles proches associés à un morphisme de k-schémas quasi-projectifs $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. L'on a dans ce cas le diagramme commutatif de morphismes de k-schémas

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta := \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_k & \sigma := \mathsf{Spec}(k), \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où i est la section nulle et j désigne l'immersion ouverte canonique. Le foncteur cycles proches motiviques

$$\Psi_f : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \to \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma)$$

de [Ayo07b] est obtenu à partir du système de spécialisation trivial $\chi_f = i^* j_*$ et d'une sorte de revêtement universel motivique de $\mathbb{G}_{m,k}$ via la technique de construction de systèmes de spécialisation exposée dans [Ayo07b, §3.2]. Ce revêtement universel est en fait un diagramme de k-schémas $(\mathscr{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$ muni d'un morphisme

$$(\theta^{\mathscr{R}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) : (\mathscr{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \to \mathbb{G}_{m,k}.$$

Ici Δ désigne comme d'habitude la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés $\underline{n} = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, et dont les morphismes sont les applications croissantes tandis que $\mathbb{N}^\times = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est muni de la relation d'ordre opposée à la relation de division.

Le foncteur Ψ_f est alors explicitement donné par la formule :

$$\Psi_f = (p_{\Delta \times \mathbf{N}^\times})_\sharp \circ \chi_{f, p_{\Delta \times \mathbf{N}^\times}} \circ (\theta^{\mathscr{R}}_f)_* \circ (\theta^{\mathscr{R}}_f)^* \circ (p_{\Delta \times \mathbf{N}^\times})^*$$

dans laquelle le morphisme $(\theta^{\mathscr{R}}_f, p_{\Delta \times \mathbf{N}^\times}) : (\mathscr{R}_f, p_{\Delta \times \mathbf{N}^\times}) \to X_\eta$ obtenu par changement de base le long du morphisme f_η. Comme dans la théorie transcendante ou ℓ-adique, ces foncteurs sont compatibles aux images réciproques par des morphismes lisses, aux images directes par des morphismes propres et préservent la constructibilité [Ayo07b]. De plus, lorsque l'on se donne un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, J. Ayoub a construit dans [Ayo10] des foncteurs de réalisation de Betti et montré que ces foncteurs sont compatibles aux six opérations ainsi qu'aux foncteurs cycles proches (voir [Ayo10, Théorème 4.9]).

Dans [Ayo09] J. Ayoub introduit également des foncteurs cycles proches dans le cas où la droite affine $\mathbb{A}^1_k := \mathsf{Spec}(k[t])$ est remplacée par le spectre de l'anneau des séries formelles $R = k[[t]]$. Cette situation se ramène à la précédente en considérant le morphisme $\mathsf{Spec}(R) \to \mathbb{A}^1_k$. Ce dernier n'est certes pas de type fini mais ceci ne pose pas de problèmes pour la définition des cycles proches (tout comme pour les foncteurs f_* et f^* d'ailleurs). Ainsi si $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ est un morphisme de type fini, on a un diagramme commutatif de morphismes de schémas

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta = \mathsf{Spec}(K) \arrow[r, "j"] & \mathsf{Spec}(R) & \mathsf{Spec}(k) =: \sigma, \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où $K = k((t))$ est le corps des fractions de R et un foncteur cycles proches

$$\Psi_f : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \to \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma).$$

À nouveau ces foncteurs sont compatibles aux images réciproques par des morphismes lisses, aux images directes par des morphismes propres et préservent la constructibilité

[Ayo07b, Ayo14]. Ils sont de plus compatibles avec les foncteurs cycles proches de la théorie ℓ-adique via le foncteur de réalisation de [Ayo14].

2.2.3 Les motifs des variétés analytiques rigides selon J. Ayoub

Nous reprenons maintenant la situation arithmétique précédente. Ainsi $R = k[[t]]$ est l'anneau des séries formelles en la variable t et $K = k((t))$ est son corps des fractions qui est un corps valué complet non-archimédien. Dans [Ayo09], J. Ayoub a construit, sur le modèle de la théorie algébrique, la catégorie homotopique stable $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ des K-variétés analytiques rigides. Les ingrédients de base sont cette fois les K-variétés analytiques rigides lisses, la topologie de Nisnevich ou étale en géométrie rigide et la boule de Tate.

Nous ne ferons pas de rappel de géométrie rigide dans ce paragraphe, et renvoyons par exemple à [Gro60, §10], [Abb10, Ray74, BGR84] ou [Ayo09, §1.1]. Rappelons tout de même que l'on peut associer, à un K-schéma séparé de type fini X, une variété analytique rigide X^{an} et que cette construction se traduit au niveau des catégories homotopiques stables par une adjonction

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K) \leftrightarrows \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) : \mathrm{Rig}_*$$

provenant d'une adjonction de Quillen au niveau des catégories de spectres correspondantes. Si X est un K-schéma lisse de type fini, alors par construction $\mathrm{Rig}^*(\mathrm{M}(X)) = \mathrm{M}_{rig}(X^{\mathrm{an}})$.

Par ailleurs si $\mathscr{X}$ est un R-schéma formel séparé topologiquement de type fini, sa fibre générique $\mathscr{X}_\eta$ est une variété analytique rigide quasi-compacte. Rappelons que si X est un R-schéma séparé de type fini, alors en notant $\mathscr{X}$ le complété t-adique de X et $X_\eta = X \times_R K$ le K-schéma obtenu par changement de base, on a une immersion ouverte canonique

$$\mathscr{X}_\eta \hookrightarrow (X_\eta)^{\mathrm{an}}$$

qui est un isomorphisme lorsque X est propre sur R.

Rappelons les principaux résultats de [Ayo09] concernant la structure de la catégorie $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ et ses relations avec la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$ du corps résiduel k.

Soient X un k-schéma, $g \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^\times$ et $r \in \mathbb{N}^\times$. On pose

$$Q_r^{sch}(X, g) := (X \times_k R)[V]/(V^r - gt)$$

À partir de ce R-schéma, on peut considérer son complété formel $Q_r^{for}(X, g)$ et sa fibre générique au sens de Raynaud $Q_r^{rig}(X, g)$ ou bien le K-schéma $Q_r^{geo}(X, g) = Q_r^{sch}(X, g)_K$ et son analytifié $Q_p^{an}(X)$.

***Théorème 2.2.1* (J. Ayoub [Ayo09]).** — *La catégorie triangulée* $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ *est compactement engendrée par les objets de la forme* $\mathrm{Sus}^p_{T^{\mathrm{an}}}(Q_r^{rig}(X, g) \otimes \mathbb{1})$ *où* X

est un k-schéma lisse de type fini, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $g \in \mathscr{O}(X)^\times$. De plus le morphisme canonique

$$\mathrm{Sus}^p_{T^{\mathrm{an}}}(Q^{rig}_r(X,g) \otimes \mathbb{1}) \to \mathrm{Sus}^p_{T^{\mathrm{an}}}(Q^{an}_r(X,g) \otimes \mathbb{1})$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

Du théorème on peut déduire le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. — *Les objets compacts de* $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ *sont fortement dualisables.*

En effet d'après le théorème 2.2.1, il suffit de prouver que les les objets

$$\mathrm{Sus}^p_{T^{\mathrm{an}}}(Q^{rig}_r(X,g) \otimes \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Sus}^p_{T^{\mathrm{an}}}(Q^{an}_r(X,g) \otimes \mathbb{1}) = \mathrm{Rig}^*(\mathrm{Sus}^p_T(Q^{geo}_r(X,g) \otimes \mathbb{1}))$$

sont fortement dualisables dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Comme Rig^* est un foncteur monoïdal symétrique unitaire, il suffit de vérifier que $\mathrm{Sus}^p_T(Q^{geo}_r(X,g) \otimes \mathbb{1})$ est fortement dualisable dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Ceci découle de [Rio05] (voir également [Ayo09, Lemme 1.3.29]).

Rappelons que par définition, la catégorie $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ des motifs quasi-unipotents est la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m,k})$ stable par sommes infinies et engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}^p_T(Q^{gm}_r(X,g) \otimes \mathbb{1})$ où par définition $Q^{gm}_r(X;g)$ est le $\mathbb{G}_{m,k}$-schéma

$$Q^{gm}_r(X;g) := \mathsf{Spec}(\mathscr{O}_X[T,T^{-1},V]/(V^r - gT)) \to \mathsf{Spec}(k[T,T^{-1}]) = \mathbb{G}_{m,k}.$$

En utilisant notamment le théorème 2.2.1, J. Ayoub démontre alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.3 **(J. Ayoub [Ayo09]).** — *La composée des foncteurs*

$$\mathfrak{F} : \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k) \hookrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m,k}) \xrightarrow{t^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$$

est une équivalence de catégories.

Fixons maintenant un quasi-inverse $\mathfrak{R}$. On peut alors passer de la catégorie homotopique stable du corps K à la catégorie homotopique stable du corps résiduel k de deux manières a priori distinctes : soit en considérant le foncteur cycles proches Ψ_{Id} soit en considérant le foncteur composé

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{1^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k).$$

Théorème 2.2.4 **(J. Ayoub [Ayo09]).** — *Il existe un 2-morphisme inversible entre Ψ_{Id} et la composée*

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{1^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k).$$

Ce théorème montre, dans le cas le plus simple possible, que les cycles proches motiviques proviennent en fait de la géométrie rigide puisque Ψ_{Id} coïncide essentiellement modulo analytification avec le foncteur $1^* \circ \mathfrak{R}$. Le lien plus général entre les cycles proches et la géométrie rigide suggéré par ce théorème fait l'objet de l'article [AIS13] et les théorèmes 4.1.1 et 4.4.1 permettent de mieux comprendre ces relations.

2.3 Catégories triangulées de motifs

2.3.1 Les conjectures de Grothendieck-Beĭlinson

Dans [Grob, p. 193, p. 237] A. Grothendieck considère le formalisme des six opérations et le comportement des poids sous ces opérations comme « *indissolublement lié* » à la théorie des motifs qui en constitue « *la ligne d'horizon idéale* ». L'existence de catégories triangulées de motifs sur un schéma munies d'un formalisme des six opérations fait partie intégrante de la façon dont il voit la théorie des motifs. Dans [Groa], il envisage ainsi l'existence pour tout schéma X d'une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{MM}(X)$ de motifs mixtes sur X se réalisant en des faisceaux ℓ-adiques constructibles et dont les catégories dérivées bornées sont munies d'un formalisme des six opérations compatibles avec celui qu'il vient de construire avec son école en théorie ℓ-adique (le foncteur de réalisation étant exact fidèle et tensoriel).

Cette esquisse a été précisée et étendue par A. Beĭlinson dans [Beĭ87b, 5.10]. Notons que par rapport à la vision de A. Grothendieck l'une des différences est que la catégorie des motifs mixtes $\mathscr{MM}(X)$ recherchée n'est plus modelée sur la catégorie des faisceaux constructibles mais sur la catégorie des faisceaux pervers. Comme observé par P. Deligne dans [Del94, 2.1], « *ce n'est que dans un tel cadre qu'on peut espérer une filtration par le poids* ». Celle-ci possèdent en effet de bien meilleures propriétés. En effet la catégorie des faisceaux pervers ℓ-adiques de [BBD82] est noethérienne, artinienne (tous les objets sont donc de longueur finie) et munie d'une filtration par le poids [BBD82, Théorème 5.3.5].

Notons que dans l'énoncé apparaissant dans [Beĭ87b, 5.10], la catégorie $\mathscr{DM}(X)$ est la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathscr{MM}(X)$ (ce qui est compatible avec les équivalences prouvées par A. Beĭlinson au niveau des réalisations [Beĭ87c]). Dans [Del94, 3.1], P. Deligne suggère que ceci pourrait être trop optimiste. Rappelons le cadre conjectural tel qu'exposé dans [Jan94, Conjecture 4.8] :

***Conjecture 2.3.1* (A. Grothendieck ; A. Beĭlinson).** — *Soit X un k-schéma quasi-projectif, il existe une catégorie triangulée $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{DM}(X)$ ayant les propriétés suivantes :*

1. *Les catégories $\mathscr{DM}(X)$ sont munies d'un formalisme des six opérations. Pour $f : X \to Y$ un morphisme de k-schémas quasi-projectifs, on a donc les foncteurs*

triangulés

$$\begin{tikzcd} \mathscr{DM}(X) \arrow[r, shift right, "f_*^{\mathscr{DM}}"'] & \mathscr{DM}(Y) \arrow[l, shift right, "f^*_{\mathscr{DM}}"'] \arrow[r, shift left, "f_!^{\mathscr{DM}}"] & \mathscr{DM}(X) \arrow[l, shift left, "f^!_{\mathscr{DM}}"] \end{tikzcd}$$

ainsi que le produit tensoriel et le Hom interne

$$\otimes : \mathscr{DM}(X) \times \mathscr{DM}(X) \to \mathscr{DM}(X) \qquad \underline{\mathsf{Hom}} : \mathscr{DM}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathscr{DM}(X) \to \mathscr{DM}(X).$$

Ces foncteurs vérifiant les compatibilités usuelles.

2. *Il existe un foncteur triangulé*

$$\mathscr{DM}(X) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})) \tag{10}$$

compatible avec le formalisme des six opérations.

3. *Pour tout k-schéma quasi-projectif X, il existe un isomorphisme « classe de cycles » :*

$$\mathrm{CH}^i(X,j)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H^{2i-j}_{\mathscr{DM}}(X, \mathbb{Q}(i)) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{DM}(X)}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{DM}}, \mathbb{Q}_X^{\mathscr{DM}}(i)[2i-j])$$

où le terme de gauche est le groupe de Chow supérieur de S. Bloch.

4. *Il existe sur $\mathscr{DM}(X)$ une t-structure non dégénérée de coeur $\mathscr{MM}(X)$ telle que*
   (a) *le foncteur de réalisation* (10) *soit t-exact et le foncteur* exact *induit*

   $$\mathscr{MM}(X) \to \mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}) \tag{11}$$

   soit fidèle.
   (b) *pour tout objet $A \in \mathscr{MM}(X)$ il existe une filtration canonique (filtration par le poids)*

   $$\cdots \subseteq W_a(A) \subseteq W_{a+1}(A) \subseteq \cdots \subseteq A$$

   compatible via (11) avec la filtration par le poids .
   (c) *la sous-catégorie de $\mathscr{MM}(X)$ formée des objets purs est semi-simple.*

Dans la conjecture précédente $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})$ est la catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire des modules de Hodge mixtes construite par M. Saito [Sai88, Sai90].

2.3.2 Motifs étales à coefficients rationnels

La théorie homotopique stable des schémas introduite par F. Morel et V. Voevodsky permet de construire en particulier sur tout k-schéma quasi-projectif X une catégorie triangulée des motifs étales à coefficients rationnels. En effet en prenant la topologie étale dans la construction de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$ pour $\mathfrak{M} = \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ la catégorie des complexes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, on obtient la catégorie des motifs étales $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X, \mathbb{Q})$ étudiée notamment dans [Ayo07b, Ayo14]. Les travaux de J. Ayoub [Ayo07a, Ayo07b, Ayo10, Ayo14] fournissent le formalisme des six opérations, le formalisme des cycles proches, les réalisations ℓ-adiques et de Betti ainsi que leurs compatibilités aux opérations.

Dans [Ayo07a] est également introduit une notion de constructibilité, un motif étant dit constructible lorsqu'il appartient l̀a sous-catégorie pleine $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$ stable par facteur direct et contenant les motifs homologiques des X-schémas quasi-projectifs lisses. J. Ayoub montre également que les six opérations et les cycles proches préservent la constructibilité.

La catégorie $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$ des motifs étales constructibles constitue le meilleur candidat dont on dispose actuellement pour jouer le rôle de catégorie $\mathscr{DM}(X)$ de la conjecture 2.3.1. En effet l'existence du formalisme des six opérations comme dans 2.3.1.*1.* découle du travail de J. Ayoub [Ayo07a, Ayo07b] et 2.3.1.*3.* est une conséquence des travaux de V. Voevodsky de la manière suivante. On dispose de foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Q}) \arrow[r] & \mathrm{DM}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Q}) \\ & \mathrm{DM}(k,\mathbb{Q}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{DM}(k,\mathbb{Q})$ désigne la catégorie des motifs construite par V. Voevodsky dans [Voe00] via les faisceaux Nisnevich avec transferts et $\mathrm{DM}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Q})$ sa variante étale. Ces deux foncteurs sont en fait des équivalences, pour le foncteur horizontal cela découle de [Ayo14, Théorème B.1] et pour le foncteur vertical de [MVW06, Theorem 14.30, Lemma 14.21]). Ainsi 2.3.1.*3.* est une conséquence de [Voe00, Voe02]

L'existence du foncteur de 2.3.1.*2* lorsque $X = \mathsf{Spec}(k)$ est prouvée par A. Huber dans [Hub00, Hub04] et le cas général résulte de notre travail [Ivo14c] (nous n'avons cependant pas encore vérifié la compatibilité aux six opérations ; cette question nous semble cependant tout à fait abordable bien que particulièrement technique).

Le point crucial de la conjecture 2.3.1 est l'existence de la t-structure motivique, soit le point 2.3.1.*4*. Ce dernier est totalement ouvert et constitue sans aucun doute l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie.

2.3.3 Liens entre différentes constructions

Dans les années 90 quatre constructions de catégories triangulées de motifs sur k ont été données par M. Hanamura [Han04], M. Levine [Lev98] et V. Voevodsky [Voe96, Voe00] qui a proposé deux approches différentes. Sa première définition [Voe96] passe par la h-topologie et fournit une catégorie triangulée $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Q})$. La seconde est celle plus connue de [Voe00] qui utilise les correspondances finies et les faisceaux Nisnevich avec transferts, elle donne une catégorie $\mathrm{DM}(X,\mathbb{Q})$ et sa sous-catégorie pleine $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q})$ formée des motifs géométriques(4). Lorsque

(4)Notons qu'a priori seule la sous-catégorie $\mathrm{DM}^{-}(k,\mathbb{Q})$ de $\mathrm{DM}(k,\mathbb{Q})$ est explicitement construite dans [Voe00]. Cependant $\mathrm{DM}(k,\mathbb{Q})$ s'obtient à partir de là par des constructions standard en topologie algébrique. Plus généralement, si X est un k-schéma quasi-projectif, en utilisant la théorie des

X est géométriquement unibranche les deux constructions donnent le même résultat et l'on a une équivalence de catégories [Sch12, CD13]

$$\mathrm{DM}_h(k,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{DM}(k,\mathbb{Q}).$$

Il résulte de [Ayo14, MVW06] que les catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\mathbb{Q})$ et $\mathrm{DM}(k,\mathbb{Q})$ sont équivalentes. Plus généralement, D.-C. Cisinski et F. Déglise on montré dans [CD13] que lorsque le schéma X est géométriquement unibranche, l'on avait une équivalence de catégories

$$\mathrm{DM}(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q})$$

induisant une équivalence de catégories entre $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Q})$ et $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$.

D'après [CD13, Theorem 16.1.2, Theorem 16.2.18], l'on a des équivalences de catégories triangulées

$$\mathrm{DM}_{\text{Б}}(X) \simeq \mathrm{DM}_h(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q})$$

où $\mathrm{DM}_{\text{Б}}(X)$ est la catégorie des motifs de Beĭlinson introduite par D.-C. Cisinski et F. Déglise dans [CD13, Définition 14.2.1]. On notera que la catégorie des motifs de Beĭlinson est également $\mathbb{Q}$-linéaire et n'a été introduite qu'après les travaux [Ayo07a, Ayo07b] de J. Ayoub dans lesquels les catégories de motifs étales sont introduites et le formalisme des six opérations établi.

Notons que les catégories de motifs $\mathcal{DM}(k)$ et $\mathcal{D}(k)$ construites respectivement par M. Levine et M. Hanamura dans [Lev98, Han04] sont équivalentes à $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ (voir [Lev98, Bon09] et [Ivo08]). L'on peut également, comme en topologie algébrique classique, voir la catégorie des motifs comme la catégorie homotopique stable des modules sur le spectre d'Eilenberg-MacLane qui représente la cohomologie motivique dans $\mathbf{SH}(k)$ (voir [RØ08]).

2.4 Coefficients : exemple de la théorie de Hodge

Pour un survol de la théorie de Hodge nous renvoyons à [BZ90].

2.4.1 Coefficients de Hodge

La théorie développée par M. Saito [Sai88, Sai90] est une vaste généralisation de la théorie de Hodge classique. Elle fournit l'extension du formalisme des six opérations à la théorie de Hodge, dont A. Grothendieck avait envisagé l'existence inspiré en particulier par le rêve motivique[(5)].

cycles relatifs de [SV00], on peut construire de manière identique la catégorie $\mathrm{DM}(X,\mathbb{Q})$ et sa sous-catégorie pleine $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(X,\mathbb{Q})$. Il s'agit de la catégorie que nous utilisons dans [Ivo07] (voir également [Ivo11b] pour un exposé).

(5) Dans [Grob] cette théorie est mentionnée à de nombreuses reprises sous le nom de coefficients de Hodge-Deligne (voir [Grob, p. 824] notamment)

Pour résumé de manière très lapidaire, avant le travail de M. Saito, la théorie de Hodge permettait de munir la cohomologie des variétés algébriques complexes ou de familles de variétés projectives et lisses de structures de Hodge mixtes et de fabriquer certaines structures de Hodge mixtes limites, fournissant par la même un formalisme très partiel de cycles proches. Les notions centrales étant celles de structures de Hodge mixtes et de variations de structures de Hodge (un raffinement de la notion de connexion et de système local).

La théorie des $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers fournit via leurs catégories dérivées bornées les coefficients de de Rham tandis que la théorie des faisceaux pervers et des faisceaux constructibles fournit les coefficients de Betti, la correspondance de Riemann-Hilbert sous la forme prouvée par M. Kashiwara [Kas84] et Z. Mebkhout [Meb84b, Meb84a] offrant un pont entre les types de coefficients.

En s'appuyant sur ces deux théories et sur la théorie de Hodge classique, M. Saito construit dans [Sai88, Sai90] pour toute variété complexe quasi-projective une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$ dont les objets sont appelés modules de Hodge mixtes et dont les catégories dérivées sont munies du formalisme des opérations : les quatres opérations

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \underset{f_*^{\mathscr{H}}}{\overset{f^*_{\mathscr{H}}}{\leftrightarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})) \underset{f^!_{\mathscr{H}}}{\overset{f_!^{\mathscr{H}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})).$$

le produit tensoriel $\otimes$, le Hom interne $\mathscr{H}om$ et les cycles proches.

2.4.2 $\mathscr{D}$-modules filtrés munis d'une structure rationnelle

Dans [Sai88, 5.1.1], M. Saito introduit la catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$ des $\mathscr{D}_X$-modules filtrés $(\mathscr{M},F)$ tels que la filtration F soit compatible à la filtration par l'ordre sur $\mathscr{D}_X$, $\mathrm{gr}^F\mathscr{M}$ soit un $\mathrm{gr}^F\mathscr{D}_X$-module cohérent et $\mathscr{M}$ soit un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier[(6)]. Le complexe de Spencer $\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M})$ d'un $\mathscr{D}_X$-module à droite holonome $\mathscr{M}$, étant un faisceau pervers, on a un foncteur exact

$$\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Mod}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X) \xrightarrow{\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}} \mathrm{Perv}(X,\mathbb{C})$$

et l'on peut considérer la définition suivante :

Définition 2.4.1. — La catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ est le 2-produit fibré des catégories $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$ et $\mathrm{Perv}(X,\mathbb{Q})$ au dessus de $\mathrm{Perv}(X,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q}) := \mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X) \times_{\mathrm{Perv}(X,\mathbb{C})} \mathrm{Perv}(X,\mathbb{Q}).$$

Un objet de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier avec $\mathbb{Q}$-structure.

(6) La filtration est croissante, séparé et exhaustive.

Par définition un objet $\underline{\mathscr{M}}$ dans $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est un quintuplet $(K_{\mathbb{Q}}, K_{\mathbb{C}}, K_{\mathscr{D}}, \alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{\mathscr{M}}}, \alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{\mathscr{M}}})$ où $K_{\mathscr{D}} := (\mathscr{M}, F)$ est un objet de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$, pour $R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, K_R est un objet de $\mathrm{Perv}(X, R)$ et $\alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{\mathscr{M}}}, \alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{\mathscr{M}}}$ sont des isomorphismes

$$K_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{\mathscr{M}}}} K_{\mathbb{C}} \qquad \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{\mathscr{M}}}} K_{\mathbb{C}}.$$

Un morphisme $\underline{u} : \underline{\mathscr{M}} \to \underline{\mathscr{M}}'$ est un triplet $(u_{\mathbb{Q}}, u_{\mathbb{C}}, u_{\mathscr{D}})$ de morphismes commutant aux isomorphismes de comparaison.

Remarque 2.4.2. — La catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est également équivalente à la catégorie des triplet $\underline{\mathscr{M}} = (K_{\mathbb{Q}}, K_{\mathscr{D}}, \alpha_{\underline{\mathscr{M}}})$ où $K_{\mathscr{D}} := (\mathscr{M}, F)$ appartient à $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$, $K_{\mathbb{Q}}$ est un objet de $\mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})$ et $\alpha_{\underline{\mathscr{M}}} : K_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M})$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Perv}(X, \mathbb{C})$. Les morphismes sont simplement des couples $(u_{\mathbb{Q}}, u_{\mathscr{D}})$ de morphismes tels que

$$\alpha_{\underline{\mathscr{M}}'} \circ (u_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(u_{\mathscr{D}}) \circ \alpha_{\underline{\mathscr{M}}}.$$

Les variations de structures de Hodge pures de poids k définissent naturellement des objets de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$. En effet lorsque l'on se donne une telle variation $\underline{\mathbb{V}}$, on a en particulier un système local $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}$ sur X^{an}, une connexion à singularités régulières à l'infini $(\mathscr{V}, \nabla)$ munie d'une filtration $\mathscr{F}$ par ses sous-$\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang fini satisfaisant la condition de transversalité de P. Griffiths

$$\nabla : \mathscr{F}^k\mathscr{V} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^{k-1}\mathscr{V}$$

et un isomorphisme de systèmes locaux

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha_{\underline{\mathbb{V}}}} \mathrm{Ker}\, \nabla^{\mathrm{an}}.$$

La connexion ∇ définit sur $\mathscr{V}$ une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche et en posant $F_k\mathscr{V} := \mathscr{F}^{-k}\mathscr{V}$, la condition de transversalité de P. Griffiths assure que $(\mathscr{V}, F)$ est un $\mathscr{D}_X$-module filtré à gauche. Cela permet de voir que $\underline{\mathbb{V}}$ définit naturellement un objet

$$^{\mathscr{H}}\underline{\mathbb{V}} \in \mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})^{\mathrm{L}} := \mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)^{\mathrm{L}} \times_{\mathrm{Perv}(X,\mathbb{C})^{\mathrm{L}}} \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{L}}$$

où $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})^{\mathrm{L}}$ désigne la catégorie des $\mathscr{D}_X$-module filtré à gauche et $\mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{L}}$ est la catégorie des faisceaux pervers avec les conventions de [Meb04, 3.3-3] (il y a un décalage par rapport à celles de [BBD82] : les systèmes locaux sont des faisceaux pervers au sens de [Meb04]). On peut comme d'habitude passer des $\mathscr{D}$-modules à gauche aux $\mathscr{D}$-modules à droite par l'équivalence

$$\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})^{\mathrm{L}} \xrightarrow{(-)^r} \mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$$

et poser $\mathbb{V}^{\mathscr{H}} := ({}^{\mathscr{H}}\mathbb{V})^r$. Notons que pour $\underline{\mathscr{M}} = ((\mathscr{M}, F), K, \alpha)$, on a $\mathscr{M}^r = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$ muni de la filtration $F_k\mathscr{M}^r = F_{k+d_X}\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X$ et $K^r = K[d_X]$.

2.4.3 Modules de Hodge purs polarisables

On suppose que X est une variété quasi-projective complexe non-singulière pour simplifier. La construction de la catégorie $\mathrm{MH}(X,w)^p$ des modules de Hodge purs polarisables de poids w se fait en trois temps. Tout d'abord M. Saito restreint la catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ en ne considérant que les objets satisfaisant localement pour la topologie de Zariski sur X les deux conditions suivantes :

(S) $\underline{\mathscr{M}}$ admet une décomposition à support strict i.e. $\underline{\mathscr{M}}$ est somme directe dans $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ d'objets à support strict (un objet de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ est dit à support strict lorsque son support est un fermé irréductible Z de X et qu'il ne possède ni sous-objet non trivial ni quotient non trivial dont le support soit strictement plus petit que Z) ;

(V) $\underline{\mathscr{M}}$ est quasi-unipotent et régulier le long de toute fonction $g : X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

Ces conditions sont nécessaires pour la seconde étape qui consiste à définir par récurrence sur le support les modules de Hodge purs partant du fait qu'un module de Hodge pur de poids w supporté en un point est l'image directe d'une structure de Hodge pure de même poids (voir [Sai88, 5.1.6]). Contrairement au cas des variations de structures de Hodge, il n'est plus possible dans ce cadre d'espérer pouvoir définir un module de Hodge pur en imposant qu'en chaque point les données induisent une structure de Hodge pure. Les images inverses n'étant pas t-exact pour la t-structure perverse, une telle condition n'a en effet aucun sens. À la place, M. Saito utilise les foncteurs cycles proches (cycles évanescents) qui eux sont t-exacts et permettent effectivement de diminuer la dimension du support.

La dernière étape consiste à définir la notion de polarisation pour un module de Hodge pur. Ceci se fait encore par récurrence sur la dimension du support en exploitant le fait que le foncteur de dualité est t-exact pour la structure perverse (voir [Sai88, 5.2.10] pour la définition précise). La catégorie $\mathrm{MH}(X,w)^p$ des modules de Hodge purs polarisables de poids w est alors la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MH}(X,w)$ formé des objets admettant une polarisation. L'existence d'une polarisation joue un rôle essentiel dans pratiquement tous les théorèmes de la théorie et constitue donc en pratique une hypothèse nécessaire.

Revenons un peu plus en détails sur les deux premières étapes. Rappelons que la catégorie des variations de structures de Hodge polarisables est semi-simple et que le système local sous-jacent à une telle variation est semi-simple [Del87]. La condition (S) est alors naturelle si l'on espère voir ces propriétés s'étendre plus généralement aux modules de Hodge purs polarisables. En effet les faisceaux pervers simples sur une variété algébrique complexe X se caractérisent en terme de complexes d'intersection. Si Z est un fermé irréductible et $\mathscr{L}$ un système local irréductible sur un ouvert U dense dans le lieu lisse de Z, alors le complexe d'intersection

$$\mathrm{IC}_X(\mathscr{L}) := i_*(j_{!*}\mathscr{L}[\dim Z])$$

est un faisceau pervers simple sur X de support Z qui ne possède ni sous-object non trivial ni quotient non trivial à support strictement contenu dans Z. De de plus tous les faisceaux pervers simples sur X sont obtenus de cette manière [BBD82] (voir également [HTT08]). Ainsi si le faisceau pervers sous-jacent d'un module de Hodge pur polarisable est semi-simple, alors il doit être une somme directe de complexes d'intersection et la condition (S) est donc satisfaite.

Remarque 2.4.3. — Notons qu'une décomposition comme dans la condition (S) est unique. En effet $\mathrm{Hom}(\underline{\mathscr{M}}, \underline{\mathscr{M}}') = 0$ pour deux objets $\underline{\mathscr{M}}$ et $\underline{\mathscr{M}}'$ à support strict sur des fermés irréductibles Z et Z' distincts. Si Z est un fermé irréductible de X et $\underline{\mathscr{M}}$ satisfait la condition (S), on peut donc définir la Z-composante de $\underline{\mathscr{M}}$, notée $\underline{\mathscr{M}}_Z$, comme le facteur direct de $\underline{\mathscr{M}}$ ayant support strict sur Z dans la décomposition.

La condition (V) porte sur le $\mathscr{D}_X$-module filtré $(\mathscr{M}, F)$ et assure que les cycles proches (et évanescents)[(7)] par rapport à g existent dans la catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ et que la monodromie locale est quasi-unipotente. Plus précisément en notant $i_g : X \hookrightarrow X \times_{\mathbb{C}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ l'immersion fermée par le graphe et $(\mathscr{N}, F)$ l'image directe de $(\mathscr{M}, F)$ par i_g, la condition (V) signifie que les conditions suivantes sont satisfaites (voir [Sai88, 3.1.1 Définition, 3.2.1])[(8)] :

1. il existe une filtration rationnelle croissante V sur $\mathscr{N}$ telle que
   (a) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $V_\alpha \mathscr{N}$ est un $V_0\mathscr{D}_X$-module cohérent et $\cup_{\alpha\in\mathbb{Q}} V_\alpha\mathscr{N} = \mathscr{N}$;
   (b) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $i \in \mathbb{Z}$, $(V_\alpha\mathscr{N})(V_i\mathscr{D}_X) \subseteq V_{\alpha+i}\mathscr{N}$;
   (c) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha < 0$ on a $(V_\alpha\mathscr{N})t = V_{\alpha-1}\mathscr{N}$;
   (d) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ l'endomorphisme $t\partial_t - \alpha$ of $\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathscr{N}$ est nilpotent ;
2. pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha < 0$ on a $(F_pV_\alpha\mathscr{N})t = F_pV_{\alpha-1}\mathscr{N}$;
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > -1$ on a $(F_p\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathscr{N})\partial_t = F_{p+1}\mathrm{Gr}^V_{\alpha+1}\mathscr{N}$;
4. soit W la filtration de monodromie sur $\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathscr{N}$ associée à l'endomorphisme nilpotent $t\partial_t - \alpha$, alors $\mathrm{Gr}^F\mathrm{Gr}^W\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathscr{N}$ est cohérent sur $\mathrm{Gr}^F\mathscr{D}_Y$.

Si une filtration satisfaisant 1a-1d existe, elle est nécessairement unique. Les autres conditions précisent le comportement de la filtration de Hodge F vis à vis de cette filtration. Les cycles proches sont définis par

$$\psi_g(\mathscr{M}, F) = \bigoplus_{-1\leqslant\alpha<0} (\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathscr{N}, F[1])$$

(7) Notons qu'en présence de (V), la condition (S) peut également se lire sur les cycles proches et évanescents [Sai88, 5.1.5 Corollaire].

(8) On note V la filtration sur $\mathscr{D}_X$ définie par

$$V_i\mathscr{D}_X := \{P \in \mathscr{D}_X : Pt^k\mathscr{O}_X[t] \subset t^{k-i}\mathscr{O}_X[t], k \in \mathbb{Z}\}$$

(ici $t^k\mathscr{O}_X[t] = \mathscr{O}_X[t]$ lorsque $k \leqslant 0$ par convention). Notons que $t \in V_{-1}\mathscr{D}_X$, $\partial_t \in V_1\mathscr{D}_X$ et que l'opérateur différentiel $t\partial_t$ appartient à $V_0\mathscr{D}_X$.

où $F[1]_k = F_{k-1}$. L'on dispose en outre d'un isomorphisme canonique (voir [Kas83, MM04]) :

$$\psi_g(\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M})) := \Psi_g(\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M}))[-1] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\psi_g(\mathscr{M}, F)).$$

L'endomorphisme nilpotent N induit par les $t\partial_t - \alpha$ sur le membre de gauche étant compatible avec l'endomorphisme nilpotent $N = 1/2\pi i \log T_u$ où T_u est la partie unipotente de l'opérateur de monodromie locale sur les cycles proches, l'isomorphisme précédent permet de définir un $\mathscr{D}$-module filtré avec $\mathbb{Q}$-structure $\psi_g(\underline{\mathscr{M}})$ de composante $\psi_g(\mathscr{M}, F)$ et $\psi_g(K)$ et muni d'un opérateur nilpotent $N : \psi_g(\underline{\mathscr{M}}) \to \psi_g(\underline{\mathscr{M}})(-1)$. En notant M la filtration de monodromie induite par cet opérateur nilpotent, la condition (V) assure que

$$\mathrm{Gr}_i^M \psi_g(\underline{\mathscr{M}})$$

appartient à $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour un objet $\underline{\mathscr{M}}$ de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ satisfaisant localement pour la topologie de Zariski sur X les conditions (S) et (V) la condition d'être un module de Hodge pur de poids w est définie par récurrence sur la dimension d du support. Lorsque $d = 0$, la condition (S) assure que $\underline{\mathscr{M}}$ est une somme directe d'objets de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ supportés en des points fermés et dans ce cas $\underline{\mathscr{M}}$ est un module de Hodge pur de poids w si et seulement si chacun de ces facteurs directs est l'image directe d'une structure de Hodge pure de même poids. Par récurrence, si $d \geqslant 1$, on dit que $\underline{\mathscr{M}}$ est un module de Hodge pur de poids w lorsqu'il satisfait localement pour la topologie de Zariski sur X les conditions suivantes :

(H1) pour tout fermé irréductible Z de X de dimension $\leqslant d-1$, $\underline{\mathscr{M}}_Z$ est un module de Hodge pur de poids w ;

(H2) pour tout fermé irréductible Z de X de dimension d, toute fonction $g \in \mathscr{O}(X)$ dont l'image dans $\mathscr{O}(Z)$ est non nulle,

$$\mathrm{Gr}_i^M(\psi_g(\underline{\mathscr{M}}_Z))$$

appartient à $\mathrm{MH}(X, w+i-1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si l'on note W la filtration de monodromie centrée en $w-1$, la condition (H2) devient : pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Gr}_i^W \psi_g(\underline{\mathscr{M}}_Z) = \mathrm{Gr}_{i-w+1}^M \psi_g(\underline{\mathscr{M}}_Z)$$

est un module de Hodge pur de poids i.

2.4.4 Modules de Hodge mixtes

Les modules de Hodge mixtes sont définis comme des extensions successives de modules de Hodge purs polarisables, cependant là encore M. Saito ne considère pas toutes les extensions possibles comme admissibles i.e. donnant lieu à un module de Hodge mixte.

Dans [Sai88, 5.1.14] M. SAITO considère la catégorie $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}\mathrm{W}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ dont les objets sont des objets de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ munis d'une filtration croissante finie *i.e.*

$$\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}\mathrm{W}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}) := \mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}; W) \times_{\mathrm{Perv}(X,\mathbb{C};W)} \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q}; W)$$

où $\mathrm{Perv}(X, R; W)$ est la catégorie des R-faisceaux pervers munis d'une filtration croissante finie. Par définition la catégorie $\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ des extensions successives de modules de Hodge purs polarisables est la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}\mathrm{W}(\mathscr{D}, \mathbb{Q})$ formée des objets $\underline{\mathscr{M}}$ tels que

$$\mathrm{Gr}_n^W \underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{MH}(X, \mathbb{Q}, n)^p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons que si X est lisse, toute variation de structures de Hodge mixtes $\underline{\mathbb{V}}$ polarisable définit un objet

$$\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \in \mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q}).$$

Dans [Sai] M. SAITO a donné une présentation plus simple de la définition des modules de Hodge mixtes algébriques. Un objet $\underline{\mathscr{M}}$ de $\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})$ est un module de Hodge mixte si et seulement si localement pour la topologie de Zariski sur X il vérifie la condition suivante :

(M) il existe une fonction $g \in \mathscr{O}_X$ tel que $U = X \setminus g^{-1}(0)$ soit lisse et dense dans X et satisfaisant les deux conditions :
  - la restriction de $\underline{\mathscr{M}}$ à l'ouvert U est une variation de structures de Hodge mixtes admissible au sens de [SZ85, Kas86] ;
  - les cycles proches et évanescents de $\underline{\mathscr{M}}$ sont bien définis le long de g et $\psi_g(\underline{\mathscr{M}})$, $\phi_{g,1}(\underline{\mathscr{M}})$ sont des modules de Hodge mixtes sur le fermé $Z = g^{-1}(0)$.

Cette définition est de nature inductive sur la dimension de X et le point de départ, en dimension zéro, étant la catégorie $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ des structures de Hodge mixtes polarisables. Notons que la seconde condition signifie d'une part que les trois filtrations F, V, W sur l'image de $(\mathscr{M}, F)$ par l'immersion fermée via le graphe de g sont compatibles et d'autre part que les filtrations de monodromie relative associées à l'action de l'opérateur nilpotent N relativement aux filtrations $L_i := \psi_g(W_{i+1}\mathscr{M}, F)$, $L_i := \phi_{g,1}(W_i\mathscr{M}, F)$ existent. L'avantage de cette présentation est qu'avec cette définition il est immédiat que les variations de structures de Hodge mixtes admissibles sont des modules de Hodge mixtes. De même par définition, la catégorie $\mathrm{MHM}(\mathsf{Spec}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ coïncide avec la catégorie $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ des structures de Hodge mixtes polarisables (dans la présentation de [Sai90] ceci est loin d'être évident et fait l'objet d'un théorème difficile).

2.4.5 Théorie de Hodge classique et théorie de Hodge-Saito

La théorie de Hodge développée par M. SAITO est une généralisation de la théorie de Hodge classique sur laquelle elle repose en partie (les travaux [Zuc79, Sch73, CKS87, CKS86, Kas86] jouent un rôle essentiel dans la preuve du théorème de l'image directe et dans la preuve du théorème 2.4.4). L'un des résultats essentiels pour voir comment la théorie de Hodge classique s'agence dans la théorie de M. SAITO est le théorème de structure suivant :

***Théorème 2.4.4* (M. Saito).** — *Soit X une variété complexe quasi-projective lisse et Z un sous-schéma fermé irréductible de X de dimension n.*

1. *Toute variation polarisable de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge de poids $w-n$ sur un ouvert non vide du lieu lisse de Z s'étend uniquement en un objet de $\mathrm{MH}_Z(X,w)^p$.*
2. *Les objets de $\mathrm{MH}_Z(X,w)$ sont tous obtenus de cette manière.*

La catégorie $\mathrm{MH}_Z(X,w)^p$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{VHS}_{\mathrm{gen}}(Z,w-n)^p$ des variations polarisables génériques de structures de Hodge de poids $w-n$ sur Z.

Ce résultat est énoncé comme conjecture dans [Sai88, p. 857] et démontré dans [Sai90, 3.21. Theorem]. Il constitue l'un des résultats les plus difficiles et les plus centraux de la théorie. Il implique en particulier que les variations de structures de Hodge pures polarisables sont des modules de Hodge purs polarisables. Plus précisément, en notant n la dimension de X, on a un foncteur pleinement fidèle

$$\begin{aligned} \mathrm{VHS}(X,w)^p &\to \mathrm{MH}(X,w+n)^p \\ \underline{\mathbb{V}} &\mapsto \underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \end{aligned}$$

Rappelons qu'un module de Hodge $\underline{\mathscr{M}}$ est dit lisse lorsque son faisceau pervers sous-jacent est au décalage près un système local. Comme le montre M. SAITO, ces derniers sont en fait les variations de structures de Hodge mixtes admissibles au sens de [SZ85, Kas86]. En notant $\mathrm{VMHS(X,\mathbb{Q})_{ad}}$ la catégorie abélienne formée par les variations admissibles, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{VMHS(X,\mathbb{Q})_{ad}} &\to \mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{sm}} \\ \underline{\mathbb{V}} &\mapsto \underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories (voir [Sai90, 3.27]).

Même certaines comparaisons, d'apparence peut-être plus anodine, recèlent de réelles difficultés. Dans [Del74b] P. DELIGNE a construit une structure de Hodge mixte sur la cohomologie de Betti d'une variété complexe quasi-projective, la théorie de M. SAITO en fournit une autre via le formalisme des six opérations. Lorsque la variété est lisse, on peut vérifier aisément que ces deux structures sont les mêmes. Si elle est singulière, la comparaison devient considérablement plus difficile et n'est prouvée par M. SAITO que dans [Sai00] via l'utilisation de complexes de Hodge mixtes. La raison tient au fait que les techniques simpliciales utilisées par P. DELIGNE ne peuvent plus être utilisées dans la théorie de M. SAITO du fait que les opérations sur les faisceaux pervers (exceptées cycles proches et dualité) ne sont plus exactes pour la t-structure perverse.

2.4.6 Complexe de Hodge mixtes

Dans la théorie de Hodge développée par P. Deligne dans [Del74b, 8.1], les complexes de Hodge mixtes sont introduits comme un outil permettant de construire des structures de Hodge mixtes sur la cohomologie des variétés algébriques complexes. Cet outil est raffiné par A. Beĭlinson dans [Beĭ86, Beĭ87a], il joue un rôle essentiel dans la définition de la cohomologie de Hodge absolue, un précurseur en théorie de Hodge de la cohomologie motivique. Plus précisément A. Beĭlinson introduit la catégorie triangulée des complexes de Hodge mixtes polarisables $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p}$ et montre que le foncteur

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p} \tag{12}$$

est une équivalence de catégories. Il explique ensuite [Beĭ86, §4] que les constructions de P. Deligne fournissent un complexe de Hodge mixte $\underline{\mathrm{R}\Gamma}(X,\mathbb{Q})$ qui relève l'image directe $\mathrm{R}\pi_*\mathbb{Q}_X$ en cohomologie de Betti, et, définit en utilisant l'équivalence (12), la cohomologie de Hodge absolue comme le groupe :

$$\mathsf{H}^p_{\mathscr{H}^p}(X,\mathbb{Q}(q)) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}})}(\mathbb{Q}(0),\underline{\mathrm{R}\Gamma}(X,\mathbb{Q})(q)[p]).$$

Lorsque [Beĭ86] a été écrit la théorie de M. Saito n'avait pas encore été développée et $\underline{\mathrm{R}\Gamma}(X,\mathbb{Q})$ fournissait un substitut à l'image directe $a_*\mathbb{Q}^{\mathscr{H}}_X$ de la théorie des modules de Hodge mixtes ($a : X \to \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$ étant le morphisme structural).

En dimension supérieure, des catégories de complexes de Hodge mixtes ont été introduites par M. Saito dans [Sai00]. Plus précisément, pour toute variété algébrique complexe X, il construit deux catégories triangulées $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})$ ainsi que des foncteurs triangulés :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q}) \arrow[u, "\mathrm{DR}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

M. Saito montre également [Sai00, 2.10] que le foncteur ε induit une équivalence

$$\varepsilon : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}.$$

Compte tenu de l'équivalence (12) ceci montre en particulier que sur un point la catégorie de M. Saito est équivalente à la catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p}$ ce qui n'est pas évident par construction bien que les définitions des deux catégories soient similaires.

2.5 Les motifs virtuels et l'intégration motivique

Introduite en 1995 par M. Kontsevich [Kon95] pour prouver l'invariance des nombres de Hodge sous K-équivalence suite aux travaux de V. Batyrev [Bat99], la théorie de l'intégration motivique a connu depuis de nombreux développements. L'une des utilisations de l'intégration motivique est la construction d'invariants notamment en théorie des singularités.

Dans cette section, nous rappelons brièvement les résultats et les constructions de J. Denef et F. Loeser autour des fonctions Zêta motiviques associées à des morphismes de k-schémas quasi-projectifs $f : X \to \mathbb{A}^1_k$.

2.5.1 Les anneaux de Grothendieck des variétés

Les groupes de Grothendieck des variétés constituent le cadre naturel dans lequel se place la théorie de l'intégration motivique telle que développée dans [DL99] et des travaux de J. Denef et F. Loeser (il existe d'autres approches moins géométriques de l'intégration motivique et dans lesquelles la théorie des modèles intervient de manière essentielle). Ces derniers ont été introduits par A. Grothendieck dans une lettre à J.-P. Serre [CS01].

Soit X un k-schéma séparé de type fini. Rappelons la définition de l'anneau de Grothendieck des X-variétés $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_X)$. Il s'agit du quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}[\mathrm{Var}_X]$ engendré par les classes d'isomorphismes $[Y]$ de X-schéma séparé de type fini Y, par le sous-groupe, engendré par les éléments de $\mathbb{Z}[\mathrm{Var}_X]$ de la forme $[Y] - [Z] - [Y \setminus Z]$, où Y est un X-schéma séparé de type fini et Z est un sous-schéma fermé de Y. Le produit fibré sur X induit, par bilinéarité, une structure d'anneaux en posant

$$[Y] \cdot [Y'] := [Y \times_X Y'],$$

pour tout X-schéma séparé de type fini Y, Y'. Son élément neutre est $1 = [X]$. On note $\mathbf{L} := [\mathbb{A}^1_X]$ la droite de la classe affine et on note

$$\mathscr{M}_X := \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_X)[\mathbf{L}^{-1}]$$

le localisé de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_X)$ par l'élément $\mathbf{L}$. Notons que dans la théorie de l'intégration motivique il est souvent nécessaire de considérer en fait l'anneau $\widehat{\mathscr{M}_X}$ obtenu par complétion à partir d'une certaine filtration de $\mathscr{M}_X$ liée à la dimension.

Un morphisme de k-schémas séparé de type fini $f \colon X' \to X$ définit un morphisme d'anneaux

$$f^* \colon \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_X) \to \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{X'})$$

tel que $[Y] \mapsto [Y \times_X X']$ pour tout X-schéma séparé de type fini Y. Ce morphisme est compatible aux localisés et induit un morphisme d'anneaux $f^* \colon \mathscr{M}_X \to \mathscr{M}_{X'}$.

2.5.2 Rationalité des fonctions Zêta: le théorème de J. Denef et F. Loeser

Le contexte est le suivant : on se donne un corps k de caractéristique zéro, un k-schéma quasi-projectif lisse X et un diagramme commutatif de morphismes de k-schémas

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta := \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_k & \sigma := \mathsf{Spec}(k), \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où i est la section nulle et j désigne l'immersion ouverte canonique. On suppose X purement de dimension d.

Dans [DL98, DL01, DL02, Loe00, Loe09], par analogie avec les travaux de J.-I. Igusa, J. Denef and F. Loeser ont associé au morphisme f une série formelle à coefficients dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$

$$Z_f(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{L}^{-nd}[\mathscr{X}_{n,1}]T^n \in \mathscr{M}_{X_\sigma}[[T]],$$

(voir e.g. [DL01, Definition 3.2.1]). Cette série formelle, appelée fonction Zêta motivique de J. Denef et F. Loeser, est définie en utilisant le schéma des arcs de X. Notons $\mathscr{L}_n(X)$ le k-schéma des n-jets qui représente le foncteur

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Ens} \quad ; \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_k(\mathsf{Spec}(A[t]/(t^{n+1})), X).$$

Dans l'expression de la fonction Zêta motivique donnée ci-dessus, $\mathscr{X}_{d,1}$ est le sous-ensemble constructible de $\mathscr{L}_n(X)$ défini par

$$\mathscr{X}_{n,1} = \left\{ \varphi \in \mathscr{L}_n(X) : (f \circ \varphi)(t) = t^n \mathsf{mod}\ t^{n+1} \right\}.$$

J. Denef et F. Loeser ont montré que la fonction Zêta motivique est rationnelle. Leur preuve repose sur le théorème de changement de variables pour les intégrales motiviques et montre que l'on peut calculer explicitement la fonction Zêta en utilisant des résolutions plongées des singularités. La formule obtenue explicitement rationnelle fait intervernir la combinatoire du diviseur à croisements normaux produit par la résolution.

Le corps k étant supposé de caractéristique zéro, le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka (voir e.g. [Gir95, Grand théorème]) assure l'existence d'un diagramme commutatif de morphismes de k-schémas

$$\begin{tikzcd}
X'_\eta \arrow[r] \arrow[d, "h_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X'_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "h_\sigma"] \\
X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\eta := \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d] & \sigma := \mathsf{Spec}(k) \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, equal] \\
& \mathsf{Spec}(k) &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

dans lequel le k-schéma X' est quasi-projectif et régulier, le morphisme h est projectif, le morphisme h_η est un isomorphisme et la fibre spéciale X'_σ est un diviseur à croisements normaux stricts de X'. Notons que le morphisme $f \circ h$ est également plat (voir e.g. [Liu02, Proposition **4**.3.9]).

Notons $D_1, \dots, D_n$ les composantes irréductibles (réduites) de la fibre spéciale X'_σ et N_i la multiplicité de D_i dans le diviseur $D = X'_\sigma$. Pour tout sous-ensemble J non vide de $\{1, \dots, n\}$ on note

$$D_J = \cap_{j \in J} D_j$$

et

$$D_J^\circ = D_J \setminus \cup_{i \notin J} D_i.$$

Pour tout $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ non vide, le sous-schéma fermé D_J of X est lisse sur k purement de dimension $d - |J|$ et D_J° est un ouvert de D_J. On note $\rho_J : \widetilde{D}_J^\circ \to D_J^\circ$ le revêtement étale de D_J°, défini localement de la manière suivante. Puisque D est un diviseur à croisements normaux stricts, pour tout $x \in D_J^\circ$, il existe un voisinage ouvert affine U de x dans X, une suite régulière $(t_j)_{j \in J}$ d'éléments de l'anneau $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, et un élément $u \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X^\times)$ tels que

$$f = u \prod_{j \in J} t_j^{N_j}$$

et tels que la composante $D_j \cap U$ de $D \cap U$, pour tout $j \in J$, soit égale au sous-schéma fermé affine $\mathscr{V}(t_j)$ de U défini par la fonction t_j. Le changement de base de ρ_J le long de l'immersion $U \cap D_J^\circ \hookrightarrow D_J^\circ$ s'identifie au morphisme fini étale de k-schémas

$$\mathsf{Spec}\left(\mathscr{O}_{U \cap D_J^\circ}[T]/(T^{N_J} - u)\right) \to U \cap D_J^\circ,$$

où N_J désigne le p.g.c.d. des entiers N_j, pour $j \in J$.

Remarque 2.5.1. — On notera que les revêtements étales $\rho_J : \widetilde{D}_J^\circ \to D_J^\circ$ dépendent des multiplicités des branches D_i de la fibre spéciale X'_σ au contraire des sous-schémas D_J et D_J°.

Le théorème de rationalité de J. Denef et F. Loeser prend alors la forme suivante:

***Théorème 2.5.2* (J. Denef - F. Loeser).** — *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un entier strictement positif n_i tel que*

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (\mathbf{L}-1)^{|J|-1}[\widetilde{D}_J^\circ] \prod_{j \in J} \frac{1}{T^{-N_j}\mathbf{L}^{n_j} - 1} \in \mathscr{M}_{X_\sigma}[[T]],$$

Le terme de droite dans la formule dépend a priori du choix de la résolution plongée des singularités choisie. La définition de la fonction Zêta motivique via le schéma des arcs étant intrinsèque, le corollaire du théorème de J. Denef et F. Loeser est que ce terme est en fait indépendant de la résolution. Notons qu'une fois la résolution fixée, la dépendance vis à vis des multiplicités des branches de la fibre spéciale se manifeste dans les revêtements étales ρ_J.

2.5.3 Les cycles proches selon J. Denef et F. Loeser

L'une des applications du théorème 2.5.2 est la définition des *cycles proches motiviques* ψ_f et de la *fibre de Milnor motivique* $\psi_{f,x}$. Dans [DL98, Definition 4.2.1], J. Denef and F. Loeser construisent ces objets comme suit. La rationalité de la fonction Zêta permet de définir un élément ψ_f de $\mathscr{M}_{X_\sigma}$ par passage à la limite :

$$\psi_f := -\left(\lim_{T\to+\infty} Z_f(T)\right).$$

Le théorème 2.5.2 donne en outre, pour toute résolution plongée des singularités, l'expression suivante

$$\psi_f = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} [\widetilde{D}_J^\circ](1-\mathbf{L})^{|J|-1} \in \mathscr{M}_{X_\sigma}. \tag{14}$$

Si $x \in X_\sigma(k)$ est un point rationnel, en prenant l'image de ψ_f par le morphisme canonique $x^* : \mathscr{M}_{X_\sigma} \to \mathscr{M}_k$ on obtient un élément de $\mathscr{M}_k$

$$\psi_{f,x} := x^*\psi_f$$

que J. Denef et F. Loeser appelle la fibre de Milnor motivique au point x.

Leur terminologie est notamment justifiée par le théorème de comparaison suivant (voir [DL98, §4.2]):

***Théorème 2.5.3* (J. Denef - F. Loeser).** — *On suppose $k = \mathbb{C}$. Notons $\chi_{\mathrm{Eu}} : \mathscr{M}_k \to \mathbb{Z}$ la caractéristique d'Euler, de sorte que pour tout k-schéma séparé de type fini X l'on ait*

$$\chi_{\mathrm{Eu}}([X]) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i_c(X, \mathbb{C}).$$

On a alors

$$\chi_{\mathrm{Eu}}(\psi_{f,x}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim \mathsf{R}^i\Psi_{f,x}(\mathbb{C}_X).$$

Ceci donne en particulier la relation

$$\chi_{\mathrm{Eu}}(\psi_{f,x}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim H^i(F_x,\mathbb{C})$$

où F_x est la fibre de Milnor transcendante classique.

Remarque 2.5.4. — Dans [DL98] le résultat prouvé par J. Denef et F. Loeser est en fait plus fin. Soit $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{C})$ la catégorie abélienne des modules de Hodge mixtes à coefficients complexes construite par M. Saito dans [Sai88, Sai90] et

$$\psi_f^{\mathscr{H}} : \mathrm{MHM}(X,\mathbb{C}) \to \mathrm{MHM}(X,\mathbb{C})$$

le foncteur exact des cycles proches de M. Saito (voir également [Sai90]). L'un des théorèmes essentiels de [Sai90] assure que les catégories $\mathrm{MHM}(\mathsf{Spec}(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ et $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}}$ sont équivalentes. La caractéristique d'Euler se factorise par le morphisme d'anneaux canonique

$$\chi^{\mathscr{H}}_{k,\mathrm{c}} : \mathscr{M}_k \to \mathrm{K}_0(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}})$$

où $\mathrm{K}_0(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}})$ de la catégorie abélienne $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}}$ des $\mathbb{C}$-structures de Hodge mixtes polarisables. En notant $\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X$ la variation de structure de Hodge triviale sur X (de sorte que $\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d]$ appartient à $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{C})$), J. Denef et F. Loeser montrent que[(9)]

$$\chi^{\mathscr{H}}_{k,\mathrm{c}}(\psi_{f,x}) = (-1)^{d-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathsf{H}^i(x^*\psi^{\mathscr{H}}_X(\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d]))].$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}})$.

Le théorème 2.5.3 s'en déduit immédiatement. En effet l'égalité précédente implique que

$$\chi_{\mathrm{Eu}}(\psi_{f,x}) = (-1)^{d-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim \mathsf{H}^{\mathsf{i}}(x^*\psi^{\mathscr{H}}_f(\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d]).$$

Mais par définition en notant $i : X_\sigma \hookrightarrow X$ l'immersion fermée et $\mathsf{rat} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{C})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ le foncteur canonique, on a

$$\mathsf{rat}\left[\psi^{\mathscr{H}}_f(\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d])\right] = i_*\mathsf{R}\Psi_f(\mathbb{C}_X)[d-1]$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ ce qui implique en particulier que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim \mathsf{H}^{\mathsf{i}}(x^*\psi^{\mathscr{H}}_f(\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d])) = (-1)^{d-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\dim \mathsf{R}^i\Psi_{f,x}(\mathbb{C}_X).$$

---

(9) Remarquons que $x^*\psi^{\mathscr{H}}_X(\mathbb{C}^{\mathscr{H}}_X[d])$ appartient à la catégorie dérivée $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{C}})$

2.5.4 Motifs ou motifs virtuels ?

La question du lien entre groupe de Grothendieck des variétés et motifs remonte à A. Grothendieck. Dans sa lettre à J.-P. Serre du 16 août 1964, il évoque en effet l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathrm{K}_0(\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q}))$$

défini par $X \mapsto [h_{\mathsf{rat}}(X)]$ et jouant le rôle d'une *caractéristique d'Euler motivique*. Ce morphisme a été initialement construit de manière explicite dans [GS96], voir également [GNA02]. La présentation du K_0 des variétés obtenue par F. Bittner dans [Bit04] donne maintenant un moyen très économique de l'obtenir (le résultat de F. Bittner repose tout de même sur le théorème de factorisation faible). De même la théorie des motifs mixtes et le formalisme des six opérations permettent de construire très naturellement un tel morphisme via les résultats de M. Bondarko. En effet le formalisme des six opérations fournit un morphisme d'anneaux

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathrm{K}_0(\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(k,\mathbb{Q}))$$

(voir par exemple [IS13, Lemme 2.1]). On sait par ailleurs que les catégories $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q})$ et $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(k,\mathbb{Q})$ sont équivalentes et dans [Bon09], M. Bondarko a construit le foncteur des poids que l'on peut comparer à [GS96]

$$t\colon \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q}) \to \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k,\mathbb{Q}))$$

qui induit un isomorphisme de groupes

$$t\colon \mathrm{K}_0(\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}_0(\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k,\mathbb{Q})),$$

dont la réciproque est le morphisme canonique induit par l'inclusion de $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k,\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k,\mathbb{Q})$.

Dans sa lettre à J.-P. Serre, A. Grothendieck pose la question de savoir si la caractéristique d'Euler motivique est injective. La réponse à cette question est négative. Historiquement, et bien que la réponse n'y figure pas, des contre-exemples peuvent se déduire des travaux de B. Poonen [Poo02]. Dans [LS10, Remark 14] ou [IS12], d'autres contre-exemples sont obtenus. Plus récemment, C. Mazza et C. Weibel ont donné dans [MW13] une preuve alternative de cette non injectivité.

Notons que les deux questions suivantes sont, quant à elles, totalement ouvertes à l'heure d'aujourd'hui.

- *Le morphisme de complétion* $\mathscr{M}_k \to \widehat{\mathscr{M}_k}$ *est-il injectif ?*
- *Le morphisme de localisation* $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathscr{M}_k$ *est-il injectif ?*

Par ailleurs le passage de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$ à $\mathscr{M}_k$ est très loin d'être anodin comme l'illustre le problème de la rationalité des fonctions Zêta de M. Kapranov [Kap00, LL04] (voir également [Ivo11a] pour un survol).

Il est en général préférable si l'on peut de travailler avec des « vrais motifs » c'est-à-dire des objets de catégories triangulées de motifs plutôt que dans les groupes de

Grothendieck qui leur sont associés. En effet en passant aux motifs virtuels on perd énormément d'informations. Les informations contenues par exemple dans les groupes d'extensions sont perdues puisque celles-ci sont trivialisées. L'on perd donc trace en particulier de la cohomologie motivique, ou si l'on préfère des groupes de Chow.

Donnons pour illustrer ce point, l'exemple du théorème de M. Kontsevich d'invariance des nombres de Hodge par K-équivalence. On peut trouver plus généralement la question suivante dans la littérature (voir [Wan04] et [IS12]) :

Question. — *Deux k-variétés X et Y connexes, projectives et lisses sur k, et K-équivalentes ont-elles des motifs de Chow isomorphes dans $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q})$ ou tout au moins des groupes de Chow isomorphes ?*

Une réponse positive à cette question n'est connue pour l'instant que dans un certain nombre de cas très particuliers (voir par exemple [LLW10, Theorem 01] ou [Orl05, Theorem 1] pour une preuve radicalement différente). La théorie de l'intégration motivique [Kon95, DL99] permet de montrer que $[X] = [Y]$ dans $\widehat{\mathscr{M}_k}$ ce qui implique l'égalité des nombres de Hodge lorsque $k = \mathbb{C}$. En fait, grâce à l'existence des factorisations faibles des applications birationnelles, on peut même obtenir, sans utiliser l'intégration motivique, l'égalité $[X] = [Y]$ dans $\mathscr{M}_k$ (voir par exemple [Vey06, 7.10] ou [Bli11, Remark 1.2]). En appliquant la caractéristique d'Euler motivique, l'on obtient l'égalité $[h_{\mathsf{rat}}(X)] = [h_{\mathsf{rat}}(Y)]$ dans $\mathrm{K}_0(\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q}))$ mais cette égalité des classes ne suffit pas à montrer que les groupes de Chow sont isomorphes. On peut déduire du théorème de nilpotence de S.-I. Kimura et du théorème de semi-simplicité de U. Jannsen, le résultat suivant :

***Proposition 2.5.5* ([IS12]).** — *Soient X et Y deux k-variétés projectives et lisses sur k, telles que les motifs de Chow $h_{\mathsf{rat}}(X)$ et $h_{\mathsf{rat}}(Y)$ soient de dimension finie. Si $[X] = [Y]$ dans l'anneau $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$, alors les motifs de Chow $h_{\mathsf{rat}}(X)$ et $h_{\mathsf{rat}}(Y)$ sont isomorphes dans l'anneau $\mathsf{M}_{\mathsf{rat}}(k;\mathbb{Q})$.*

Malheureusement en dehord du cas des motifs de type abéliens l'on ignore si les motifs de Chow sont de dimension finie (une preuve pour les surfaces de cette finitude aurait déjà des conséquences remarquables) !

En passant au K_0, on perd également la trace d'éventuels endomorphismes dont peuvent être munis certains objets. Par exemple dans l'étude des cycles proches pour conserver l'information contenue dans la partie semi-simple de la monodromie, il est nécessaire de raffiner le groupe de Grothendieck des variétés, alors que l'opérateur de monodromie sur le foncteur cycles proches existe naturellement comme endomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$ [Ayo07b].

3 Faisceaux pervers, modules de Hodge et motifs mixtes

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats de [Ivo12, Ivo14b, Ivo14d, Ivo14c]. Nous fixons un corps k de caractéristique zéro muni d'un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

3.1 Présentation des principaux résultats

3.1.1 Motivation

Les travaux [Ivo12, Ivo14b, Ivo14d, Ivo14c] ont pour origine le problème de construire un foncteur de réalisation de Hodge dans un contexte relatif, problème auquel nous avons finalement pu apporter une solution dans [Ivo14c].

Dans [Sai90], M. Saito a construit le formalisme des opérations de Grothendieck pour les catégories dérivées des catégories de modules de Hodge mixtes

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \underset{f_*^{\mathscr{H}}}{\overset{f^*_{\mathscr{H}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})) \underset{f^!_{\mathscr{H}}}{\overset{f_!^{\mathscr{H}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})).$$

et l'on peut associer à un X-schéma quasi-projectif $a : Y \to X$ son homologie de Hodge $a_!^{\mathscr{H}} a^!_{\mathscr{H}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))$.

Problème. — *Soit X un k-schéma quasi-projectif. Construire un foncteur de réalisation de Hodge*

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))$$

envoyant le motif homologique d'un X-schéma quasi-projectif lisse Y dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$ sur son homologie de Hodge $a_!^{\mathscr{H}} a^!_{\mathscr{H}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}})$ dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))$.

Les travaux [Hub00, Ayo10, Hub04, Ayo14] et [Ivo07, Ivo10] apportent une réponse complète à l'analogue ℓ-adique ou Betti de ce problème. En théorie de Hodge, les résultats disponibles dans la littérature sont bien moins satisfaisants puisque l'on ne dispose d'un foncteur de réalisation de Hodge que pour les coefficients absolus i.e. pour les motifs mixtes sur $\mathsf{Spec}(\mathbb{C})$. En notant $\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}$ la catégorie abélienne des structures de Hodge mixtes polarisables, ce foncteur de réalisation est un foncteur triangulé

$$\mathrm{DM}_{gm}(k, \mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}).$$

On dispose en fait de trois constuctions différentes d'un tel foncteur : celle de A. Huber que l'on trouvera dans [Hub00, Hub04], celle de M. Levine donnée dans [Lev98] et une construction due à M. Nori qui bien que non publiée se trouve esquissée dans [Lev05, Nor]. Les deux premières constructions, celles de A. Huber et celle de M. Levine n'utilisent pas directement la catégorie dérivée des structures de Hodge mixtes polarisables, préférant lui substituer la catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p}$ des complexes de Hodge mixtes polarisables introduite par A. Beĭlinson dans [Beĭ86]. Ce dernier ayant construit une équivalence de catégories triangulées

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHS}^p_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}^p}$$

cette substitution est inoffensive. La construction de M. Nori est radicalement différente dans son principe et ne requiert plus la considération des complexes de Hodge mixtes polarisables.

Notons que, contrairement à la théorie des motifs, la théorie des modules de Hodges mixtes ne permet pas de manipuler des schémas simpliciaux. Ceci tient au fait que ni les images inverses, ni les images directes ne sont exactes pour la t-structure perverse et constitue l'un des problèmes techniques rendant délicate la comparaison entre la théorie de Hodge développée par M. Saito et la théorie de Hodge construite par P. Deligne dans [Del71, Del74b] (avec celui de la comparaison des poids). Que les deux théories donnent par exemple la même structure de Hodge sur la cohomologie des variétés singulières est une conséquence non triviale des résultats de [Sai00].

En théorie des $\mathcal{D}$-modules, cet écueil peut souvent être évité via la considération de complexes d'opérateurs différentiels (un point de vue équivalent à celui des $\mathcal{D}$-modules et de leur catégorie dérivées) ce qui motive l'introduction des catégorie de complexes de Hodge mixtes dans [Sai00].

3.1.2 Un résultat de comparaison : [Ivo12, Ivo14b]

Si X est une variété algébrique complexe, M. Saito a introduit dans [Sai00] une catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ de complexes de Hodge de mixtes, ainsi qu'un foncteur ε permettant d'associer un tel complexe à tout objet de la catégorie dérivée bornée des modules de Hodge mixtes. Dans [Ivo12], nous avons apporté quelques compléments sur les catégories de complexes de Hodge nécessaires pour établir le résultat principal de [Ivo14b], en particulier nous avons affiné la construction du foncteur ε pour la rendre plus canonique (un point technique malheureusement nécessaire pour prouver le théorème 3.1.1) et obtenu par un foncteur

$$\mathrm{real} : \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$$

Le théorème principal de [Ivo12] s'énonce comme suit :

Théorème 3.1.1. — *Soient X une variété algébrique complexe projective et lisse et $\underline{\mathscr{M}}, \underline{\mathscr{N}}$ deux complexes de modules de Hodge mixtes sur X. Si $\underline{\mathscr{M}}$ est à cohomologie lisse* i.e. *si les modules de Hodge mixtes $\mathsf{H}^i(\underline{\mathscr{M}})$ sont lisses pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\underline{\mathscr{M}}, \underline{\mathscr{N}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\mathrm{real}(\underline{\mathscr{M}}), \mathrm{real}(\underline{\mathscr{N}}))$$

est un isomorphisme.

Cela généralise partiellement, en dimension quelconque, l'équivalence construite dans [Beĭ86].

3.1.3 Motifs pervers et réalisation : [Ivo14d, Ivo14c]

Le principal résultat de [Ivo14c] répond au problème de réalisation de Hodge. Afin de pouvoir également considérer les motifs non constructibles, il y a lieu de considérer une catégorie plus grande que la catégorie des modules de Hodge mixtes. Pour cela on considère le plongement de P. Gabriel et D. Quillen [Gab62, Qui73]

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{i} : \mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}) & \to & \mathbf{Sha}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \\ \underline{\mathscr{M}} & \mapsto & \mathrm{Hom}(-,\underline{\mathscr{M}}) \end{array}$$

dans la catégorie des faisceaux additifs de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur $\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})$ pour la topologie des épimorphismes.

Résultats principaux de [Ivo14c]. — *Soit X un k-schéma quasi-projectif lisse. Nous construisons une adjonction*

$$\mathsf{RL}^{\mathscr{M}}_X : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}) \rightleftarrows \mathrm{D}(\mathbf{Sha}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}),\mathbb{Q})) : \mathsf{RR}^{\mathscr{M}}_X$$

le terme de droite étant la catégorie dérivée non bornée de la catégorie abélienne $\mathbf{Sha}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})),\mathbb{Q})$.

1. *En notant $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q})$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X,\mathbb{Q})$ formée des motifs étales constructibles, l'adjoint à gauche $\mathsf{RL}^{\mathscr{M}}_X$ induit un foncteur triangulé*
$$\mathsf{RL}^{\mathscr{M}}_X : \mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})).$$
2. *Si $a : Y \to X$ est un morphisme lisse de k-schémas quasi-projectifs et Y est un schéma affine, alors l'image du motif homologique $\mathrm{M}_X(Y)$ par le foncteur $\mathsf{RL}^{\mathscr{H}}_X$ est isomorphe au complexe d'homologie de Hodge $a^{\mathscr{H}}_! a^!_{\mathscr{H}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{H}}_X)$ où*
$$a^{\mathscr{H}}_! : \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(Y,\mathbb{Q})) \rightleftarrows \mathrm{D^b}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) : a^!_{\mathscr{H}}$$

sont les foncteurs fournis par le formalisme des six opérations construit par M. Saito *dans [Sai90].*

Notons que dans la construction, l'on peut considérer la catégorie des modules de Hodge mixtes d'origine géométrique.

Dans [Ivo14d], nous avons caractérisé les catégories abéliennes qui donnent lieu à un formalisme tannakien analogue à celui développé par M. Nori et montré que celui-ci s'applique en particulier aux catégories de faisceaux pervers. Cela permet de construire, sur tout k-schéma quasi-projectif X, une catégorie abélienne de motifs $\mathscr{N}(X)$ muni d'un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle

$$\mathscr{N}(X) \to \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})$$

généralisant la construction de M. Nori pour $X = \mathsf{Spec}(k)$. Dans [Ivo14c], nous montrons que le foncteur de réalisation de Hodge $\mathsf{RL}_X^{\mathscr{M}}$ se factorise par la catégorie dérivée bornée de la catégorie $\mathscr{N}(X)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{N}(X)) \arrow[r] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})) \\
\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X, \mathbb{Q}). \arrow[u, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lorsque $X = \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$, l'on retrouve ainsi le foncteur de réalisation

$$\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{Spec}(k), \mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{N}\mathscr{M}\mathscr{M}(k, \mathbb{Q}))$$

induit par le foncteur (9) de M. Nori.

3.2 Complexes de Hodge et modules de Hodge mixtes

3.2.1 Esquisse de la preuve du théorème principal de [Ivo14b]

La stratégie consiste à se ramener au cas de dimension zéro i.e. au cas où $X = \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$. Soit $\underline{\mathbb{V}}$ une variation admissible de structures de Hodge mixtes. Elle définit d'une part un module de Hodge mixte et d'autre part un complexe de Hodge mixte (le second étant l'image du premier par le foncteur real et $\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}$ le module de Hodge mixte qu'elle définit. Pour démontrer le théorème 3.1.1, il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}, \underline{\mathscr{N}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}, \mathrm{real}(\underline{\mathscr{N}}))$$

est un isomorphisme pour tout $\underline{\mathscr{N}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}))$.

La première étape consiste à montrer que l'on peut supposer la variation de Hodge $\underline{\mathbb{V}}$ triviale. Pour cela l'idée est très simple, il suffit de montrer que les catégories $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}))$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})$ sont munies de structures de modules sur la catégorie tensorielle rigide $\mathrm{VMHS}(\mathrm{X}, \mathbb{Q})_{\mathrm{ad}}$ des variations de structures de Hodge admissibles auxquelles le foncteur real est compatible. L'on aura alors des isomorphismes, compatibles avec real,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}, \underline{\mathscr{M}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}}, \underline{\mathbb{V}}^{\vee} \circledast \underline{\mathscr{M}})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}, \underline{\mathscr{N}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q}))}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}}, \underline{\mathbb{V}}^{\vee} \circledast \underline{\mathscr{N}})$$

où $\mathbb{V}^{\vee}$ est la variation dual de $\underline{\mathbb{V}}$, ce qui permettra de supposer que $\underline{\mathbb{V}}$ est la variation triviale.

Dans la seconde étape, on se ramène au cas absolu. Notons $\pi : X \to \mathsf{Spec}(\mathbb{C})$ le morphisme structural. Comme π est supposé projectif, on dispose d'un foncteur d'image directe $\pi_* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(\mathsf{Spec}(\mathbb{C}),\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ pour les complexes de Hodge mixtes. Nous montrons qu'il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{H}}, \underline{\mathscr{M}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(\mathsf{Spec}\,\mathbb{C},\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(0), \pi_*\underline{\mathscr{M}}) \quad \forall \underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$$

compatible via le foncteur real avec l'isomorphisme d'adjonction dans la catégorie dérivée des modules de Hodge mixtes associée aux foncteurs adjoints $\pi^* \vdash \pi_*$. Cela permet de se ramener au cas absolu traité dans [Sai00, 2.10] ou [Beĭ86].

Le point le plus délicat de loin consiste à construire les stuctures de modules sur la catégorie tensorielle rigide des variations de structures de Hodge admissibles. Le problème consiste essentiellement à pouvoir définir des images inverses non-caractéristiques pour les complexes de Hodge ainsi qu'un produit extérieur. En effet si $\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}}$ est le complexe de Hodge mixte associé à une variation de structures de Hodge mixtes admissible et $\underline{\mathscr{M}}$ est un complexe de Hodge mixte quelconque, le produit extérieur $\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \boxtimes \underline{\mathscr{M}}$ sera non-caractéristique par rapport à l'immersion fermée diagonale Δ et l'on pourra définir la structure de module en posant

$$\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \circledast \underline{\mathscr{M}} := \Delta^*_{\mathscr{O}}(\underline{\mathbb{V}}^{\mathscr{H}} \boxtimes \underline{\mathscr{M}})$$

où $\Delta^*_{\mathscr{O}}$ est l'image inverse non-caractéristique. Nous donnons dans la suite quelques détails supplémentaires.

3.2.2 Catégorie de diagrammes

Les catégories de complexes de Hodge sont des catégories de diagrammes. On dispose de deux manières de définir des diagrammes en général, en imposant naïvement que les morphismes commutent aux morphismes de comparaison ou en imposant qu'ils ne commutent qu'à homotopie près.

Soit R l'un des symboles $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ou $\mathscr{D}$. On suppose que $\mathscr{A}_R$ est une catégorie additive, et que $\mathscr{Q}_R$ est un système multiplicatif de flèches de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_R)$. On suppose également donnée une sous-DG-catégorie pleine $\mathbf{C}_R$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_R)$. Comme d'habitude, on note

$$\mathrm{C}_R = \mathsf{Z}^0\mathbf{C}_R \qquad \mathrm{K}_R := \mathsf{H}^0\mathbf{C}_R$$

la catégorie associée et la catégorie homotopique associée. Si $[\![A, A']\!]$ désigne le complexe des morphismes dans $\mathbf{C}_R$, les morphismes dans C_R et K_R sont donnés par

$[A, A'] := \mathsf{Z}^0[\![A, A']\!]$ et $\mathsf{H}^0[\![A, A']\!]$ respectivement. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

- si $a : A \to A'$ est un morphisme dans $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_R)$ appartenant à $\mathscr{Q}_R$, alors A appartient à $\mathbf{C}_R$ si et seulement si A' appartient à $\mathbf{C}_R$;
- si $a : A \to A'$ est un morphisme de C_R alors son mapping cone $\mathsf{Mc}(a)$ est aussi un objet de $\mathbf{C}_R$.

Ces conditions assurent que K_R est une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_R)$ et que $\mathbf{D}_R := \mathrm{K}_R[\mathscr{Q}_R^{-1}]$ est aussi une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_R)[\mathscr{Q}_R^{-1}]$. On suppose également donnés deux DG-foncteurs

$$\Phi_R : \mathbf{C}_R \to \mathbf{C}_{\mathbb{C}} \qquad R = \mathbb{Q}, \mathscr{D}$$

tels que $\Phi_R(\mathscr{Q}_R) \subset \mathscr{Q}_{\mathbb{C}}$ et $\Phi_R(\mathsf{Mc}(a)) = \mathsf{Mc}(\Phi_R(a))$ pour $a \in [A, A']$.

Un diagramme de la forme

$$\underline{A} = \left(\begin{tikzcd} & A_{\mathbb{C}} & \\ A_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{A}}"] & & A_{\mathscr{D}} \arrow[ul, "\alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{A}}"'] \end{tikzcd} \right) \tag{15}$$

est la donnée, pour $R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathscr{D}$, d'un objet A_R dans C_R et de morphismes dans $\mathrm{C}_{\mathbb{C}}$

$$\alpha_R^{\underline{A}} : \Phi_R(A_R) \to A_{\mathbb{C}} \qquad R = \mathbb{Q}, \mathscr{D}$$

appartenant à $\mathscr{Q}_{\mathbb{C}}$.

On peut construire deux DG-catégories ayant pour objet les diagrammes. Dans la version naïve le complexe des morphismes entre deux diagrammes est donné par

$$[\![\underline{A}, \underline{A}']\!]^n_{\mathsf{Nv}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{a} = (a_{\mathbb{Q}}, a_{\mathbb{C}}, a_{\mathscr{D}}) \colon \begin{array}{ll} a_{\mathbb{Q}} & \in [\![A_{\mathbb{Q}}, A'_{\mathbb{Q}}]\!]^n \\ a_{\mathbb{C}} & \in [\![A_{\mathbb{C}}, A'_{\mathbb{C}}]\!]^n \\ a_{\mathscr{D}} & \in [\![A_{\mathscr{D}}, A'_{\mathscr{D}}]\!]^n \end{array} \\ \text{such that} \\ \begin{tikzcd} \Phi_{\mathbb{Q}}(A_{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{A}}"] \arrow[d, "\Phi_{\mathbb{Q}}(a_{\mathbb{Q}})"'] & A_{\mathbb{C}} \arrow[d, "a_{\mathbb{C}}"] & \Phi_{\mathscr{D}}(A_{\mathscr{D}}) \arrow[l, "\alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{A}}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathscr{D}}(a_{\mathscr{D}})"] \\ \Phi_{\mathbb{Q}}(A'_{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{Q}}^{\underline{A}'}"'] & A'_{\mathbb{C}} & \Phi_{\mathscr{D}}(A'_{\mathscr{D}}) \arrow[l, "\alpha_{\mathscr{D}}^{\underline{A}'}"] \end{tikzcd} \\ \text{is commutative} \end{array} \right\}$$

la différentielle étant donnée composante par composante : $\delta\underline{a} = (\delta a_{\mathbb{Q}}, \delta a_{\mathbb{C}}, \delta a_{\mathscr{D}})$. Ceci fournit une DG-catégorie $\mathbf{C}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$ et deux catégories

$$\mathrm{C}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} = \mathsf{Z}^0\mathbf{C}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} \qquad \mathrm{K}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} := \mathsf{H}^0\mathbf{C}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}.$$

Dans la version plus sophistiquée, le complexe des morphismes est cette fois donné par

$$[\![\underline{A}, \underline{A}']\!]^n = \left\{ \underline{a} = (a_{\mathbb{Q}}, a_{\mathbb{C}}, a_{\mathscr{D}}, h_{\mathbb{Q}}, h_{\mathscr{D}}) : \begin{array}{ll} a_{\mathbb{Q}} & \in [\![A_{\mathbb{Q}}, A'_{\mathbb{Q}}]\!]^n \\ a_{\mathbb{C}} & \in [\![A_{\mathbb{C}}, A'_{\mathbb{C}}]\!]^n \\ a_{\mathscr{D}} & \in [\![A_{\mathscr{D}}, A'_{\mathscr{D}}]\!]^n \\ h_{\mathbb{Q}} & \in [\![\Phi_{\mathbb{Q}}(A_{\mathbb{Q}}), A'_{\mathbb{C}}]\!]^{n-1} \\ h_{\mathscr{D}} & \in [\![\Phi_{\mathscr{D}}(A_{\mathscr{D}}), A'_{\mathbb{C}}]\!]^{n-1} \end{array} \right\}$$

avec pour différentielle :

$$\delta \begin{pmatrix} a_{\mathbb{Q}} \\ a_{\mathbb{C}} \\ a_{\mathscr{D}} \\ h_{\mathbb{Q}} \\ h_{\mathscr{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta a_{\mathbb{Q}} \\ \delta a_{\mathbb{C}} \\ \delta a_{\mathscr{D}} \\ a_{\mathbb{C}} \circ \alpha_{\mathbb{Q}}^{A} - \alpha_{\mathbb{Q}}^{A'} \circ \Phi_{\mathbb{Q}}(a_{\mathbb{Q}}) - \delta h_{\mathbb{Q}} \\ a_{\mathbb{C}} \circ \alpha_{\mathscr{D}}^{A} - \alpha_{\mathscr{D}}^{A'} \circ \Phi_{\mathscr{D}}(a_{\mathscr{D}}) - \delta h_{\mathscr{D}} \end{pmatrix}.$$

On obtient une DG-catégorie $\mathbf{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$ et deux catégories

$$\mathrm{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} = \mathsf{Z}^0\mathbf{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} \qquad \mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} = \mathsf{H}^0\mathbf{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}.$$

Par définition, on a un DG-foncteur évident $I : \mathbf{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}} \to \mathbf{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$ qui induit un foncteur

$$I : \mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}} \to \mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}. \tag{16}$$

Si $\underline{a} : \underline{A} \to \underline{A}'$ est un morphisme dans $\mathrm{C}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$, on peut définir son mapping cone comme étant le diagramme

$$\mathsf{Mc}(\underline{a}) = \left(\begin{tikzcd} & \mathsf{Mc}(a_{\mathbb{C}}) & \\ \mathsf{Mc}(a_{\mathbb{Q}}) \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})}"] & & \mathsf{Mc}(a_{\mathscr{D}}) \arrow[ul, "\alpha_{\mathscr{D}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})}"'] \end{tikzcd} \right)$$

les morphismes $\alpha_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})}$ et $\alpha_{\mathscr{D}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})}$ étant donnés par les matrices

$$\alpha_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbb{Q}}^{A} & 0 \\ -h_{\mathbb{Q}} & \alpha_{\mathbb{Q}}^{A'} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{\mathscr{D}}^{\mathsf{Mc}(\underline{a})} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathscr{D}}^{A} & 0 \\ -h_{\mathscr{D}} & \alpha_{\mathscr{D}}^{A'} \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de munir $\mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}}$ de structures triangulées pour lesquelles le foncteur (16) est triangulé. On pose finalement

$$\mathbf{D}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} := \mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}[\mathscr{Q}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{-1}] \qquad \mathbf{D}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}} := \mathrm{K}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}}[\mathscr{Q}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{-1}]$$

où $\mathscr{Q}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$ est le système multiplicatif des flèches dont les composantes sont dans $\mathscr{Q}_R$. Le foncteur (16) induit alors un foncteur triangulé

$$I : \mathbf{D}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}^{\mathsf{Nv}} \to \mathbf{D}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}.$$

Dans [Ivo12], en utilisant les idées de [Beĭ86], nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. — *Le foncteur triangulé*

$$I : \mathbf{D}^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}} \to \mathbf{D}_{\mathscr{D},\mathbb{Q}}$$

est une équivalence.

3.2.3 t-structure perverse et complexes de Hodge purs

Soit $R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, on note $\mathbf{C}^+_{\mathrm{c}}(X, R)^{\mathrm{b}}$ la DG-catégorie des complexes de faisceaux de R-espaces vectoriels K sur X^{an} tels que K soit borné inférieurement et les groupes de cohomologie $\mathsf{H}^i(K)$ soient algébriquement constructibles pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de i. La catégorie $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est par définition la catégorie des diagrammes de la forme (voir [Sai00] ou [Ivo12, 3.1.4])

$$\underline{\mathscr{M}} = \left(\begin{tikzcd} & K_{\mathbb{C}} & \\ K_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}}"] & & (\mathscr{M}, F) \arrow[ul, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}}"'] \end{tikzcd} \right)$$

où pour $R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, K_R est un objet de $\mathrm{C}^*_{\mathrm{c}}(X, R)^{\mathrm{b}}$ tandis que $(\mathscr{M}, F)$ est un objet de $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X)$. Les morphismes de comparaison sont des quasi-isomorphismes :

$$\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}} : \Phi_{\mathbb{Q}}(K_{\mathbb{Q}}) := K_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} \to K_{\mathbb{C}} \qquad \alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}} : \Phi_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}) := \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M}) \to K_{\mathbb{C}}.$$

Par localisation, on obtient la catégorie triangulée $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$. Dans [Ivo12, 3.2.2 Proposition] nous montrons l'existence d'une t-structure perverse sur cette catégorie :

Proposition 3.2.2. — *Il existe sur* $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ *une t-structure dont le coeur est équivalent à la catégorie abélienne*

$$\mathrm{MG}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{B}_X, \mathbb{Q}) := \mathrm{MG}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{B}_X) \times_{\mathrm{Perv}(X,\mathbb{C})} \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})$$

des $\mathscr{B}_X$-modules gradués réguliers holonomes munis d'une $\mathbb{Q}$-structure(1).

La catégorie quasi-abélienne $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{MG}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{B}_X, \mathbb{Q})$ qui en est l'enveloppe abélienne au sens de [Sch99]. Notons ${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i$ les foncteurs cohomologiques définis par cette t-structure. Soit$w \in \mathbb{Z}$ un entier. La catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q}, w)_{\mathscr{D}}$ des $\mathscr{D}$-complexes de Hodge purs de poids w est la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ formée des objets $\underline{\mathscr{M}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (condition de poids w) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})$ est un module Hodge polarisable de poids $i + w$, *i.e.* appartient à $\mathrm{MH}(X, i + w)^p$;

(1) Par définition $\mathscr{B}_X$ est l'anneau gradué (voir [Gab81] et [Sai88, 2.1.1])

$$\mathscr{B}_X = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_k \mathscr{D}_X.$$

– (condition de décomposabilité) il existe un isomorphisme dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X;\mathbb{Q})$

$$\underline{\mathscr{M}} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})[-i].$$

La seconde condition permet de montrer la stabilité des complexes de Hodge mixtes par image directe projective.

Remarque 3.2.3. — La définition précédente est compatible avec la définition originalement donnée par M. Saito [Sai00, 2.2]. En effet soit $\underline{\mathscr{M}}$ est un objet dans $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$. Supposons qu'il existe des isomorphismes

$$\begin{aligned} \phi_{\mathscr{D}} : K_{\mathscr{D}} &\to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}^i(K_{\mathscr{D}})[-i] \\ \phi_R : K_R &\to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\mathsf{H}^i(K_R)[-i] \quad \text{for } R=\mathbb{Q},\mathbb{C} \end{aligned} \tag{17}$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X)$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,A)$ respectivement qui soient compatibles avec les morphismes de comparaison $\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}}$ et $\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}}$. Posons

$$\underline{\mathscr{M}}' := \oplus_{\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})[-i].$$

C'est un objet dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ dont les spécialisations $K'_{\mathbb{Q}}, K'_{\mathbb{C}}$ et $K'_{\mathscr{D}}$ sont les termes de droites dans (17). La compatibilité au morphisme de comparaison assure que $(\phi_{\mathbb{Q}},\phi_{\mathscr{D}})$ appartient au noyau du morphisme (18) dans la suite exacte longue (voir [Ivo12] pour les détails)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\vdots \arrow[d] & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})}(K_{\mathbb{C}},K'_{\mathbb{C}}[-1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})}(\underline{\mathscr{M}},\underline{\mathscr{M}}') \arrow[d] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q})}(K_{\mathbb{Q}},K'_{\mathbb{Q}}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X)}(K_{\mathscr{D}},K'_{\mathscr{D}}) \arrow[d, "(18)"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})}(K_{\mathbb{C}},K'_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

et peut donc être relevé en un morphisme

$$\underline{\phi} : \underline{\mathscr{M}} \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})[-i].$$

Puisque ce morphisme est un isomorphisme sur les spécialisations, c'est un isomorphisme et $\underline{\mathscr{M}}$ satisfait la condition de décomposition. Ainsi la condition de décomposabilité dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q})$ est équivalente à l'existence de décomposition dans les spécialisations compatibles aux morphismes de comparaison (ceci est la condition imposée dans [Sai00]).

3.2.4 Complexes de Hodge mixtes

Rappelons finalement la construction de la catégorie des complexes de Hodge mixtes de [Sai00]. Considérons pour cela les variantes filtrées des catégories précédentes $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X; W)$ et $\mathrm{C}^{+}_{\mathrm{c}}(X, R; W)^{\mathrm{b}}$ (voir [Ivo12] pour les détails). Si $u_R : (K_R, W_R) \to (L_R, W_R)$ est un morphisme dans l'une de ces catégories, le cône mixte de u_R est défini par

$$W_n \mathsf{Mc}(u_R)_{\mathscr{H}} = W_{R,n} L^n_R \oplus W_{R,n-1} K^{n+1}_R$$

avec la différentielle considérée habituellement sur un mapping cone. En particuluer le décalage mixte est donné par

$$(K_R, W_R)\{1\} := (K_R[1], W_R\{1\}) \tag{18}$$

où $W\{n\}$ désigne la filtration $W\{n\}_k = W_{k-n}$. Notons $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}; W)$ la catégorie des diagrammes de la forme

$$\underline{\mathscr{M}} = \left(\begin{tikzcd} & (K_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) & \\ (K_{\mathbb{Q}}, W_{\mathbb{Q}}) \arrow[ur, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}}"] & & (K_{\mathscr{D}}, W_{\mathscr{D}}) := (\mathscr{M}, F, W) \arrow[ul, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}}"'] \end{tikzcd} \right) \tag{19}$$

où (K_R, W_R) est un objet de $\mathrm{C}^{+}_{\mathrm{c}}(X, R; W)^{\mathrm{b}}$ pour $R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ et $(K_{\mathscr{D}}, W_{\mathscr{D}}) := (\mathscr{M}, F, W)$ est un objet de $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X; W)$. Les morphismes de comparaison

$$\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}} : (K_{\mathbb{Q}}, W_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C} \to (K_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \qquad \alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}} : \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M}, W) \to (K_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$$

sont des quasi-isomorphismes filtrés par rapport à la filtration par le poids. La catégorie des complexes de Hodge mixtes est construite à partir d'une relation d'homotopie plus faible que la relation habituelle sur les diagrammes (voir [Sai00] ou [Ivo12] pour une définition précise).

La catégorie $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{FW}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ est obtenue à partir de $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}; W)$ en tuant les morphismes homotopes à zéro et le cône mixte définit une structure triangulée. Par construction l'on a des foncteurs bien définis

$$\mathrm{Gr}^W_w : \mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{FW}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q}). \tag{20}$$

La catégorie $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ des $\mathscr{D}$-complexes de Hodge mixtes est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{FW}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ formée par les diagrammes $\underline{\mathscr{M}}$ tels que

$$\mathrm{Gr}^W_w \underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q}, w)_{\mathscr{D}}$$

pour tout $w \in \mathbb{Z}$.

Notons $\mathsf{Mc}(\underline{u})_{\mathscr{H}}$ le cône mixte d'un morphisme $\underline{u} : \underline{\mathscr{M}} \to \underline{\mathscr{M}}'$. Par définition, on a une décomposition en somme directe de complexes

$$\mathrm{Gr}^W_w(\mathsf{Mc}(\underline{u})_{\mathscr{H}}) = \mathrm{Gr}^W_w(\underline{\mathscr{M}}') \oplus \mathrm{Gr}^W_{w-1}(\underline{\mathscr{M}})[1]$$

Puisque les deux facteurs directs sont des complexes de Hodge purs de poids w, le cône mixte d'un morphisme de complexes de Hodge mixtes est un complexe de Hodge mixte. Un quasi-isomorphisme de Betti dans $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ est un morphisme $\underline{u}$ tel que $u_{\mathbb{Q}}$ est un quasi-isomorphisme. L'ensemble $\mathscr{Q}_{\mathscr{H}}$ de ces morphismes forme un système multiplicatif dans $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ et la catégorie des complexes de Hodge mixtes est définie comme le localisé

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} := \mathrm{K}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}[\mathscr{Q}_{\mathscr{H}}^{-1}].$$

On peut également définir une variante naïve et obtenir l'analogue de la proposition 3.2.1 :

Proposition 3.2.4. — *Le foncteur*

$$I : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})^{\mathsf{Nv}}_{\mathscr{D}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$$

est une équivalence de catégories triangulées.

3.2.5 Le foncteur de réalisation

Nous ne donnerons que très peu de détails sur la construction du foncteur

$$\mathrm{real} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X,\mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}}.$$

Comme dans [BBD82], on peut définir une notion de complexes *bête* qui permet d'obtenir la notion de complexes de Hodge mixtes stupides. Ces derniers sont munis d'une filtration auxiliaire G et forme une catégorie

$$\mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X,\mathbb{Q};W,G)$$

et l'on peut montrer que l'on a une équivalence

$$\mathsf{G} : \mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X,\mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \to \mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHW}(X,\mathbb{Q})).$$

Dans la suite G^{-1} est un quasi-inverse fixé de G.

Si $\underline{\mathscr{M}}$ est un complexe de Hodge mixte stupide, on peut considérer le diagramme $\mathsf{C}(\underline{\mathscr{M}})$ obtenu à partir de $\underline{\mathscr{M}}$ en prenant pour filtration par le poids la convoluée $W*G$ de la filtration par le poids de $\underline{\mathscr{M}}$ avec la filtration additionelle G. Ainsi à

$$\underline{\mathscr{M}} = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & (K_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}},G_{\mathbb{C}}) & \\ (K_{\mathbb{Q}},W_{\mathbb{Q}},G_{\mathbb{Q}}) \arrow[ur, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}}"] & & (\mathscr{M},F,W,G) \arrow[ul, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}}"'] \end{tikzcd}\right)$$

est associé le diagramme

$$\mathsf{C}(\underline{\mathscr{M}}) = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & (K_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}}*G_{\mathbb{C}}) & \\ (K_{\mathbb{Q}},W_{\mathbb{Q}}*G_{\mathbb{Q}}) \arrow[ur, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathbb{Q}}"] & & (\mathscr{M},F,W*G) \arrow[ul, "\alpha^{\mathscr{M}}_{\mathscr{D}}"'] \end{tikzcd}\right)$$

où par définition

$$W_R * G_R := \sum_j G_R^j W_{R,n+j} \qquad R = \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathscr{D}.$$

L'on a donc

$$\mathrm{Gr}_w^W \mathsf{C}(\underline{\mathscr{M}}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_G^i \mathrm{Gr}_{w+i}^W \underline{\mathscr{M}}$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$. Puisque $\underline{\mathscr{M}}$ est un complexe de Hodge stupide, $\mathrm{Gr}_G^i \mathrm{Gr}_{w+i}^W \underline{\mathscr{M}}$ est un module de Hodge pur polarisable de poids $w+i$, en appliquant ${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k$ (3.2.5) l'on obtient donc

$${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k(\mathrm{Gr}_w^W \mathsf{C}(\underline{\mathscr{M}})) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k(\mathrm{Gr}_G^i \mathrm{Gr}_{w+i}^W \underline{\mathscr{M}}) = \mathrm{Gr}_G^k \mathrm{Gr}_{w+k}^W \underline{\mathscr{M}}$$

ce qui implique que $\mathsf{C}(\underline{\mathscr{M}})$ est un complexe de Hodge mixte. Cette construction fournit un foncteur

$$\mathsf{C} : \mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$$

et donc un foncteur

$$\mathrm{real} : \mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})) \xrightarrow{\mathsf{G}^{-1}} \mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}} \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}. \tag{21}$$

Le lemme suivant se déduit des arguments de [Sai00, pages 305-306] :

Lemme 3.2.5. — *Le foncteur (21) induit un foncteur triangulé*

$$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHW}(X, \mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}.$$

Le foncteur $\mathrm{real} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q})_{\mathscr{D}}$ s'en déduit.

3.2.6 Image inverse non-caractéristique des modules de Hodge et des complexes de Hodge

Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement comment construire les images inverses de complexes de Hodge non-caractéristiques. Pour simplifier nous considérons uniquement le cas des complexes purs qui constitue en fait le cas le plus important.

On fixe un morphisme $f : X \to Y$ de variétés algébriques complexes lisses dont on note $d = d_X - d_Y$ la dimension relative. Notons $(\mathscr{D}_{X\to Y}, F)$ le $(\mathscr{D}_X, f^{-1}\mathscr{D}_Y)$-bimodule de transfert (voir *e.g.* [Lau83, 5.1]) donné par

$$(\mathscr{D}_{X\to Y}, F) := \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}(\mathscr{D}_Y, F).$$

Si $(\mathscr{M}, F)$ est un $\mathscr{D}_Y$-module filtré à gauche, on pose[2]

$$f^*_{\mathscr{O}}(\mathscr{M}, F) := (\mathscr{D}_{X\to Y}, F) \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}(\mathscr{M}, F).$$

[2] Pour les $\mathscr{D}$-module filtré à droite la définition s'en déduit via l'équivalence habituelle.

Le $\mathscr{O}_X$-module sous-jacent est simplement $\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{M}$ et la filtration F est donnée par

$$F_k f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M} := \mathrm{Im}\left(\mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}F_k\mathscr{M} \to f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}\right).$$

Remarquons tout d'abord que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_Y$-module à gauche, il existe un isomorphisme fonctoriel de complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$f^\flat_{\mathscr{M}} : f^{-1}\mathrm{DR}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{DR}_{\mathrm{an}}(f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}) \tag{22}$$

qui pour $\mathscr{M} = \mathscr{O}_Y$ coïncide avec le morphisme canonique $f^{-1}\Omega^{\cdot}_{Y^{\mathrm{an}}} \to \Omega^{\cdot}_{X^{\mathrm{an}}}$. Ce morphisme est donné, composante par composante, par les morphismes de faisceaux

$$(f^\flat_{\mathscr{M}})^n : f^{-1}\Omega^n_{Y^{\mathrm{an}}} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}}}} f^{-1}\mathscr{M}^{\mathrm{an}} \to \Omega^n_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}} f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}^{\mathrm{an}}$$

définis pour des sections locales $\omega \in \Omega^n_{Y^{\mathrm{an}}}$ et $m \in \mathscr{M}^{\mathrm{an}}$ par

$$(f^\flat_{\mathscr{M}})^n(\omega \otimes m) = f^*\omega \otimes (1 \otimes m).$$

Lorsque $\mathscr{M}$ est cohérent et non-caractéristique(3) par rapport à f, on déduit de la généralisation du théorème de Cauchy-Kovalevskaya prouvée par M. Kashiwara dans [Kas95], que le morphisme (22) est un quasi-isomorphisme.

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_Y$-module à droite, on obtient ainsi un morphisme de complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X^{an}

$$f^\flat_{\mathscr{M}} : f^{-1}\mathrm{Sp}_X(\mathscr{M})[d] \to \mathrm{Sp}(f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}) \tag{23}$$

qui est fonctoriel en $\mathscr{M}$, compatible à la composition des morphismes et est un quasi-isomorphisme lorsque $\mathscr{M}$ est non-caractéristique.

Nous dirons qu'un $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{E}$ est $\mathscr{O}_X$-tor indépendant lorsque

$$\mathscr{T}or_i^{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(f^{-1}\mathscr{E}, \mathscr{O}_X) = 0 \qquad \forall i > 0.$$

Définition 3.2.6. — Un module de Hodge pur $\underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{MH}(X, w)$ est dit non-caractéristique par rapport à f lorsque le $\mathscr{D}$-module filtré à droite sous-jacent $(\mathscr{M}, F)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- $\mathscr{M}$ est non-caractéristique par rapport à f ;
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $i > 0$ le $\mathscr{O}_Y$-module $\mathrm{Gr}^F_k\mathscr{M}$ est $\mathscr{O}_X$-tor indépendant.

(3) Rappelons que l'on l'on a des morphismes

$$\begin{tikzcd} T^*X & X \times_Y T^*Y \arrow[l, "df^*"'] \arrow[d, "f_\pi"] \\ & T^*Y \end{tikzcd}$$

où f_π est la projection et df^* le morphisme induit par la différentielle de f. En notant $T^*_X Y$ le noyau de df^* et $T^*_Y Y$ la section nulle du fibré cotangent T^*Y, la condition d'être non-caractéristique signifie la variété caractéristique $\mathrm{Char}(\mathscr{M})$ de $\mathscr{M}$ est transverse par rapport à $T^*_X Y$ i.e.

$$f_\pi^{-1}\,\mathrm{Char}(\mathscr{M}) \cap T^*_X Y \subset X \times_Y T^*_Y Y.$$

Un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur $\underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q}, w)_{\mathscr{D}}$ est dit non-caractéristique par rapport à f lorsque :

- le module de Hodge pur ${}^{\mathrm{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})$ est non caractéristique par rapport à f pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{Gr}^F_k \mathscr{M}^i$ est $\mathscr{O}_X$-tor indépendant pour tout entier $k, i \in \mathbb{Z}$.

Soit $\underline{\mathscr{M}}$ un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur de poids w sur Y

$$\underline{\mathscr{M}} = \left(\begin{tikzcd} & K_{\mathbb{C}} & \\ K_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "\alpha^{\underline{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}"] & & (\mathscr{M}, F) \arrow[ul, "\alpha^{\underline{\mathscr{M}}}_{\mathscr{D}}"'] \end{tikzcd} \right).$$

Si $\underline{\mathscr{M}}$est non-caractéristique par rapport à f on peut définir un diagramme étendu :

$$\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & f^{-1}K_{\mathbb{C}}[d] & & \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}) & \\ f^{-1}K_{\mathbb{Q}}[d] \arrow[ur, "f^{-1}\alpha^{\underline{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}{[d]}"] & & f^{-1}\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M})[d] \arrow[ul, "f^{-1}\alpha^{\underline{\mathscr{M}}}_{\mathscr{D}}{[d]}"'] \arrow[ur, "f^{\flat}_{\mathscr{M}}"] & & f^*_{\mathscr{O}}(\mathscr{M}, F) \arrow[ul, "\mathrm{Id}"'] \end{tikzcd} \right)$$

où $f^{\flat}_{\mathscr{M}}$ est le morphisme (23). L'on peut alors associer à ce diagramme étendu un véritable objet de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$ que l'on note $f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}$ (voir [Ivo12, Ivo14b] pour les détails techniques).

Soit $\underline{\mathscr{M}} = ((\mathscr{M}, F), K_{\mathbb{Q}}, \alpha_{\underline{\mathscr{M}}})$ un module de Hodge pur non-caractéristique pour f. Dans T^*Y^{an}, on a l'égalité

$$\mathrm{Char}(\mathscr{M}) = \mathrm{SS}(K_{\mathbb{Q}})$$

où SS désigne le micro-support défini par M. Kashiwara et P. Schapira dans [KS94, 5.1.2]. Ainsi le faisceau pervers $K_{\mathbb{Q}}$ est non caractéristique pour f, au sens de *loc. cit* et

$$f^{-1}K_{\mathbb{Q}}[d] = f^! K_{\mathbb{Q}}[-d]$$

est un faisceau pervers sur X^{an}. De plus $f^*_{\mathscr{O}}(\mathscr{M}, F)$ est un $\mathscr{D}_X$-module filtré holonome régulier *i.e.* appartient à $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X)$. Le morphisme (23) fournit un isomorphisme de faisceau pervers

$$\begin{tikzcd} & f^{-1}\mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(\mathscr{M})[d] \arrow[r, "(23)"] & \mathrm{Sp}_{\mathrm{an}}(f^*_{\mathscr{O}}\mathscr{M}) \\ (f^{-1}K_{\mathbb{Q}}[d]) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[r, equal] \arrow[urr, bend right=60, "\alpha_{f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}}"'] & f^{-1}(K_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})[d] \arrow[u, "f^{-1}\alpha_{\underline{\mathscr{M}}}{[d]}"'] & \end{tikzcd}$$

et l'on peut ainsi définir un objet

$$f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}} := (f^*_{\mathscr{O}}(\mathscr{M}, F), f^{-1}K_{\mathbb{Q}}[d], \alpha_{f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}})$$

de $\mathrm{MF}_{\mathrm{rh}}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$. Le résultat suivant est énoncé dans [Sai90, 2.25 Lemma] (on trouvera une preuve très détaillée dans [Ivo14b]) :

Proposition 3.2.7. — *Soit $\underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{MH}(Y, w)$ un module de Hodge pur de poids w non caractéristique par rapport à f. Alors $f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}$ est un module de Hodge pur sur X de poids $w + d$.*

Ce résultat implique la stabilité des complexes de Hodge purs par image inverse dans le cas non-caractéristique :

Proposition 3.2.8. — *Si $\underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(Y, \mathbb{Q}, w)_{\mathscr{D}}$ est un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur de poids w qui est non-caractéristique par rapport à f, alors*

$$f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathscr{H}}(X, \mathbb{Q}, w + d)$$

est un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur de poids $w + d$.

En effet puisque $\underline{\mathscr{M}}$ est un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur de poids w, il existe un isomorphisme dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_Y, \mathbb{Q})$

$$\underline{\mathscr{M}} \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})[-i]$$

et ${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})$ appartient à $\mathrm{MH}(Y, \mathbb{Q}, w + i)$. Par définition ces modules de Hodge sont tous non-caractéristiques par rapport à f, et l'on a donc un isomorphisme

$$f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}} \xrightarrow{f^*_{\mathscr{O}}\phi} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} f^*_{\mathscr{O}}{}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})[-i].$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}\mathrm{F}(\mathscr{D}_X, \mathbb{Q})$. La proposition 3.2.7 assure que $f^*_{\mathscr{O}}{}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})$ est un module de Hodge de poids $w + i + d$. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, l'on a donc

$${}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k(f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}) \xrightarrow{{}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k(f^*_{\mathscr{O}}\phi)} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^{k-i}(f^*_{\mathscr{O}}{}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^i(\underline{\mathscr{M}})) = f^*_{\mathscr{O}}{}^{\mathsf{p}}\underline{\mathsf{H}}^k(\underline{\mathscr{M}})$$

qui est un module de hodge de poids $w + d + k$. Cela montre que $f^*_{\mathscr{O}}\underline{\mathscr{M}}$ est bien un $\mathscr{D}$-complexe de Hodge pur de poids $w + d$.

3.3 Motifs pervers sur les schémas quasi-projectifs

3.3.1 Faisceaux pervers et représentations de Carquois

La construction de la catégorie abélienne de motifs de M. Nori repose sur le théorème 2.1.1. Si l'on souhaite développer une version relative du travail de M. Nori sur des schémas quasi-projectifs modelée sur les catégories de faisceaux pervers, le principal obstacle est de savoir si le formalisme tannakien utilisé par M. Nori peut s'étendre aux catégories de faisceaux pervers. Dans [Ivo14d], on s'intéresse donc aux catégories abéliennes $\mathscr{P}$ auxquelles il est possible d'associer à toute représentation $\mathcal{Q} \to \mathscr{P}$ d'un carquois $\mathcal{Q}$ une catégorie abélienne vérifiant la propriété universelle qui caractérise la catégorie de M. Nori. Formellement nous considérons la définition suivante :

Définition 3.3.1. — Soit $\mathscr{P}$ une catégorie abélienne K-linéaire. On dira que $\mathscr{P}$ satisfait à la propriété $\mathbf{N}$ lorsque, pour tout carquois $\mathscr{Q}$ et toute représentation $T : \mathscr{Q} \to \mathscr{P}$, il existe une catégorie abélienne K-linéaire $\mathscr{A}$, une représentation $R : \mathscr{Q} \to \mathscr{A}$, un foncteur K-linéaire exact et fidèle $F : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ et un isomorphisme de représentations $\alpha : F \circ R \to T$ tels que le quadruplet $(\mathscr{A}, R, F, \alpha)$ satisfasse la propriété universelle suivante.

Pour tout quadruplet $(\mathscr{B}, S, G, \beta)$, où $\mathscr{B}$ est une catégorie abélienne K-linéaire, $S : \mathscr{Q} \to \mathscr{B}$ est une représentation, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{P}$ est un foncteur K-linéaire exact et fidèle $G : \mathscr{B} \to \mathscr{P}$, et $\beta : G \circ S \to T$ est un isomorphisme de représentations, les conditions suivantes sont satisfaites.

– Il existe un foncteur K-linéaire $H : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs)

$$\gamma : H \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta : G \circ H \xrightarrow{\simeq} F$$

tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H \circ R \arrow[r, "G\star\gamma"] \arrow[d, "\delta\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

– Si $H' : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un foncteur K-linéaire et

$$\gamma' : H' \circ R \xrightarrow{\simeq} S; \qquad \delta' : G \circ H' \xrightarrow{\simeq} F$$

sont deux isomorphismes (le premier de représentations et le second de foncteurs) tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G \circ H' \circ R \arrow[r, "G\star\gamma'"] \arrow[d, "\delta'\star R"] & G \circ S \arrow[d, "\beta"] \\ F \circ R \arrow[r, "\alpha"] & T \end{tikzcd}$$

soit commutatif, alors il existe une unique transformation naturelle $\theta : H \to H'$ telle que $\gamma' \circ (\theta \star R) = \gamma$ et $\delta' \circ (G \star \theta) = \delta$.

Le théorème 2.1.1 prouvé par M. Nori peut donc être reformulé en disant que la catégorie $\mathsf{mod}(K)$ des K-espaces vectoriels de dimension finie satisfait la propriété $\mathbf{N}$. Nous dirons que $\mathscr{P}$ est Hom finie lorsque pour tout objet P, Q dans $\mathscr{P}$ le K-espace vectoriel $\mathscr{P}(P, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(P, Q)$ est de dimension finie.

Remarque 3.3.2. — Soit k un corps de caractéristique zéro muni d'un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Étant donné un k-schéma séparé de type fini, on peut considérer le schéma complexe X_σ obtenu par changement de base, et la catégorie triangulée $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Q})$ des complexes, à cohomologie algébriquement constructible, de faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels pour la topologie classique sur l'espace analytique associé $X^{\mathrm{an}} := X_\sigma(\mathbb{C})$.

Si A, B sont des objects de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Q})$, le groupe des morphismes de A dans B est donné par[(4)]:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, B) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}_X, \mathsf{R}\mathscr{H}om(A, B)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, \mathsf{R}\pi_*\mathsf{R}\mathscr{H}om(A, B)) \\ &= \mathsf{H}^0(\mathsf{R}\pi_*\mathsf{R}\mathscr{H}om(A, B))\end{aligned}$$

où $\mathsf{R}\mathscr{H}om$ désigne le Hom interne et $\mathsf{R}\pi_*$ le foncteur image direct par le morphisme structural X/k. En particulier, comme $\mathsf{R}\mathscr{H}om$ et $\mathsf{R}\pi_*$ préserve la constructibilité, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(A, B)$ est de dimension finie.

Rappelons que la catégorie des faisceaux pervers $\mathscr{P}(X) := \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})$ est le coeur de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Q})$ pour la t-structure perverse. D'après [BBD82, Théorème 4.3.1.(i)], la catégorie $\mathscr{P}(X)$ est noethérienne et artinienne. Puisqu'elle est également Hom finie, elle satisfait les hypothèse du théorème 3.3.3.

Toute catégorie abélienne K-linéaire $\mathscr{P}$ vérifiant la propriété universelle $\mathbf{N}$ est nécessairement noethérienne, artinienne et Hom finie. Dans [Ivo14d], nous montrons la réciproque :

Théorème 3.3.3. — *Soit $\mathscr{P}$ une catégorie abélienne K-linéaire. On suppose que $\mathscr{P}$ est noethérienne, artinienne et Hom finie, alors $\mathscr{P}$ satisfait la propriété* $\mathbf{N}$.

La preuve du théorème 3.3.3 est élémentaire et découle essentiellement d'une variante de dimension finie d'un résultat prouvé par M. Takeuchi dans [Tak77]. On peut en effet déduire du théorème de M. Takeuchi le résultat suivant:

Proposition 3.3.4. — *Soit $\mathscr{P}$ une catégorie abélienne K-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathscr{P}$ est noethérienne, artinienne et Hom finie ;*
2. *il existe une K-coalgèbre A et une equivalence K-linéaire de catégories entre $\mathscr{P}$ et la catégorie $\mathsf{comod}(A)$;*
3. *il existe un foncteur K-linéaire exact et fidèle $\omega : \mathscr{P} \to \mathsf{mod}(K)$.*

Ce dernier implique le théorème 3.3.3 puisque l'on peut aisément vérifier, grâce au théorème 2.1.1 prouvé par M. Nori, que toute catégorie abélienne K-linéaire munie d'un foncteur K-linéaire exact et fidèle $\mathscr{P} \to \mathsf{mod}(K)$ satisfait la propriété $\mathbf{N}$.

(4) Notons que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathsf{Spec}(k), \mathbb{Q})$ n'est rien d'autre que la catégorie triangulée $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f.d.}}(\mathbb{Q})$ des complexes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels à cohomologie de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

3.3.2 Motifs pervers

Fixons un corps k de caractéristique zéro muni d'un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Dans la suite une k-variété est un k-schéma quasi-projectif.

Soit X une k-variété et $\mathscr{M}(X)$ l'une des catégories abéliennes $\mathbb{Q}$-linéaires suivantes: (a) la catégorie des faisceaux pervers $\mathscr{P}(X)$; (b) la catégorie des faisceaux pervers d'origine géométrique $\mathscr{P}(X)^{\mathrm{go}}$ introduite dans [BBD82, 6.2.4] ; (c) la catégorie des modules de Hodge $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})$; (d) la catégorie des modules de Hodge d'origine géométrique $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{go}}$ (voir [Sai91, (2.6) Définition]).

Rappelons que les catégories dérivées $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X))$, pour X une k-variétés, sont munies d'un formalisme des six foncteurs

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X)) \underset{f_*^{\mathscr{M}}}{\overset{f^*_{\mathscr{M}}}{\leftrightarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(Y)) \underset{f^!_{\mathscr{M}}}{\overset{f_!^{\mathscr{M}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X)).$$

Notons

$$\mathsf{H}^i_{\mathscr{M}} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X)) \to \mathscr{M}(X) \quad i \in \mathbb{Z}$$

les foncteurs cohomologiques associés à la t-structure usuelle.

Fixons une k-variété quasi-projective X. Un triplet relatif (Y, Z, i) est la donnée d'une k-variété Y munie d'un morphisme de k-varétés $a : Y \to X$, d'un sous-schéma fermé Z de Y et d'un entier relatif $i \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.3.5. — Soit (Y, Z, i) un triplet relatif. Posons

$$\mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i) := \mathsf{H}^{-i}_{\mathscr{M}}(a_!^{\mathscr{M}}(u_*^{\mathscr{M}} u^!_{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{M}}_X)))$$

où $u : U \hookrightarrow Y$ est l'immersion ouverte du complémentaire de Z dans Y.

Notons que par définition $\mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i)$ est un objet de $\mathscr{M}(X)$ qui ne dépend que des structures réduites de Y et Z. Il n'est pas difficile en utilisant le formalisme des six foncteurs de construire deux sortes différentes de morphismes dans $\mathscr{M}(X)$ entre ces objets : les morphismes de fonctorialité et les morphismes bord.

Soient (Y_1, Z_1, i) et (Y_2, Z_2, i) deux triplets relatifs. Supposons que $f : Y_2 \to Y_1$ soit un morphisme de X-schémas tel que $f(Z_2) \subseteq Z_1$. Le morphisme de fonctorialité est un morphisme dans $\mathscr{M}(X)$

$$f_\star^{\mathscr{M}} : \mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y_2, Z_2, i) \to \mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y_1, Z_1, i). \tag{24}$$

Soient (Y, Z, i) un triplet relatif et $W \subseteq Z$ un sous-schéma fermé. Le morphisme bord est un morphisme dans $\mathscr{M}(X)$

$$\mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i) \to \mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Z, W, i-1). \tag{25}$$

On peut alors paraphraser complètement la construction de M. Nori en considérant comme point de départ de la construction le carquois $\mathscr{D}^{\mathrm{Nori}}_X$ ayant un sommet pour chaque triplet relatif (Y, Z, i) et dont les arêtes sont données de la manière suivante.

– Si (Y_1, Z_1, i) et (Y_2, Z_2, i) sont des triplets relatifs, alors chaque morphisme de X-schémas $f : Y_2 \to Y_1$ tel que $f(Z_2) \subseteq Z_1$ définit une arête
$$(Y_2, Z_2, i) \to (Y_1, Z_1, i). \tag{26}$$
– Si (Y, Z, i) est un triplet relatif, alors tout sous-schéma fermé $W \subseteq Z$ définit une arête
$$(Y, Z, i) \to (Z, W, i-1). \tag{27}$$

Le carquois $\mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}}$ admet alors une représentation
$$\mathsf{T}_X^{\mathscr{M}} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{M}(X)$$
qui envoie les arêtes (26) et (27) sur les morphismes (24) et (25) respectivement. Comme le foncteur $\mathsf{rat}_X^{\mathscr{H}} : \mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}) \to \mathscr{P}(X)$ est compatible au formalisme des six foncteurs, l'on obtient un isomorphisme de représentations
$$\alpha_X^{\mathscr{H}} : \mathsf{rat}_X^{\mathscr{H}} \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{H}} \to \mathsf{T}_X^{\mathscr{P}}.$$

En appliquant le théorème 3.3.3, à la représentation
$$\mathsf{T}_X^{\mathscr{P}} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{P}(X)$$
on obtient une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X)$, un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle $\mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}}$, une représentation $\mathsf{T}_X^{\mathscr{N}}$:
$$\mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}} : \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X) \to \mathscr{P}(X) \qquad \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X)$$
et un isomorphisme de représentations de carquois $\alpha_X^{\mathrm{Nori}} : \mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}} \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} \to \mathsf{T}_X^{\mathscr{P}}$ vérifiant le théorème suivant :

Théorème 3.3.6. — *Soit $(\mathscr{A}, \mathsf{B}, \mathsf{T}, \alpha)$ un quadruplet où $\mathsf{B} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}(X)$ est un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact fidèle, $\mathsf{T} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{A}$ est une représentation, et $\alpha : \mathsf{B} \circ \mathsf{T} \to \mathsf{T}_X^{\mathscr{P}}$ est un isomorphisme de représentations de carquois.*

– *Il existe un triplet $(\mathsf{R}, \rho, \varrho)$ où*
$$\mathsf{R} : \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X) \to \mathscr{A}$$
est un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle, $\rho : \mathsf{B} \circ \mathsf{R} \to \mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}}$ est un isomorphisme de foncteurs, $\varrho : \mathsf{R} \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} \to \mathsf{T}$ est un isomorphisme de représentations de carquois tel que
$$\begin{tikzcd} \mathsf{B} \circ \mathsf{R} \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} \arrow[r, "\mathsf{B} \circ \varrho"] \arrow[d, "\rho \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}}"] & \mathsf{B} \circ \mathsf{T} \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathsf{rat}_X^{\mathscr{N}} \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}} \arrow[r, "\alpha_X^{\mathscr{N}}"] & \mathsf{T}_X^{\mathscr{P}} \end{tikzcd}$$
soit commutatif.

– *Si* $(\mathsf{R}', \varrho', \rho')$ *est un autre tel triplet, alors il existe une et une seule transformation naturelle* $\theta : \mathsf{R} \to \mathsf{R}'$ *telle que*

$$\rho' \circ (\mathsf{B} \circ \theta) = \rho \qquad \varrho' \circ (\theta \circ \mathsf{T}_X^{\mathscr{N}}) = \varrho.$$

Remarque 3.3.7. — Par construction la catégorie $\mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{Spec}(k))$ est la catégorie des motifs homologiques effectifs $\mathrm{EHM}(k, \mathbb{Q})$ construite par M. Nori (voir par exemple [Nor] ou [Lev05, Definition 3.13]).

En appliquant le théorème 3.3.6 au quadruplet

$$(\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}), \mathsf{rat}_X^{\mathscr{H}}, \mathsf{T}_X^{\mathscr{H}}, \alpha_X^{\mathscr{H}})$$

on obtient un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle

$$\mathsf{R}_X^{\mathscr{H}} : \mathscr{N}^{\mathrm{eff}}(X) \to \mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})$$

prenant ses valeurs dans la sous-catégorie abélienne des modules de Hodge mixtes d'origine géométrique. En considérant le morphisme de carquois $\mathsf{Q} : \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}} \to \mathscr{D}_X^{\mathrm{Nori}}$.

$$(Y, Z, i) \mapsto (\mathbb{G}_{m,Y}, \mathbb{G}_{m,Z} \cup Y, i+1),$$

où Y est plongé dans $\mathbb{G}_{m,Y}$ via la section unité, on peut construire la catégorie des motifs pervers non effectifs $\mathscr{N}(X)$ et prolonger le foncteur de réalisation de Hodge à cette catégorie (voir [Ivo14d] pour les détails).

3.4 « Basic lemma » et complexes cellulaires pervers

3.4.1 Le lemme basique sous sa forme originale

Rappelons le résultat original de A. Beĭlinson dont est tiré le « basic lemma » sous la forme [Nor02, Basic Lemma – first form] :

***Lemme 3.4.1* (A. Beĭlinson)**. — *Soient* $f : Y \to X$ *un morphisme affine de* k*-schémas quasi-projectifs et* $A \in \mathscr{P}(Y)$ *un faisceau pervers sur* Y*. On suppose* $\dim(Y) = n$*. Alors il existe un ouvert affine* U *dans* Y *tel que* $\dim(Y \setminus U) \leqslant n-1$ *et vérifiant les deux propriétés suivantes :*

– *le morphisme canonique*
$$A \to u_*^{\mathscr{P}} u_{\mathscr{P}}^* A$$
est injectif ;

– *pour tout* $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *on a*
$$^{p}H^i a_!^{\mathscr{P}} \left(u_*^{\mathscr{P}} u_{\mathscr{P}}^* A\right) = 0$$
dans $\mathscr{P}(X)$.

Remarquons que la version donnée par A. Beĭlinson dans [Beĭ87c, Lemma 3.3] est plus générale dans la mesure ou il ne suppose pas le morphisme f affine mais suppose donné un recouvrement de Y par des ouverts affines. La version énoncée ci-dessus sera suffisante pour nos besoins. Puisque le foncteur d'oubli

$$\mathsf{rat}_X : \mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q}) \to \mathscr{P}(X)$$

est exact et fidèle, si $A \in \mathrm{MHM}(Y, \mathbb{Q})$ est un module de Hodge mixte, alors les deux conditions du lemme précédent impliquent immédiatement que le morphisme canonique

$$A \to u_*^{\mathscr{H}} u_{\mathscr{H}}^* A$$

est injectif, et que pour tout $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$${}^pH^i a_!^{\mathscr{H}} \left(u_*^{\mathscr{H}} u_{\mathscr{H}}^* A\right) = 0$$

dans $\mathrm{MHM}(X, \mathbb{Q})$.

Remarque 3.4.2. — Ce lemme permet en particulier de construire par récurrence, pour tout objet $A \in \mathrm{MHM}(Y, \mathbb{Q})$, une résolution $A^\bullet$, acyclique pour le foncteur exact à gauche ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{H}}$.

3.4.2 Stratifications

Supposons que X soit une k-schéma quasi-projectif *lisse*. On peut supposer, quitte à considérer au besoin ses composantes connexes, que X est connexe de dimension d. Notons SmAff/X la catégorie des X-schémas quasi-projectifs lisses qui sont affines.

Comme dans le cas des motifs de M. Nori, la possibilité de construire pour un schéma affine des stratifications bien particulières constitue le point de départ de la construction.

Soit Y un k-schéma quasi-projectif. Convenons d'appeler dans la suite, stratification, une suite croissante $Y_\bullet$ de sous-ensemble fermé de Y

$$Y_\bullet : \cdots \subseteq Y_i \subseteq Y_{i+1} \subseteq \cdots \qquad i \in \mathbb{Z}$$

telle que $\dim(Y_i) \leqslant i$ pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, et telle que $Y_n = Y$ pour un certain entier n. Notons que les conditions impliquent que $Y_{-1} = \emptyset$.

Soient $Y_\bullet$ et $Y'_\bullet$ deux stratifications de Y. On dit que $Y'_\bullet$ est plus fine que $Y_\bullet$, ce que l'on écrit $Y_\bullet \leqslant Y'_\bullet$, lorsque $Y_i \subseteq Y'_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ceci définit une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathscr{S}_Y$ des stratifications de Y. Cet ensemble ordonné est filtrant. En effet, puisque

$$\dim(Y_i \cup Y'_i) \leqslant i,$$

la stratification $Y''_\bullet$ donnée par $Y''_i := Y_i \cup Y'_i$ est plus fine que $Y_\bullet$ et $Y'_\bullet$.

Soient $f : Y \to Y'$ un morphisme de X-schémas quasi-projectifs et $Y_\bullet$ une stratification de Y. Notons

$$f_\sharp(Y_i) := \overline{f(Y_i)}$$

l'adhérence de l'image de Y_i dans Y'. Alors $f_\sharp(Y_\bullet)$ est une stratification de Y'.

Ceci définit un foncteur $f_\sharp : \mathscr{S}_Y \to \mathscr{S}_{Y'}$. Soit $f' : Y' \to Y''$ un autre morphisme de X-schémas quasi-projectifs. Alors, pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$

$$\overline{f'\left(\overline{f(Y_i)}\right)} = \overline{f'\left(f(Y_i)\right)}.$$

Ceci implique que les stratifications $f'_\sharp(f_\sharp(Y_\bullet))$ et $(f'f)_\sharp(Y_\bullet)$ sont les mêmes. On a donc légalité de foncteurs $f'_\sharp \circ f_\sharp = (f' \circ f)_\sharp$.

3.4.3 Complexes cellulaires

Dans la suite nous utilisons les groupes d'homologie de la définition 3.3.5 décalés par la la dimension de X:

Définition 3.4.3. — Soit (Y, Z, i) un triplet relatif. On pose

$$\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i) := \mathsf{T}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i - 2d) = \mathsf{H}^{2d-i}_{\mathscr{M}}(a^{\mathscr{M}}_!(u^{\mathscr{M}}_* u^!_{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{M}}_X)))$$

où $u : U \hookrightarrow Y$ est l'immersion ouverte du complémentaire de Z dans Y et $a : Y \to X$ est le morphisme structural.

La définition suivante est essentielle dans la suite :

Définition 3.4.4. — Soit Y un X-schéma quasi-projectif. Une stratification

$$Y_\bullet : \emptyset = Y_{-1} \subseteq Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n = Y$$

de Y est dite cellulaire si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$ les conditions suivantes sont satisfaites :

- si $\dim(Y_i) = i$, alors $\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y_i, Y_{i-1}, k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq i$;
- si $\dim(Y_i) \leqslant i - 1$, alors $Y_i = Y_{i-1}$.

Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de X-schémas quasi-projectifs, l'image d'une stratification cellulaire par le foncteur $f_\sharp$ n'est pas en général cellulaire. Pour ce qui concerne la fonctorialité, il est donc préférable de considérer toutes les stratifications, cellulaires ou non.

En utilisant la forme générale du « basic lemma » (voir [Beĭ87c, Lemma 3.3]) on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.4.5. — *Soit $a : Y \to X$ un morphisme affine de X-schémas quasi-projectifs. On suppose que* $\dim(Y) = n$. *Pour tout fermé W tel que* $\dim(W) \leqslant n - 1$, *il existe un fermé Z de Y contenant W et tels que* $\dim(Z) \leqslant n - 1$ *et pour tout entier relatif $i \neq n$*

$$\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Z, i) = 0.$$

Si Y est intègre, on peut choisir Z de sorte que son complémentaire dans Y soit un ouvert lisse sur k.

Lorsque $X = \mathsf{Spec}(k)$, on retrouve l'énoncé du lemme 2.1.4 utilisé par M. Nori ([Nor02, Basic Lemma – first form]). Comme conséquence immédiate, on voit que le sous-ensemble $\mathscr{A}_Y$ de $\mathscr{S}_Y$ formé par les stratifications cellulaires est cofinal dans $\mathscr{S}_Y$. Plus précisément on prouve par récurrence le lemme suivant:

Lemme 3.4.6. — *Soient Y un k-schéma quasi-projectif, $a : Y \to X$ un morphisme affine et $Y_\bullet$ une stratification de Y. Alors, il existe une stratification cellulaire de Y plus fine que $Y_\bullet$.*

On en déduit également que tout $Y \in \mathsf{SmAff}/X$ admet une stratification cellulaire. Comme dans le cas des motifs de M. Nori on peut considérer les complexes d'objets de $\mathscr{M}(X)$ associés aux stratifications:

Définition 3.4.7. — Soit Y un X-schéma quasi-projectif. Pour toute stratification $Y_\bullet$ de Y, on note $\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet)$ le complexe d'objets de $\mathscr{M}(X)$ donné par :

$$\cdots \to \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y_i, Y_{i-1}, i) \to \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y_{i-1}, Y_{i-2}, i-1) \to \cdots \to \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y_0, Y_{-1}, 0) \to 0$$

avec $\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y_0, Y_{-1}, 0)$ placé en degré 0.

Ces complexes sont fonctoriels. En effet, si $f : Y \to Y'$ est un morphisme de X-schémas quasi-projectifs et $Y_\bullet$ est une stratification de Y, en utilisant les morphismes du type (24), on obtient un morphisme de complexes

$$f^{\mathscr{M}}_\star : \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet) \to \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y', f_\sharp(Y_\bullet))$$

tel que pour tout morphisme de X-schémas quasi-projectifs $f' : Y' \to Y''$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet) \arrow[r, "f^{\mathscr{M}}_\star"'] \arrow[rr, bend left, "(f'f)^{\mathscr{M}}_\star"] & \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y', f_\sharp(Y_\bullet)) \arrow[r, "(f')^{\mathscr{M}}_\star"'] & \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y'', (f'f)_\sharp(Y_\bullet)) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Définition 3.4.8. — Soient $Y \in \mathsf{SmAff}/X$ et $Y_\bullet$ une stratification de Y. On pose

$$\mathsf{r}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet) := \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet)[-2d].$$

Tout l'intérêt des stratifications cellulaires réside dans le fait qu'elles calculent l'homologie des X-schémas quasi-projectifs dans la théorie $\mathscr{M}$. Lorsque $Y_\bullet$ est cellulaire, on construit en effet par récurrence des isomorphismes

$$\mathsf{H}^{2d-i}_{\mathscr{M}}(\mathsf{r}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet)) = \mathsf{H}^{-i}_{\mathscr{M}}(\mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{TH}^{\mathscr{M}}_X(Y, \emptyset, i) = \mathsf{H}^{2d-i}_{\mathscr{M}}(a^{\mathscr{M}}_! a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{M}}_X)))$$

pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$. Ce qui donne des isomorphismes

$$\psi(Y, Y_\bullet, i) : \mathsf{H}^i_{\mathscr{M}}(\mathsf{r}^{\mathscr{M}}_X(Y, Y_\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^i_{\mathscr{M}}(a^{\mathscr{M}}_! a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}^{\mathscr{M}}_X)).$$

En fait on dispose d'un résultat plus fin:

Proposition 3.4.9. — *Soit* $Y \in \mathsf{SmAff}/X$*. On suppose* Y *purement de dimension* n*. Alors, il existe une stratification cellulaire* $Y_\bullet$ *de* Y *telle que* $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)$ *soit isomorphe dans* $\mathrm{D^b}(\mathscr{M}(X))$ *à*

$$a_!^{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}} \mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}}.$$

Esquissons brièvement la démonstration de la proposition de manière à mettre en évidence le rôle joué par le lemme de A. Beĭlinson (voir lemme 3.4.1). Nous renvoyons à [Ivo14c, Proposition 4.13] pour les détails.

Puisque a est un morphisme lisse, on a

$$a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}}) = \mathbb{Q}_Y^{\mathscr{M}}(n-d)[2n-2d],$$

de sorte que

$$A := a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}})[2d-n]$$

est un objet de $\mathscr{M}(X)$ puisque Y est lisse sur k de dimension n. Ainsi, pour calculer $a_!^{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}})$, il suffit donc de trouver une résolution $A^\bullet$ de A, acyclique pour le foncteur exact à gauche ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}$. Le complexe ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}(A^\bullet)$ sera alors isomorphe à $a_!^{\mathscr{M}}(A)$ dans $\mathrm{D^b}(\mathscr{M}(X))$, autrement dit ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}(A^\bullet)[n-2d]$ sera isomorphe à $a_!^{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}})$. Cette résolution est construite par récurrence en utilisant le lemme 3.4.1 à chaque étape. Ce que l'on obtient par cette récurrence est une stratification cellulaire $Y_\bullet$ de Y et une résolution $A^\bullet$ de A, acyclique pour le foncteur ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}$, telles que

$${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}(A^i) = \mathsf{TH}_X^{\mathscr{M}}(Y_{n-i}, Y_{n-i-1}, n-i).$$

Le complexe ${}^pH^0 a_!^{\mathscr{M}}(A^\bullet)$ s'identifiant au complexe $\mathsf{TH}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)[-n]$, l'on voit que $a_!^{\mathscr{M}} a^!_{\mathscr{M}}(\mathbb{Q}_X^{\mathscr{M}})$ est isomorphe à $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)$ dans $\mathrm{D^b}(\mathscr{M}(X))$.

3.5 Réalisation de Hodge et vers les motifs pervers

3.5.1 Un peu d'algèbre homotopique

On peut mettre sur la catégorie $\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$, des faisceaux additifs sur $\mathscr{A}$ (pour la topologie des épimorphismes) à valeurs dans la catégorie $\mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ des complexes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, une structure de catégorie de modèle de sorte que

$$\mathsf{Ho}(\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))) = \mathbf{D}(\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathbb{Q})).$$

Pour des raisons techniques, liées à l'utilisation de colimites homotopiques, il est en fait préférable de travailler avec une catégorie de modèle simpliciale (la formule donnant les colimites homotopiques y étant plus simple).

D'après [RSS01, Proposition 4.5], la catégorie $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ des objets simpliciaux de $\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ est munie d'une structure de modèle simpliciale (appelée la structure de modèle canonique dans [RSS01]) telle que les foncteurs adjoints

$$\mathsf{cc} : \mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \rightleftarrows \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : \mathsf{Ev}$$

forment une équivalence de Quillen (voir [RSS01, Theorem 3.6]). Ici pour $\mathscr{F} \in \mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ et $\mathscr{G} \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$, $\mathsf{cc}(\mathscr{F})$ désigne le faisceau simplicial constant et $\mathsf{Ev}(\mathscr{G}) = \mathscr{G}_0$ le faisceau des 0-simplexes. L'on peut remplacer $\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ par $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ sans changer la catégorie homotopique.

Notons $\otimes_{\mathsf{Ch}}$, le produit tensoriel usuel de complexes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ et $K \in \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$, on peut considérer l'objet $\mathscr{F} \otimes (K)_{cst}$ de $\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ défini par $A \mapsto \mathscr{F}(A) \otimes_{\mathsf{Ch}} K$. Cette construction étant fonctorielle, elle induit un bifoncteur

$$- \otimes (-)_{cst} : \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \times \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}) \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})).$$

Rappelons que pour la structure de modèle projective sur $\mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations les épimorphismes (voir par exemple [Hov99, Theorem 2.3.11]).

Lemme 3.5.1. — *Le bifoncteur*

$$- \otimes (-)_{cst} : \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \times \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}) \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$$

est un bifoncteur de Quillen lorsque $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ *est munie de la structure de modèle canonique et* $\mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ *de la structure de modèle projective.*

Notons que si $\mathscr{F} \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$, le foncteur $\mathscr{F} \otimes (-)_{cst}$ admet un adjoint à gauche

$$\mathscr{F} \otimes (-)_{cst} : \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}) \rightleftarrows \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : \underline{\mathsf{Hom}}(\mathscr{F}, -)$$

(voir [Ivo14c] pour la construction).

Soit $\mathcal{S}$ une catégorie et

$$r : \mathcal{S} \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$$

un foncteur. On peut associer à r deux foncteurs

$$r^* : \mathbf{PSh}(\mathcal{S}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \leftrightarrows \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : r_*$$

définis comme ci-dessous. Pour tout objet$\mathscr{F} \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$, $r_*(\mathscr{F})$ est le préfaisceau sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathsf{Ch}(\mathbb{Q})$ défini par

$$r_*(\mathscr{F})(X) := \underline{\mathsf{Hom}}(r(X), \mathscr{F})$$

pour $X \in \mathcal{S}$. Étant donné un préfaisceau $\mathscr{X} \in \mathbf{PSh}(\mathcal{S}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$, l'objet $r^*(\mathscr{X})$ est défini comme le co-égalisateur dans $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$

$$r^*(\mathscr{X}) = \mathrm{Coeq}\left[\bigoplus_{X \to Y \in \mathsf{Fl}(\mathcal{S})} r(X) \otimes \mathscr{X}(Y)_{cst} \rightrightarrows \bigoplus_{X \in \mathcal{S}} r(X) \otimes \mathscr{X}(X)_{cst}\right].$$

Proposition 3.5.2. — *Les foncteurs*

$$r^* : \mathbf{PSh}(\mathcal{S}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \leftrightarrows \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : r_*$$

sont adjoints et les foncteurs r and $r^*(- \otimes \mathbb{Q})$ sont canoniquement isomorphes. De plus, si $r(X)$ est cofibrant dans $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$pour tout $X \in \mathcal{S}$, alors ces foncteurs forment une adjonction de Quillen pour la structure de modèle projective sur $\mathbf{PSh}(\mathcal{S}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ et la structure de modèle canonique sur $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{A}, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$.

3.5.2 Des complexes cellulaires aux préfaisceaux

On dispose d'une part du foncteur exact pleinement fidèle

$$\mathsf{i} : \mathsf{Ch}(\mathscr{M}(X)) \to \mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$$

et d'autre part du

$$\mathsf{cc} : \mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$$

qui consiste à voir un objet $\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ comme un objet simplicial constant.

Pour tout $Y \in \mathsf{SmAff}/X$ et toute stratification $Y_\bullet$ de Y, on peut considérer l'image $\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)$ de $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)$ dans $\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$.

Définition 3.5.3. — Pour tout $Y \in \mathsf{SmAff}/X$, on pose

$$\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y) := \operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{S}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)).$$

Cette définition est fonctorielle et fournit un foncteur

$$\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}} : \mathsf{SmAff}/X \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})).$$

En effet, soit $f : Y \to Y'$ un morphisme dans SmAff/X. On a vu que f induisait un foncteur $f_\sharp : \mathscr{S}_Y \to \mathscr{S}_{Y'}$. La fonctorialité classique des colimites homotopiques (voir par exemple [Hir03, Proposition 19.1.8]), fournit un morphisme

$$\operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{S}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y', f_\sharp(Y_\bullet))) \to \operatorname*{hocolim}_{Y'_\bullet \in \mathscr{S}_{Y'}} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)) =: \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y).$$

D'autre part, la fonctorialité des complexes associés aux stratifications donne un morphisme $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y, -) \to \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y', f_\sharp(-))$ de foncteurs sur $\mathscr{S}_Y$. Ce dernier un morphisme

$$\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y) := \operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{S}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)) \to \operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{S}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y', f_\sharp(Y_\bullet)))$$

et par composition, un morphisme $\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y) \to \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y')$ dont la fonctorialité est facile à vérifier.

Le lemme 3.4.6 implique le résultat suivant :

Lemme 3.5.4. — *Soit $Y \in \mathsf{SmAff}/X$. Le morphisme canonique*

$$\operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{A}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet)) \to \operatorname*{hocolim}_{Y_\bullet \in \mathscr{S}_Y} \mathsf{cc}(\mathsf{ir}_X^{\mathscr{M}}(Y, Y_\bullet))$$

est un quasi-isomorphisme.

L'étape suivante consiste à étendre le foncteur $\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}$ à tous les X-schémas quasi-projectifs lisses. Pour cela, nous utilisons une construction que l'on peut voir comme une extension de Kan homotopique à gauche et qui est inspirée du foncteur de remplacement affine introduit par F. Morel dans [Mor12, §A.2].

Définition 3.5.5. — Pour tout $Y \in \mathsf{Sm}/X$, on pose

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y) := \operatorname*{hocolim}_{(Z\to Y)\in(\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y} \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Z).$$

En notant $I_Y : (\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y \to \mathsf{SmAff}/X$ le foncteur d'oubli défini par $I_Y(Z \to Y) = Z$, la colimite homotopique précédente peut se réécrire sous la forme

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y) := \operatorname*{hocolim}_{(\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y} \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}} \circ I_Y.$$

Puisque $\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Z)$ est cofibrant dans $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ pour tout $Z \in \mathsf{SmAff}/X$, il en est de même de $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y)$ (voir par exemple [Hir03, Theorem 18.5.2]).

La définition précédente est fonctorielle sur Sm/X i.e. définit un foncteur

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}} : \mathsf{Sm}/X \to \mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})).$$

Soit $f : Y' \to Y$ un morphisme de X-schéma quasi-projectif lisse. On dispose d'un foncteur

$$f_* : (\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y' \to (\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y$$

envoyant le morphisme $(Z \to Y')$ sur le morphisme $(Z \to Y)$ obtenu par composition avec f. Puisque par définition $I_Y \circ f_* = I_{Y'}$, il s'ensuit que l'on a un morphisme canonique

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y') := \operatorname*{hocolim}_{(\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y'} \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}} \circ I_{Y'} \to \operatorname*{hocolim}_{(\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y} \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}} \circ I_Y =: \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y)$$

(voir [Hir03, Proposition 19.1.8] par exemple).

Remarque 3.5.6. — En notant $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}$ la restriction de $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}$ à la sous-catégorie SmAff/X, on a un morphisme canonique de foncteurs

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}} \to \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}.$$

Pour tout $Y \in \mathsf{SmAff}/X$, le morphisme induit $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y) \to \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(Y)$ est une équivalence faible. (Cela découle de [Hir03, Corollary 19.6.8] puisque $(\mathrm{Id} : Y \to Y)$ est un objet final de la catégorie $(\mathsf{SmAff}/X)\downarrow Y$).

On peut alors appliquer la construction du §3.5.1 au foncteur $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}$. La proposition 3.5.2 fournit une adjonction de Quillen

$$\mathsf{RLQ}_X^{\mathscr{M},\mathrm{eff}} := (\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}})^* : \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \leftrightarrows \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : (\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}})_* =: \mathsf{RRQ}_X^{\mathscr{M},\mathrm{eff}}$$

telle que les foncteurs $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}$ et $\mathsf{RLQ}_X^{\mathscr{M},\mathrm{eff}}(-\otimes\mathbb{Q})$ soient canoniquement isomorphes.

Notons cependant que dans dans la précédente adjonction, la catégorie des préfaisceaux $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ est munie de la structure de modèle projective et non de la structure de modèle projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale. L'étape suivante consiste donc à prouver le résultat suivant:

Théorème 3.5.7. — *L'adjonction* $(\mathsf{RLQ}_X^{\mathscr{M},\text{eff}}, \mathsf{RRQ}_X^{\mathscr{M},\text{eff}})$ *induit une adjonction de Quillen*

$$\mathsf{RLQ}_X^{\mathscr{M},\text{eff}} : \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \leftrightarrows \Delta^{\text{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) : \mathsf{RRQ}_X^{\mathscr{M},\text{eff}}$$

où $\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ *est munie de la structure de modèle projective* $(\mathbb{A}^1, \text{et})$*-locale.*

3.5.3 Esquisse de la preuve du théorème de localisation

La preuve de ce théorème nécessite un peu de travail. Nous en expliquons maintenant les grandes lignes lorsque l'on considère la topologie de Nisnevich plutôt que la topologie étale (essentiellement pour obtenir la descente étale à partir de la descente Nisnevich, il faut considérer en plus des revêtements galoisiens voir [Ivo14c] pour les détails).

Afin d'obtenir une description plus agréable de la structure de modèle projective $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-locale, il est important d'en comprendre les objets fibrants. Le fait de travailler à coefficients rationnels simplifie beaucoup leur description.

Il découle de [DHI04] que les objets fibrants pour la structure de modèle projective Nis-locale sont les objets fibrants pour la structure de modèle projective et vérifiant la descente Nisnevich (voir e.g. [DHI04, Définition 4.3]). Les travaux de F. Morel et V. Voevodsky assurent alors qu'un préfaisceau $\mathscr{X} \in \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ est fibrant pour la structure de modèle projective $(\mathbb{A}^1$,Nis$)$-locale si il est projectivement fibrant et s'il vérifie la propriété la $\mathbb{A}^1$-propriété de Brown-Gersten pour la topologie de Nisnevich (voir [Voe10, Proposition 3.8]). Cette caractérisation est en générale très pratique, mais dans notre cas un peu insuffisante puisque le foncteur de réalisation est construit au départ uniquement sur les schémas affines. Heureusement on dispose d'un résultat de F. Morel, [Mor12, Theorem A.14], qui assure qu'un préfaisceau $\mathscr{X} \in \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$ vérifiant la $\mathbb{A}^1$-propriété de Brown-Gersen pour la topologie de Zariski et la propriété de Brown-Gersten affine pour la toppologie de Nisnevich vérifie également la propriété de Brown-Gersten pour la topologie de Nisnevich.

En utilisant la définition explicite de $\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}$ en terme de complexes cellulaires, on montre dans un premier temps que $\mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}$ satisfait l'invariance par homotopie et la descente Nisnevich pour les carrés Nisnevich *affines*. On dispose alors des ingrédients nécessaires pour pouvoir reprendre les idées de la preuve de [Wen10, Proposition 3.11] pour obtenir la proposition suivante :

Proposition 3.5.8. — *Soient* $Y \in \mathsf{Sm}/X$ *et* $T \to Y$ *un torseur sous un fibré vectoriel tel que* T *soit affine. Alors, le morphisme*

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(T) \to \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y)$$

est une équivalence faible dans $\Delta^{\text{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$.

Rappelons que tout k-schéma quasi-projectif possède un tel torseur (voir [Jou73, Lemme 1.5] ou [Wei89, Proposition 4.3]). Sachant que T est affine, le morphisme canonique $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(T) \to \mathsf{ra}_X^{\mathscr{M}}(T)$ est une équivalence faible, et l'on peut utiliser l'astuce de J.-P. Jouanolou comme dans dans la preuve de la propriété de Mayer-Vietoris pour la K-théorie invariante par homotopie de C. Weibel [Wei89, Theorem 5.1] pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 3.5.9. — *Soit $Y \in \mathsf{Sm}/X$.*

1. *Soit U, E un recouvrement ouvert de Y. Alors, le carré*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(E) \arrow[d] \\ \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(U) \arrow[r] & \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y) \end{tikzcd}$$

   est homotopiquement cocartésien dans $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q}))$.
2. *Le morphisme*

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(\mathbb{A}_Y^1) \to \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y)$$

   est une équivalence faible.

Le foncteur $\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}$ vérifie donc la $\mathbb{A}^1$-propriété de Brown-Gersten pour la topologie de Zariski et la propriété de Brown-Gersten affine pour la topologie de Nisnevich ce qui permet de conclure.

Remarque 3.5.10. — Soient $Y \in \mathsf{Sm}/X$ et $\mathscr{U} := \{U_i \hookrightarrow Y\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de Y. Soit U la réunion disjointe des U_i. Considérons l'objet simplicial de Čech $\check{\mathrm{C}}(\mathscr{U}) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{SmAff}/X$ de sorte que, pour tout $n \in \Delta$, $\check{\mathrm{C}}(\mathscr{U})_n$ soit le produit fibré sur X de n copies de U:

$$\check{\mathrm{C}}(\mathscr{U})_n = U \times_X \cdots \times_X U.$$

On peut alors montrer par récurrence sur le nombre d'ouverts dans $\mathscr{U}$ (voir par exemple [Wei89, Theorem 6.3]) que le morphisme canonique

$$\mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y, \mathscr{U}) := \operatorname*{hocolim}_{\Delta} \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(\check{\mathrm{C}}(\mathscr{U})) \to \mathsf{r}_X^{\mathscr{M}}(Y)$$

est une équivalence faible.

3.5.4 Fin de la construction

La construction doit encore être stabilisée. Nous passerons ce point technique sous silence en renvoyant à [Ivo14c] pour les détails. On obtient alors une adjonction de Quillen

$$\mathsf{Sp}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})) \leftrightarrows \mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathsf{Ch}(\mathbb{Q})).$$

En prenant les foncteurs dérivés de Quillen, on obtient une adjonction au niveau des catégories homotopiques

$$\mathsf{RL}_X^{\mathscr{M}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}) \rightleftarrows \mathbf{D}(\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathbb{Q})) : \mathsf{RR}_X^{\mathscr{M}}.$$

Rappelons que la catégorie $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X, \mathbb{Q})$ des motifs constructibles est définie comme la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(X, \mathbb{Q})$ stable par facteur direct et contenant les motifs homologiques des X-schémas quasi-projectifs affines lisses (en utilisant Mayer-Vietoris). Puisque par construction, pour tout X-schéma quasi-projectif affine lisse Y, l'image par le foncteur de réalisation appartient à la sous-catégorie triangulée pleine $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X))$ de $\mathbf{D}(\mathbf{Sha}(\mathscr{M}(X), \mathbb{Q}))$, le foncteur $\mathsf{RL}_X^{\mathscr{M}}$ se restreint en un foncteur triangulé

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathsf{ct}}(X, \mathbb{Q}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{M}(X)).$$

4

Motifs proches, fibres de Milnor et géométrie rigide

Dans [IS13, AIS13] nous nous sommes intéressés à la théorie des cycles proches motiviques développée par J. Ayoub dans [Ayo07b] et ses relations tant avec les travaux de J. Denef et F. Loeser qu'avec la géométrie rigide.

On suppose que k est un corps de caractéristique zéro, on note $R = k[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t et K sont corps des fractions.

4.1 Motifs proches et géométrie rigide : le cas des fibres génériques

4.1.1 Motifs rigides des fibres génériques et motifs proches

L'un des résultats principaux de [AIS13] permet de relier les cycles proches associés à un R-schéma séparé de type fini X à la fibre générique de son complété formel $\mathscr{X}$. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant qui constitue le premier pas vers un énoncé plus général (voir le théorème 4.4.1) :

Théorème 4.1.1. — *Soit $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ un R-schéma séparé de type fini. On suppose que la fibre générique X_η est lisse sur K. Soient M un objet de la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$ et $\mathscr{X}$ le complété t-adique de X. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathscr{X}_\eta), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq (f_\sigma)_* \Psi_f f_\eta^*(M). \tag{28}$$

En prenant M égal à l'objet unité de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$, on obtient en particulier un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^\vee_{rig}(\mathscr{X}_\eta)) \simeq (f_\sigma)_* \Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}).$$

Ce résultat prouve que le motif cohomologique $\mathrm{M}^\vee_{rig}(\mathscr{X}_\eta)$ de la fibre générique $\mathscr{X}_\eta$ du complété t-adique de X détermine complètement le motif proche (au tout au moins pour être précis son image directe dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$). Ceci montre que le motif proche est de nature analytique rigide.

Dans [AIS13] nous déduisons le théorème 4.1.1 par un argument de type Mayer-Vietoris à partir du cas affinoïde. Dans la suite nous fixons une K-algèbre affinoïde lisse A. Le résultat crucial se trouve être le suivant.

Théorème 4.1.2. — *Soit M un objet de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq (f_\sigma)_* \Psi_f f_\eta^*(M). \tag{29}$$

Notons toutefois que la réduction au cas affinoïde nécessite de recourir à une petite contorsion technique. En effet l'isomorphisme construit dans la preuve du théorème 4.1.2 n'est pas clairement fonctoriel par rapport à la K-algèbre affinoïde A. Pour pouvoir se ramener au cas affinoïde, nous devons donc considérer plutôt une variante fonctorielle de ce théorème dans laquelle on considère des diagrammes $(\mathsf{Spm}(\mathcal{A}), \mathcal{I})$ de K-affinoïdes lisses plutôt qu'un seul K-affinoïde lisse. Les détails techniques étant essentiellement les mêmes fort heureusement, nous ignorerons ce point dans la suite.

4.1.2 Specialisation triviale et K-affinoïdes lisses

Rappelons que les cycles proches motiviques sont définis à partir du « revêtement universel motivique »

$$(\theta^{\mathscr{R}}, p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times}) : (\mathscr{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \to \mathbb{G}_{m,k}$$

et du système de spécialisation trivial $\chi_f = i^* j_*$ en utilisant la technique de construction exposée dans [Ayo07b, §3.2].

Pour démontrer le théorème 4.1.2, la première étape consiste donc à établir la variante dans laquelle le foncteur cycles proches Ψ_f est remplacé par le système de spécialisation $\chi_f = i^* j_*$:

Théorème 4.1.3. — *Soit M un objet de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$q_* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq (f_\sigma)_* \chi_f f_\eta^*(M).$$

À un X un k-schéma séparé de type fini, on peut associer la fibre générique $Q^{rig}(X)$ de la complétion t-adique du R-schéma $X \otimes_k R$. Cette construction donne un foncteur

$$Q^{rig} : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{SmRig}/K$$

qui est continu pour la topologie de Nisnevich. (Comme dans [Ayo09], SmRig/K est la catégorie des K-variétés analytiques rigides lisses.)

Le foncteur Q^{rig} induit alors une adjonction

$$(Q^{rig})^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \rightleftarrows \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K) : Q^{rig}_*.$$

Le foncteur $(Q^{rig})^*$ envoie le motif homologique d'un k-schéma lisse de type fini X sur le motif homologique de la K-variété analytique rigide $Q^{rig}(X)$.

Le résultat suivant est une variante de [Ayo12, Théorème 2.24]. La preuve en est plus simple.

Lemme 4.1.4. — *Il existe un isomorphisme canonique de foncteurs de* $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$ *dans* $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$

$$q_* \circ \mathfrak{R} \simeq Q^{rig}_*.$$

Démonstration. — En utilisant la définition du foncteur $\mathfrak{R}$ comme quasi-inverse de l'équivalence $\mathfrak{F}$ du théorème 2.2.3, il suffit de construire un isomorphisme de foncteurs

$$(Q^{rig})^* \simeq \mathfrak{F} \circ q^*.$$

Mais $\mathfrak{F} \circ q^*$ n'est rien d'autre que le foncteur

$$(Q^{an})^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \to \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$$

induit par le foncteur $Q^{an} : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{SmRig}/K$ qui envoie un k-schéma lisse de type fini X sur la K-variété analytique rigide $(X \otimes_k K)^{an}$. Il suffit alors de remarquer que la transformation naturelle $Q^{rig} \to Q^{an}$ induit un isomorphisme de foncteurs $(Q^{rig})^* \to (Q^{an})^*$ d'après [Ayo09, Théorème 1.3.11]. □

Le théorème 4.1.3 est donc une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 4.1.5. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$Q^{rig}_* \underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M)) \simeq (f_\sigma)_* \chi_f f^*_\eta(M).$$

La preuve de cette proposition utilise des idées et des techniques similaires à celles introduites par J. Ayoub dans [Ayo09, §1.3.4] pour prouver le théorème 2.2.3 (c.f. [Ayo09, Scholie 1.3.26]). Nous renvoyons à [AIS13, §4.2] pour les détails.

4.1.3 Esquisse de preuve dans le cas affinoïde

Expliquons maintenant brièvement pourquoi le théorème 4.1.3 implique le théorème 4.1.2. Pour cela rappelons que le foncteur cycles proches motivique est donné par la formule

$$\Psi_f(-) = (p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times})_\sharp \circ \chi_{f,p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times}} \circ (\theta^{\mathscr{R}}_f)_* \circ (\theta^{\mathscr{R}}_f)^* \circ (p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times})^*(-)$$

dans laquelle $(\theta^{\mathscr{R}}_f, p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times}) : (\mathscr{R}_f, p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times}) \to \mathsf{Spec}(A)$ est le morphisme de diagrammes obtenu à partir du « revêtement universel motivique »

$$(\theta^{\mathscr{R}}, p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times}) : (\mathscr{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \to \mathbb{G}_{m,k}$$

par changement de base le long du morphisme $\mathsf{Spec}(A) \to \mathbb{G}_{m,k}$ donné par la composition des morphismes $f_\eta : \mathsf{Spec}(A) \to \mathsf{Spec}(K)$ et $t : \mathsf{Spec}(K) \to \mathbb{G}_{m,k}$. Un cacul montre alors que

$$\Psi_f f^*_\eta(-) \simeq \chi_f \circ f^*_\eta((-) \otimes t^*\mathcal{U})$$

où $\mathcal{U} = (p_{\Delta\times\mathbb{N}^\times})_\sharp(\theta^{\mathscr{R}})_*\mathbb{1}_{(\mathscr{R},\Delta\times\mathbb{N}^\times)}$. Le théorème 4.1.3 fournit donc un isomorphisme

$$(f_\sigma)_*\Psi_f f_\eta^* M \simeq q_* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M\otimes t^*\mathcal{U})).$$

Il suffit donc de prouver que

$$q_*\circ\mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M\otimes t^*\mathcal{U}))) \simeq 1^*\circ\mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))).$$

D'après [Ayo09, Proposition 1.2.34], $\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A))$ est un objet compact de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$, donc fortement dualisable par le lemme 2.2.2. Puisque Rig^* est monoïdal, on obtient un isomorphisme

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M\otimes t^*\mathcal{U})) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))\otimes \mathrm{Rig}^*t^*\mathcal{U}.$$

Maintenant, $\mathcal{U}$ étant un objet de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k)$, on peut écrire $\mathrm{Rig}^*t^*\mathcal{U} = \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ de sorte qu'il nous suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} q_*\circ\mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))\otimes\mathfrak{F}(\mathcal{U}))& \\ \simeq 1^*\circ\mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathsf{Spm}(A)), \mathrm{Rig}^*(M))).& \end{aligned}$$

Or $\mathfrak{R}$ étant une équivalence de catégories monoïdale, on a une formule de projection :

$$\mathfrak{R}((-)\otimes\mathfrak{F}(\mathcal{U})) \simeq \mathfrak{R}(-)\otimes\mathcal{U}.$$

Finalement il suffit juste de construire un isomorphisme

$$q_*(-\otimes\mathcal{U}) \simeq 1^*(-)$$

de foncteurs de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$ ce qui est essentiellement fait dans [Ayo09, (1.112)].

4.2 Calcul des motifs de tubes dans le cas semi-stable

4.2.1 Schémas formels semi-stables

Précisons avant toute chose la notion de semi-stabilité que nous utilisons dans la suite :

Définition 4.2.1. — Un R-schéma formel topologiquement de type fini $\mathscr{X}$ est dit *semi-stable* si il est plat sur R et satisfait les conditions suviantes. Pour tout $x\in\mathscr{X}_\sigma$, il existe un sous-schéma formel ouvert régulier $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{X}$ contenant x et des éléments $u, t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{O}(\mathscr{U})$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. u est inversible et il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $t = ut_1^{a_1}\cdots t_n^{a_n}$;
2. pour tout sous-ensemble non vide $I\subset\{1,\ldots,n\}$, le sous-schéma fermé $D_I\subseteq\mathscr{U}_\sigma$ défini par les équations $t_i = 0$, for $i\in I$, est lisse sur k, de codimension $\#(I)-1$ dans $\mathscr{U}_\sigma$ et contient x.

On dit qu'un R-schéma formel semi-stable est *strictement semi-stable*, si sa fibre spéciale est un k-schéma réduit (i.e., les entiers a_i sont tous égaux à 1).

Remarque 4.2.2. — On remarquera que la notion de semi-stabilité que nous utilisons diffère de la définition classique. Classiquement, un R-schéma formel semi-stable est localement pour la topologie étale strictement semi-stable au sens de la définition 4.2.1.

Soit $\mathscr{X}$ un R-schéma formel. On se donne un n-uplet d'entiers $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^\times)^n$, et une fonction $v \in \mathscr{O}(\mathscr{X})$. Le R-schéma formel standard associé au triplet $(\mathscr{X}, v, \underline{a})$ est le spectre formel

$$\mathrm{St}^v_{\mathscr{X},\underline{a}} = \mathsf{Spf}\ \mathscr{O}_{\mathscr{X}}\{T_1, \ldots, T_n\}/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - v).$$

Lorsque $\mathscr{X}$ est topologiquement de type fini et $v \in t\mathscr{O}(\mathscr{X})^\times$, le schéma formel standard $\mathrm{St}^v_{\mathscr{X},\underline{a}}$ est semi-stable. Les R-schémas formels semi-stables quelconques sont reliés, localement pour la topologie de Zariski, aux R-schémas formels standard (voir [Ayo09, Proposition 1.1.60]).

4.2.2 Calcul du motif rigide d'un tube dans le cas semi-stable

Soit $\mathscr{X}$ un R-schéma formel semi-stable. Notons $(D_i)_{i\in I}$ les composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathscr{X}_\sigma$. Si $J \subseteq I$ est un sous-ensemble, on note D_J et $D(J)$ les sous-schémas fermés réduits de $\mathscr{X}_\sigma$ donnés par

$$D_J = \cap_{i\in J} D_i \qquad \text{et} \qquad D(J) = \cup_{i\in J} D_i$$

avec pour convention $D_\emptyset = (\mathscr{X}_\sigma)_{\mathrm{red}}$ et $D(\emptyset) = \emptyset$.

Soit Z un fermé contenu dans $D(J)$. Pour $I' \subseteq I \setminus J$, on pose

$$Z^\circ_{I'} = Z \setminus D(I').$$

Si $I' = I \setminus J$, on utilise la notation Z° pour désigner $Z^\circ_{I\setminus J}$.

Théorème 4.2.3. — *On suppose que Z est une union de fermés de la forme $D_{J'}$, pour des sous-ensembles $\emptyset \neq J' \subseteq J$. Alors, pour tout $I' \subseteq I'' \subseteq I \setminus J$, l'inclusion $]Z^\circ_{I''}[\hookrightarrow]Z^\circ_{I'}[$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{M}_{rig}(]Z^\circ_{I''}[) \simeq \mathrm{M}_{rig}(]Z^\circ_{I'}[)$$

dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

Le corollaire suivant présente l'un des cas particuliers les plus intéressants du théorème précédent.

Corollaire 4.2.4. — *L'inclusion $]D(J)^\circ[\hookrightarrow]D(J)[$ induit un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$:*

$$\mathrm{M}_{rig}(]D(J)^\circ[) \simeq \mathrm{M}_{rig}(]D(J)[).$$

4.2.3 Compacité des motifs rigides de tubes

Le calcul des motifs rigides de tubes de la section précédente permet de prouver que ces derniers sont des objets compacts de la catégorie homotopique stable $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Dans [Ayo09] J. Ayoub a montré que les motifs des K-variétés analytiques rigides *quasi-compactes* lisses sont compacts dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$, cependant les tubes $]Z[$ ne sont pas en général quasi-compacts.

Rappelons que si Z est un ouvert de X_σ alors $]Z[$ est un ouvert quasi-compact de $\mathscr{X}_\eta$ (il est lui même la fibre générique d'un schéma formel). En revanche lorsque Z est fermé dans X_σ, alors le tube n'est plus en général quasi-compact. Par exemple, si $\mathscr{X} = \mathsf{Spf}(R\{T\})$ est la droite affine formelle, le tube de l'origine est la boule unité ouverte, non quasi-compacte, à l'intérieur de la boule de Tate (voir e.g. [Ber, (1.1.4 Remarques)]).

Proposition 4.2.5. — *Soit $\mathscr{X}$ un R-schéma formel topologiquement de type fini et $Z \subset \mathscr{X}_\sigma$ un sous-ensemble localement fermé. On suppose $\mathscr{X}_\eta$ lisse sur K. Alors, le motif rigide $\mathrm{M}_{rig}(]Z[)$ est un objet compact de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.*

Par résolution des singularités, on peut en effet supposer (voir [AIS13]) que le R-schéma formel $\mathscr{X}$ est semi-stable et que Z est une réunion de composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathscr{X}_\sigma$. Si $(D_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre spéciale, le sous-schéma Z est alors de la forme $D(J)$ pour un certain sous-ensemble J de I. Le corollaire 4.2.4 assure que l'inclusion induit un isomorphisme

$$\mathrm{M}_{rig}(]D(J)^\circ[) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{rig}(]D(J)[)$$

dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Comme $D(J)^\circ$ est ouvert, son tube est quasi-compact et son motif rigide est donc un objet compact de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

4.2.4 Esquisse de la réduction aux schémas formels standard

En utilisant une récurrence et la propriété de Mayer-Vietoris, on commence par se ramener au cas où Z est une intersection de composantes irréductibles. Ensuite en éclatant cette intersection, on se ramène au cas où Z est une composante irréductible de la fibre spéciale. Plus précisément, on obtient la réduction suivante :

Lemme 4.2.6. — *Pour vérifier le théorème 4.2.3, il suffit de vérifier, que pour $i \in I$ et $j \in I \setminus \{i\}$, le morphisme*

$$\mathrm{M}_{rig}(]D_i \setminus D_j[) \to \mathrm{M}_{rig}(]D_i[)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

En utilisant à nouveau une récurrence et la propriété de Mayer-Vietoris, on parvient à la réduction suivante :

Lemme 4.2.7. — *Pour prouver le théorème 4.2.3, il suffit de montrer que pour $i \in I$ le morphisme*

$$\mathrm{M}_{rig}(]D_i \setminus D_I[) \to \mathrm{M}_{rig}(]D_i[) \tag{30}$$

est un isomorphisme $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

La raison pour laquelle on passe du lemme 4.2.6 au lemme 4.2.7 mérite quelques explications. Le point est le suivant. En utilisant essentiellement un résultat de [Ayo09] et la propriété de Mayer-Vietoris, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale de R-schéma formels

$$e : \mathscr{X} \to \mathrm{St}^{Ut}_{\mathsf{Spf}(R\{U,U^{-1}\}),\underline{a}}\{S_1, \ldots, S_r\},$$

avec $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^\times)^n$ et $U, S_1, \ldots, S_r$ des variables libres. Il s'agit alors de montrer que si l'on sait prouver le résultat pour le schéma standard semi-stable, on peut le déduire pour $\mathscr{X}$ via le morphisme étale. Pour cela nous utilisons la réduction sous la forme du lemme 4.2.7 plutôt que sous celle du lemme 4.2.6 ainsi qu'un résultat d'invariance par les morphismes étales [AIS13, Lemma 5.6] que nous n'exposerons pas ici. Ce travail étant réalisé, l'on obtient la réduction au cas des schémas formels standard sous la forme suivante :

Lemme 4.2.8. — *Pour prouver le théorème 4.2.3, on peut supposer $\mathscr{X} = \mathrm{St}^v_{\mathscr{Y},\underline{a}}$ où $\mathscr{Y}$ est un R-schéma formel lisse, $v \in t\mathscr{O}(\mathscr{Y})^\times$ et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^\times)^n$. De plus, il suffit alors de montrer que le morphisme*

$$\mathrm{M}_{rig}(]D_1 \setminus D_I[) \to \mathrm{M}_{rig}(]D_1[)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

4.2.5 Le cas des schémas formels standard

Par récurrence, en utilisant la propriété de Mayer-Vietoris, on peut ramener la preuve du lemme 4.2.8 à la proposition suivante :

Proposition 4.2.9. — *Soit $\mathscr{Y}$ un R-schéma formel topologiquement de type fini dont la fibre générique $\mathscr{Y}_\eta$ est lisse. Soit $v \in \sqrt{t\mathscr{O}(\mathscr{Y})}$ divisant une puissance de t. Soient $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^\times)^n$ et $\mathscr{X} = \mathrm{St}^v_{\mathscr{Y},\underline{a}}$ le schéma formel standard associé. Alors, le morphisme canonique*

$$\mathrm{M}_{rig}(]D_1^\circ[) \to \mathrm{M}_{rig}(]D_1[)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$.

On remarquera que l'énoncé de la proposition est un peu plus général que le cas dont nous avons réellement besoin, à savoir $\mathscr{Y}$ lisse sur R et $v \in t\mathscr{O}(\mathscr{Y})^\times$. L'énoncé plus général offre cependant une plus grande flexibilité dont nous tirons profit dans la preuve.

La condition sur v assure que la fibre générique $\mathscr{X}_\eta$ est une K-variété analytique rigide lisse. L'on peut supposer $D = D_1$, i.e., que D est la branche de $\mathscr{X}_\sigma$ d'équation $T_1 = 0$. Pour prouver la proposition 4.2.9 on commence par considérer le cas $n \geqslant 2$ du schéma standard à deux branches (pour $n \geqslant 1$ il n'y a rien à prouver). On se trouve ramené dans ce cas à comparer les motifs rigides de certaines couronnes analytiques et donc au résultat de J. Ayoub dans [Ayo09, Proposition 1.3.4].

L'étape suivante consiste à considérer le cas des schémas standard

$$\mathscr{X} = \mathrm{St}^v_{\mathscr{Y},(a_1,\underline{d}_{n-1})} = \mathsf{Spf}\,\frac{\mathscr{O}_{\mathscr{Y}}\{T_1,\dots,T_n\}}{(T_1^{a_1}T_2^d\cdots T_n^d - v)}$$

ayant un nombre quelconque n de branches mais ayant la particularité que toutes les branches sauf D_1 sont de même multiplicité $d \in \mathbb{N}$. Ce cas est traité par récurrence sur n en utilisant des éclatements admissibles ne modifiant que le nombre de branches et pas leurs multiplicités.

Le cas restant à examiner est celui des schémas standard

$$\mathscr{X} = \mathrm{St}^v_{\mathscr{Y},\underline{a}} = \mathsf{Spf}\,\frac{\mathscr{O}_{\mathscr{Y}}\{T_1,\dots,T_n\}}{(T_1^{a_1}T_2^{a_2}\cdots T_n^{a_n} - v)}$$

pour lesquels le $n-1$-uplet $(a_2,\dots,a_n)$ n'est pas constant. L'on raisonne alors par récurrence sur $\underline{a}$, l'idée étant encore d'utiliser des éclatements admissibles mais cette fois pour augmenter les multiplicités des branches. Pour cela, il est essentiel de pouvoir choisir des entiers $i, j \in \{2,\dots,n\}$ tels que $a_i \neq a_j$.

4.3 Le calcul des cycles proches dans le cas semi-stable

4.3.1 Schémas semi-stables

La notion de schémas semi-stables que nous utilisons est calquée sur celle de schéma formel semi-stable (voir définition 4.2.1) :

Définition 4.3.1. — Un R-schéma de type fini X est dit *semi-stable* si il est plat sur R et satisfait les conditions suviantes. Pour tout $x \in X_\sigma$, il existe un sous-schéma ouvert régulier $U \subseteq X$ contenant x et des éléments $u, t_1, \dots, t_n \in \mathscr{O}(U)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. u est inversible et il existe des entiers $a_1,\dots,a_n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ tels que $t = ut_1^{a_1}\cdots t_n^{a_n}$;
2. pour tout sous-ensemble non vide $I \subset \{1,\dots,n\}$, le sous-schéma fermé $D_I \subset U_\sigma$ défini par les équations $t_i = 0$, for $i \in I$, est lisse sur k, de codimension $\#(I)-1$ dans U_σ et contient x.

Si X est un R-schéma semi-stable, alors son complété t-adique $\mathscr{X}$ est un R-schéma formel semi-stable au sens de la définition 4.2.1. Comme dans le cas des schémas formels, on peut introduire les R-schémas standard.

Soit X un R-schéma. On se donne un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^\times)^n$, et une fonction $v \in \mathscr{O}(X)$. Le schéma standard associé au triplet $(X, v, \underline{a})$ est le spectre

$$\mathrm{St}^v_{X,\underline{a}} = \mathsf{Spec}\, \mathscr{O}_X[T_1, \dots, T_n]/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - v).$$

Si X est un R-schéma de type fini de complété t-adique $\mathscr{X}$, alors le complété t-adique de $\mathrm{St}^v_{X,\underline{a}}$ est le R-schéma formel standard $\mathrm{St}^v_{\mathscr{X},\underline{a}}$.

Lorsque X est lisse sur R de type fini et $v \in t\mathscr{O}(X)^\times$ alors le R-schéma standard $\mathrm{St}^v_{X,\underline{a}}$ est semi-stable.

4.3.2 Rappels sur les résultats obtenus par J. Ayoub dans [Ayo07b]

L'un des résultats principaux sur les cycles proches obtenu par J. Ayoub dans [Ayo07b] concerne le calcul des cycles proches pour les schémas standard.

Ce théorème, [Ayo07b, Théorème 3.3.10], présente deux limitations : d'une part il ne traite que le calcul de la restriction des cycles proches à une réunion de branches et d'autre part il suppose que les multiplicités de toutes les branches sont les mêmes. La première restriction est gênante notamment si l'on cherche à calculer les cycles proches par restriction aux branches via un calcul du type Mayer-Vietoris pour un recouvrement fermé. Dans un tel calcul, on se trouve en effet contraint de considérer des réunions d'intersections de branches. La seconde restriction ne permet pas de comprendre les cycles proches dans le cas général en se ramenant au cas semi-stable : une telle réduction nécessite impérativement que l'on puisse traiter le cas des multiplicités non constantes.

Lorsque l'on considère les motifs étales à coefficients rationnels, J. Ayoub a montré dans [Ayo07b, Théorème 3.3.44] comment traiter le cas des multiplicités quelconques dans le calcul de la restriction des cycles proches à une branche. Les hypothèses utilisées dans [Ayo07b] ne permettent cependant pas d'obtenir le résultat similaire dans la catégorie homotopique stable des schémas.

4.3.3 Généralisation

Soit X un R-schéma semi-stable. On note $(D_i)_{i\in I}$ les composantes irréductibles de X_σ et l'on utilise dans la suite des notations analogues à celles du §4.2.2.

Pour $J \subseteq I$ et $I' \subseteq I \setminus J$, on pose, on note $v_{Z,I'} : Z^\circ_{I'} \hookrightarrow Z$ l'inclusion évidente. Lorsque $I' = I \setminus J$, on écrira v_Z au lieu de $v_{Z,I\setminus J}$.

Théorème 4.3.2. — *On suppose que Z est une réunion de sous-schémas fermés de la forme $D_{J'}$, pour un certain $\emptyset \neq J' \subseteq J$. Soit M un objet de la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors, pour tout $I' \subseteq I \setminus J$, le morphisme canonique*

$$(\Psi_f f_\eta^*(M))|_Z \to (v_{Z,I'})_*(v_{Z,I'})^*(\Psi_f f_\eta^*(M))|_Z \tag{31}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Z)$.

Ce théorème généralise à la fois [Ayo07b, Théorème 3.3.10] et [Ayo07b, Théorème 3.3.44], permettant de traiter en théorie homotopique stable des schémas le calcul de la restriction des cycles proches à des réunions d'intersections de branches sans conditions sur les multiplicités. Il permet notamment de montrer que les résultats de [IS13] obtenus pour les motifs étales à coefficients rationnels demeurent vrais sans changement dans la catégorie homotopique stable des schémas (voir §4.5.2).

Corollaire 4.3.3. — *Soit M un objet de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors le morphisme canonique*

$$(\Psi_f f_\eta^*(M))|_{D(J)} \to (v_{D(J)})_*(v_{D(J)})^*(\Psi_f f_\eta^*(M))|_{D(J)}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(D(J))$.

4.3.4 Esquisse de preuve

La preuve du théorème 4.3.2 suit un dévissage analogue à celui de la preuve du théorème 4.2.3. En utilisant la propriété de Mayer-Vietoris ainsi que des éclatements comme dans [IS13], on peut se ramener dans un premier temps au cas où Z est une composante irréductible de la fibre spéciale. Plus précisément la première réduction est la suivante :

Lemme 4.3.4. — *Pour prouver le théorème 4.3.2, il suffit de montrer que, pour tout $i \in I$, le morphisme canonique*

$$(\Psi_f f_\eta^*(M))|_{D_i} \to (v_{D_i})_*(v_{D_i})^*(\Psi_f f_\eta^*(M))|_{D_i}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(D_i)$.

En utilisant les résultats de [Ayo07b] reliant schémas semi-stables et schémas standard, ainsi que la compatibilité des cycles proches aux morphismes lisses, on peut supposer ensuite que X est un schéma standard. On se ramène en fait à prouver la proposition suivante :

Proposition 4.3.5. — *Soient $\underline{a} \in (\mathbb{N}^\times)^n$ et X le R-schéma standard semi-stable*

$$X := \mathrm{St}^{Ut}_{R[U,U^{-1}],\underline{a}} = \mathsf{Spec}\,\frac{R[U,U^{-1},T_1,\ldots,T_n]}{(T_1^{a_1}\cdots T_n^{a_n} - Ut)}.$$

Alors, le morphisme canonique

$$\Psi_f(M|_{X_\eta})|_{D_1} \to (v_{D_1})_*(v_{D_1})^*\Psi_f(M|_{X_\eta})|_{D_1}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(D_1)$.

Grâce à une récurrence similaire à celle de la proposition 4.2.9 et utilisant les mêmes idées, on se ramène au cas du schéma standard à deux branches

$$\mathrm{St}^{Ut}_{R[U,U^{-1}],a_1,a_2} = \mathsf{Spec}\,\frac{R[U,U^{-1},T_1,T_2]}{(T_1^{a_1}T_2^{a_2} - Ut)}$$

avec $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^\times$. Pour traiter ce cas, on commence par montrer qu'il est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.3.6. — *Soit Y un R-schéma de type fini dont la fibre générique est lisse. Soient $v \in \sqrt{t\mathscr{O}(Y)}$ divisant une puissance de t et $X = \mathrm{St}^v_{Y,a_1,a_2}$ avec $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$. On note $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ et $q_1 : D_1^\circ \to \mathsf{Spec}(k)$ les morphismes structuraux. Alors, le morphisme canonique*

$$(f_\sigma)_* \Psi_f(M|_{X_\eta}) \to (q_1)_*(\Psi_f(M|_{X_\eta})|_{D_1^\circ})$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$.

La preuve de ce lemme final utilise alors la géométrie rigide. En notant $\mathscr{X}$ le complété t-adique de X et $\mathscr{U}$ le complété t-adique de $X \setminus D_2$, le théorème 4.1.1 permet en effet de se ramener à montrer que le morphisme

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathscr{X}_\eta), \mathrm{Rig}^*(M))) \to 1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(\mathscr{U}_\eta), \mathrm{Rig}^*(M))).$$

est un isomorphisme. Il nous suffit donc de vérifier que le morphisme de motifs rigides

$$\mathrm{M}_{rig}(\mathscr{U}_\eta) \to \mathrm{M}_{rig}(\mathscr{X}_\eta)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(K)$. L'on se retrouve ainsi finalement réduit à comparer les motifs rigides de deux couronnes analytiques particulières et [Ayo09, Proposition 1.3.4] permet de conclure.

4.4 Motifs proches et géométrie rigide : le cas des tubes

4.4.1 Motifs rigides des tubes et cycles proches

Le résultat principal de [AIS13] qui généralise le lien que nous avons précédemment établi entre cycles proches et fibres génériques de completés formels 4.1.1 s'énonce comme suit :

Théorème 4.4.1. — *Soit $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ un R-schéma séparé, de type fini, de fibre générique X_η lisse sur K. On note $\mathscr{X}$ la complétion t-adique de X. Soient $Z \subseteq X_\sigma$ un sous-ensemble localement fermé et $z : Z \hookrightarrow X_\sigma$ l'inclusion. Notons $]Z[$ le tube de Z dans $\mathscr{X}_\eta$. Soit M un objet de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$. Alors, il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(]Z[), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq (f_\sigma \circ z)_*(\Psi_f(M|_{X_\eta})|_Z).$$

Dans le cas particulier où M est l'objet unité de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.4.2. — *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^\vee_{rig}(]Z[)) \simeq (f_\sigma \circ z)_*(\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}))|_Z.$$

Ce résultat peut-être vu comme un analogue motivique d'un théorème de V. Berkovich reliant cycles proches étales, et cohomologie étale non-archimédienne des tubes. Rappelons rapidement ce résultat. Notons $\overline{K}$ le complété d'une clôture algébrique du corps valué K. Posons $\overline{Z} = Z \times_k \overline{k}$ et $\overline{]Z[} =]Z[\hat{\times}_K \overline{K}$. Dans [Ber94, Ber96], V. Berkovich a construit des isomorphismes canoniques de groupes d'hypercohomologie étale

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\overline{]Z[}, \mathbf{Q}_\ell) \simeq \mathbb{H}^i_{\text{ét}}(\overline{Z}, \mathsf{R}\Psi_{\hat{f}}(\mathbf{Q}_{\ell,\mathscr{X}_\eta})|_{\overline{Z}}) \simeq \mathbb{H}^i_{\text{ét}}(\overline{Z}, \mathsf{R}\Psi_f(\mathbf{Q}_{\ell,X_\eta})|_{\overline{Z}})$$

(ici le tube $]Z[$ est vu comme un espace de Berkovich de manière à pouvoir considérer sa cohomologie étale non archimédienne définie dans [Ber93]). Le premier isomorphisme est montré dans [Ber96, Corollary 3.5] ; le second est une conséquence de [Ber94, Corollary 5.3].

Notons que le théorème de V. Berkovich est valable dans un cadre plus général. Pour l'instant, nous ne sommes en mesure de formuler le théorème 4.4.1 qu'en égale caractéristique zéro. Ceci tient au fait que l'équivalence $\mathfrak{R}$ construite par J. Ayoub dans [Ayo09] n'est actuellement disponible que sous cette hypothèse.

4.4.2 Idée de la preuve du théorème principal

Esquissons la preuve du théorème 4.4.1. Le théorème 4.1.1 permet de supposer Z fermé dans X_σ. En utilisant le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka, la compatibilité des cycles proches aux morphismes projectifs, i.e., la propriété **(SPE2)** de [Ayo07b, Définition 3.1.1], et le théorème de changement de base projectif [Ayo07a, Corollaire 1.7.18], on peut supposer que X est un R-schéma semi-stable et Z une union de composantes irréductibles de X_σ.

Notons $(D_i)_{i\in I}$ les composantes irréductibles de X_σ. On a alors $Z = D(J)$ pour un certain sous-ensemble $J \subseteq I$ et le corollaire 4.2.4, assure a fortiori que le morphisme canonique

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(]D(J)[), \mathrm{Rig}^*(M))) \xrightarrow{\sim} 1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{rig}(]D(J)^\circ[), \mathrm{Rig}^*(M)))$$

est un isomorphisme. Le corollaire 4.3.3 fournit un isomorphisme analogue pour les cycles proches, de sorte que l'on peut supposer $Z = D(J)^\circ$. Ce dernier étant ouvert dans X_σ, on se trouve ramené de nouveau au théorème 4.1.1.

4.5 Fibre de Milnor motivique et cycles proches motiviques

Le contexte est le suivant : on se donne un corps k de caractéristique zéro, un schéma quasi-projectif lisse X et un morphisme de k-schémas $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. On a alors un diagramme commutatif de morphismes de k-schémas

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\sigma \arrow[l] \arrow[d, "f_\sigma"] \\ \eta := \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1_k & \sigma := \mathsf{Spec}(k), \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où i est la section nulle et j désigne l'immersion ouverte canonique.

4.5.1 Caractéristique d'Euler motivique

La comparaison suppose que l'on puisse déjà mettre en relation les deux groupes de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$ et $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X))$. Ceci n'est pas un problème puisque le formalisme des opérations de Grothendieck dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$ fournit un morphisme d'anneaux canonique (voir [IS13, Lemma 2.1])

$$\chi_{X_\sigma,\mathrm{c}} : \mathscr{M}_{X_\sigma} \to \mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma))$$

qui est uniquement déterminé par la formule

$$\chi_{X_\sigma,c}([Y]) = [\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}(Y)]$$

où Y est un X_σ-schéma quasi-projectif et $\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}(Y)$ est le motif cohomologique à support compact de Y. Rappelons que ce dernier est défini par $\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}(Y) := (p_Y)_!(p_Y)^*\mathbb{1}_S$ où $p_Y : Y \to X_\sigma$ est le morphisme structural.

Le lemme suivant est alors immédiat :

Lemme 4.5.1. — *Soit S un k-schéma quasi-projectif. Soit $p : Y \to X$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs, qui est une fibration triviale par morceaux de fibre un k-schéma F. Alors, on a l'égalité*

$$[\mathrm{M}_{S,\mathrm{c}}(Y)] = [\mathrm{M}_{S,\mathrm{c}}(X \times_k F)]$$

dans le groupe $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(S))$.

4.5.2 Motifs proches et cycles proches de Denef-Loeser

Rappelons que dans la situation de cycles proches précédente, J. Denef et F. Loeser ont construit un élément ψ_f dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{M}_{X_\sigma}$ de la fibre spéciale.

Le résultat principal de [IS13] est le suivant:

Théorème 4.5.2. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme de k-schémas. On a alors l'égalité*

$$[\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \chi_{X_\sigma,\mathrm{c}}(\psi_f)$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma))$.

L'on peut supposer sans perte de généralité que le morphisme $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ est plat. En effet si X est connexe et f n'est pas plat, alors le morphisme f est constant (voir e.g. [Liu02, Corollary **4**.3.10]). La formule du théorème 4.5.2 est alors triviale.

Remarque 4.5.3. — Lorsque le morphisme $f\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ est lisse, la formule du théorème 4.5.4 est également triviale. En effet, dans ce cas $\Psi_f \mathbb{1}_{X_\eta} \cong \mathbb{1}_{X_\sigma}$ dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathrm{ct}}(X)$.

Fixons une résolution plongée des singularités $h : X' \to X$ comme dans le §2.5.2 dont nous reprenons les notations. En utilisant la formule exprimant ψ_f en fonction de la résolution h donnée par le théorème 2.5.2 de J. Denef et F. Loeser, l'on voit qu'il suffit pour obtenir le théorème 4.5.2 de montrer la formule analogue suivante :

Théorème 4.5.4. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme plat de k-schémas. On a alors l'égalité*

$$[\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \left[\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,c}\left(\widetilde{D}^\circ_J \times_k \mathbb{G}^{|J|-1}_{m,k}\right)\right] \tag{32}$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathrm{ct}}(X_\sigma))$.

Dans [IS13] nous avons établi ce résultat pour les motifs étales à coefficients rationnels. Le théorème 4.3.2 obtenu dans [AIS13] permet de faire fonctionner la preuve également dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}$.

Notons en particulier, que le théorème 4.5.4 implique que l'expression des cycles proches obtenue ne dépend pas de la résolution plongée des singularités h. Ceci ne requiert ni fonction Zêta, ni résultats provenant de l'intégration motivique. Le théorème 4.5.4 implique également dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathrm{ct}}(X_\sigma))$ les résultats obtenus par F. Bittner dans $\mathscr{M}(X_\sigma)$ en utilisant la théorie de l'intégration motivique (voir [Bit05, §6,§7,§8]).

4.5.3 Esquisse de la preuve du théorème de comparaison

Puisque h est un morphisme projectif de $\mathbb{A}^1_k$-schémas qui induit un isomorphisme sur les fibres génériques, les morphismes canoniques

$$\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}) \to \Psi_f(h_{\eta_*}\mathbb{1}_{X'_\eta}) \to h_{\sigma *}\Psi_{f\circ h}(\mathbb{1}_{X'_\eta})$$

sont des isomorphismes. En appliquant la propriété de Mayer-Vietoris au recouvrement fermé de X_σ par ses composantes irréductibles, on obtient la formule

$$\left[\Psi_{f\circ h}(\mathbb{1}_{X'_\eta})\right] = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \left[u_{J*}u_J^*\Psi_{f\circ h}(\mathbb{1}_{X'_\eta})\right]$$

dans laquelle u_J désigne l'immersion fermée $D_J \hookrightarrow X'_\sigma$ et v_J l'immersion ouverte $D_J^\circ \hookrightarrow D_J$. Le point crucial est alors de montrer que pour $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, l'on a

$$[u_{J*}u_J^*\Psi_{f\circ h}\mathbb{1}_{X'_\eta}] = \left[\mathrm{M}^\vee_{X'_\sigma}(\widetilde{E(J)}^\circ)\right]$$

En utilisant des éclatements, on peut se ramener au cas de la codimension un, c'est-à-dire à prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left[u_{i*}u_i^*\Psi_{f\circ h}\left(\mathbb{1}_{X'_\eta}\right)\right] = \left[\mathrm{M}^\vee_{X'_\sigma}(\widetilde{D}_i^\circ)\right],$$

cas que l'on traite en utilisant le théorème 4.3.2 (voir [IS13, Proposition 4.4] pour les détails). Ceci étant fait, on obtient l'égalité

$$\left[\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})\right] = \left[h_{\sigma*}\Psi_{f\circ h}(\mathbb{1}_{X'_\eta})\right] = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|-1}\left[\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma}(\widetilde{E(J)}^\circ)\right]$$

dans le groupe $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(X_\sigma))$. Un argument de dualité que nous n'exposerons pas ici, permet de réécrire cette formule sous la forme

$$[\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|-1}\left[\mathrm{M}^\vee_{X_\sigma,\mathrm{c}}(\widetilde{E(J)}^\circ)\right].$$

Le lemme 4.5.1 conclut puisque l'on sait par [NS07, Lemma 7.5] que le morphisme de schémas

$$\widetilde{E(J)}^\circ \to \widetilde{D}_J^\circ$$

est une fibration triviale par morceaux de fibre $\mathbb{G}_{m,k}^{|J|-1}$.

4.5.4 Liens entre les différentes fibres de Milnor

Les théorèmes 4.5.2 et 4.4.1 permettent de relier entre elles les fibres de Milnor introduites de différentes manières. En effet, en utilisant le théorème de changement de base propre, le théorème 4.5.2 permet de comparer la fibre de Milnor motivique de J. Denef et F. Loeser avec le motif proche de J. Ayoub :

Théorème 4.5.5. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme plat de k-schémas. Soit $x \in X_\sigma(k)$ un point rationnel. On a alors l'égalité*

$$[x^*\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] = \chi_{k,\mathrm{c}}(\psi_{f,x}).$$

dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$

Rappelons que si $\mathscr{X}$ désigne le complété du R-schéma obtenu à partir de X par changement de base le long du morphisme canonique $\mathsf{Spec}(R) \to \mathbb{A}^1_k$, J. Nicaise et J. Sebag appellent fibre de Milnor analytique le tube $\mathscr{F}_x :=]x[$ dans $\mathscr{X}_\eta$. Leur terminologie est justifiée par les théorèmes de comparaison de V. Berkovich qui joints au théorème de comparaison de A. Grothendieck permettent de relier sur $\mathbb{C}$ la cohomologie étale de $\mathscr{F}_x$ et la cohomologie singulière de la fibre de Milnor classique. Le théorème 4.4.1 donne en particulier le résultat suivant :

Théorème 4.5.6. — *Il existe un isomorphisme canonique dans* $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$*:*

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^{\vee}_{rig}(\mathscr{F}_x)) \simeq x^*\Psi(\mathbb{1}_{X_\eta}).$$

La conjonction de ces deux résultats implique le corollaire

Corollaire 4.5.7. — *On a, dans* $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$*, l'égalité :*

$$[1^* \circ \mathfrak{R}(\mathrm{M}^{\vee}_{rig}(\mathscr{F}_x))] = \chi_{k,c}(\psi_{f,x}). \tag{33}$$

Ce corollaire montre que la fibre de Milnor introduite par J. Denef et F. Loeser ne dépend dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M},\mathsf{ct}}(k))$ que du motif de la fibre de Milnor analytique.

5

Foncteurs à réciprocité ; modules de cycles

Soit k un corps parfait. Dans [IR12], en collaboration avec K. Rülling nous introduisons les foncteurs à réciprocité, vus comme des foncteurs définis sur les extensions de type fini de k et les courbes régulières sur de telles extensions, et prolongeons les travaux initiaux de B. Kahn pour ces foncteurs en associant à une famille finie de foncteurs à réciprocité un « produit tensoriel », nouveau foncteur à réciprocité dont la valeur en k généralise les groupes de K-théorie introduits par M. Somekawa et les variantes de W. Raskind - M. Spiess et R. Akhtar. Les groupes algébriques commutatifs, les faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie, les modules de cycles ou les différentielles de Kähler fournissent des exemples particuliers de foncteurs à réciprocité et nous calculons les « produits tensoriels » associés à un certain nombre de ces exemples et faisons le lien avec les constructions antérieures.

Dans [Ivo14a] nous montrons que la théorie de l'intersection développée par M. Rost dans le cadre des modules de cycles [Ros96] admet un modèle à homotopie près. Nous montrons en effet que l'on peut construire sur le complexes des cycles de M. Rost une structure de A_∞-algèbre qui induit le produit d'intersection classique sur les groupes d'homologie.

5.1 Autour du théorème de Nesterenko-Suslin

5.1.1 Le théorème de Nesterenko-Suslin

Dans [Blo86] S. Bloch a complété la théorie des cycles algébriques en introduisant des groupes de Chow supérieurs. Rappelons leur définition. Soient X un k-schéma quasi-projectif et

$$\Delta_k^n := \mathsf{Spec}\left(k[t_0,\ldots,t_n]/\sum_{i=0}^{n} t_i - 1\right).$$

On note $z_r(X,n)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres W de $X \times_k \Delta^n_k$ de dimension $r+n$ tels que pour toute face[(1)] F de Δ^n_k

$$\dim\left(W \cap X \times_E F\right) \leqslant r + \dim(F).$$

En prenant la somme alternée des restrictions aux faces de codimension 1, on obtient un complexe $z_*(X,n)$ et on pose

$$\mathrm{CH}_r(X,n) = \mathrm{H}_r(z_*(X,n)).$$

Pour $n=0$ on retrouve les groupes de Chow habituels. Si X est équidimensionnel de dimension d sur k, on pose

$$\mathrm{CH}^r(X,n) = \mathrm{CH}_{d-r}(X,n).$$

Pour $r = d+n$, le groupe $\mathrm{CH}^{d+n}(X,n) = \mathrm{CH}_{-n}(X,n)$ est obtenu à partir de zéro cycles sur le schéma $X \times_k \Delta^n_k$ et peut donc être considéré comme un groupe de zéro cycles.

Dans [NS89] Y. Nesterenko et A. Suslin montrent que le groupe de zéro cycles $\mathrm{CH}^n(k,n)$ est isomorphe au groupe de K-théorie de Milnor $\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k)$:

***Théorème 5.1.1* (Y. Nesterenko - A. Suslin).** — *Soit k un corps. On a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k) \simeq \mathrm{CH}^n(k,n)$$

Ce théorème fournit en particulier une description explicite par générateurs et relations du groupe de zéro cycles $\mathrm{CH}^n(k,n)$. En effet le groupe $\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k)$ introduit par J. Milnor dans [Mil70] et étudié dans [BT73] (voir également [GS06] pour un exposé des principales propriétés) se trouve défini par générateurs et relations de la manière suivante

$$\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_0(k) := \mathbb{Z} \qquad \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_1(k) = k^\times \qquad \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k) = (k^\times)^{\otimes n}/\mathrm{St}_n(k)$$

où $\mathrm{St}_n(k)$ est le sous-groupe engendré par les éléments $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ tels qu'il existe $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $a_i + a_j = 1$.

Lorsque E/k est une extension, on dispose d'un morphisme $\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k) \to \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(E)$ et si l'extension est finie également d'un morphisme

$$\mathrm{N}_{E/k} : \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(E) \to \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(k)$$

qui étend la norme pour $n=1$. De plus si C est une k-courbe projective régulière connexe de corps des fonctions K, alors à tout point fermé $P \in C$, on peut associer un morphisme appelé résidu :

$$\partial_P : \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n(K) \to \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_{n-1}(\kappa(P)) \qquad n \geqslant 1.$$

Ses différents morphismes vérifient des relations de compatibilité (que M. Rost a axiomatisé dans sa définition des modules de cycles [Ros96]) et l'on dispose d'un théorème des résidus que l'on peut énoncer de la manière suivante : si C est une

(1) Une face est définie par l'annulation d'un certain nombre de t_i.

k-courbe projective régulière connexe de corps des fonctions K, alors pour tout $a \in \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(K)$, avec $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{P \in \mathscr{C}} \mathrm{N}_{\kappa(P)/k}(\partial_P(a)) = 0.$$

Les résidus permettent de définir des symboles locaux, en posant

$$(a, f)_P = \partial_P(\{f\} \cdot a) \qquad a \in \mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(K), \quad f \in K^\times$$

et le théorème des résidus donne la loi de réciprocité

$$\sum_{P \in C} \mathrm{N}_{\kappa(P)/k}((a, f)_P) = 0.$$

5.1.2 Les groupes de Somekawa

Dans [Som90], M. Somekawa, inspiré par des idées de K. Kato, a généralisé la K-théorie de Milnor en utilisant la théorie du corps de classes de M. Rosenlicht et J.-P. Serre. Rappelons que dans [Ros57, Ser84], si k est un corps algébriquement clos et G un k-groupe algébrique commutatif lisse connexe, en tout point fermé P d'une k-courbe projective régulière C de corps des fonctions K est défini un symbole local :

$$(-,-)_P : G(K) \times K^\times \to G(k)$$

qui est une application bilinéaire (continue). Les symboles de M. Rosenlicht et J.-P. Serre vérifient une loi de réciprocité sur la courbe

$$\sum_{P \in C} (a, f)_P = 0 \qquad a \in G(K), \quad f \in K^\times.$$

Lorsque k n'est plus algébriquement clos et G est une variété semi-abélienne sur k, M. Somekawa vérifie que le symbole local se factorise par le corps résiduel en P i.e. définit une application bilinéaire

$$(-,-)_P : G(K) \times K^\times \to G(\kappa(P))$$

et propose d'associer, à une famille de $G_1, \dots, G_n$ de k-variétés semi-abéliennes, un groupe $\mathrm{K}(k; G_1, \dots, G_n)$ sur le principe des groupes de Milnor mais en remplaçant les relations de Steinberg par des relations provenant des symboles locaux et que l'on peut voir comme des relations de réciprocité.

Formellement le groupe de M. Somekawa est défini par le quotient

$$\mathrm{K}(k; G_1, \dots, G_n) := \left[\bigoplus_{E/k \text{ finie}} G_1(E) \otimes \cdots \otimes G_n(E) \right] / \mathrm{Som}(k)$$

où $\mathrm{Som}(k)$ est le sous-groupe engendré par des relations du type formule de projections et les éléments de la forme

$$\sum_{P \in C} s_P(a_1) \otimes \cdots \otimes s_P(a_{i_P - 1}) \otimes (a_{i_P}, f)_P \otimes s_P(a_{i_P+1}) \otimes \cdots \otimes s_P(a_n)$$

où C est une k-courbe projective régulière connexe sur k, $f \in K^\times$ et $a_i \in G_i(K)$ sont tels que pour tout $P \in \mathscr{C}$ il existe $i_P \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_i \in G_i(\mathscr{O}_{C,P})$ si $i \neq i_P$.

Il montre que l'on peut retrouver la K-théorie de Milnor ainsi :

Théorème 5.1.2 **(M. Somekawa).** — *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}_n^{\mathrm{M}}(k) \simeq \mathrm{K}(k; \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})$$

Les générateurs étant essentiellement les mêmes (modulo l'utilisation de la norme), tout le sel du théorème réside dans les relations et la vérification du fait que les relations de Steinberg peuvent se déduire des relations provenant des symboles locaux et vice versa.

5.1.3 Généralisation et lien avec la théorie des motifs

Dans [RS00, Akh04] des variantes de la construction de [Som90] ont été considérées. Elles consistent essentiellement à ajouter dans la machine de M. Somekawa les groupes de zéros cycles des k-variétés lisses sous la forme des foncteurs définis sur les extensions de type fini E/k de k

$$E/k \mapsto \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X)(E) := \mathrm{CH}_0(X_E)$$

Ainsi si $G_1, \ldots, G_n$ sont des k-variétés semi-abéliennes et $X_1, \ldots, X_r$ des k-variétés projectives lisses et équidimensionnelles, on peut définir un groupe

$$\mathrm{K}(k; \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_1), \ldots, \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_r), G_1, \ldots, G_n)$$

et dans [RS00, Akh04] la généralisation suivante du théorème 5.1.1 est prouvée :

Théorème 5.1.3 **(M. Spieß-W. Raskind, R. Akhtar).** — *Soient k un corps et $X_1, \ldots, X_r$ des k-variétés projectives lisses et équidimensionnelles. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}(k; \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_1), \ldots, \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_r), \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}}) \simeq \mathrm{CH}^{d+n}(X, n)$$

où $X := X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ et d est la dimension de X.

Lorsque $n = 0$ ce résultat est dû à M. Spiess et W. Raskind dans [RS00] et la version plus générale est un théorème prouvé par R. Akhtar dans [Akh04]. En supposant k parfait, B. Kahn et T. Yamazaki ont montré dans [KY13] que ses isomorphismes pouvaient s'interpréter motiviquement. Plus précisément, si $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ sont des faisceaux Nisnevich avec transferts sur k invariants par homotopie, ils définissent un groupe

$$\mathrm{K}(k, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n)$$

par générateurs et relations et montrent le théorème suivant qui permet grâce à la théorie des motifs de récupérer les résultats précédents :

***Théorème* (B. Kahn - T. Yamazaki).** — *Soient k un corps parfait et $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ des faisceaux Nisnevich avec transferts sur k invariants par homotopie. On a un isomorphisme*

$$\mathrm{K}(k; \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbb{Z}, \mathscr{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{F}_n)$$

5.1.4 Variantes additives

Tous ces résultats concernent le monde invariant par homotopie, mais l'on dispose cependant d'un analogue additif du théorème 5.1.1 (voir [BE03] pour $m = 1$ et [Rö7] en général) :

***Théorème* (S. Bloch - H. Esnault ; K. Rülling).** — *Soient k un corps et $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ des entiers. Il existe un isomorphisme*

$$\mathbb{W}_m \Omega^{n-1}_{k/\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{TCH}^n(k, n; m)$$

qui identifie les groupes de Chow additifs de zéro cycles avec le complexe de de Rham-Witt généralisé.

Les groupes de Chow additifs ont été introduits par S. Bloch et H. Esnault dans [BE03] et étudiés notamment dans [Rö7, KL08]

5.2 Foncteurs à réciprocité

5.2.1 Foncteurs de Mackey avec morphismes de spécialisation

Soit k un corps parfait. Notons **PT** la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur la catégorie des k-schémas réguliers de dimension $\leqslant 1$, qui sont séparés de type fini sur une extension de type fini E/k (voir [IR12, 1.2.1 Definition] pour les détails).

On note **NT** la sous-catégorie pleine de **PT** formée par les faisceaux Nisnevich avec transferts. Dans [IR12], les foncteurs à réciprocité que nous introduisons sont des faisceaux Nisnevich avec transferts $\mathscr{M} \in \mathbf{NT}$ satisfaisant trois conditions supplémentaires. La plus importante d'entre elles est la *condition de modules*. Les deux autres sont plus élémentaires, mais il s'avère utile de les considérer dans un premier temps indépendamment de la condition de modules (voir par exemple la proposition 5.3.4).

Définition 5.2.1. — Un foncteur de Mackey avec morphismes de spécialisation est un objet $\mathscr{M}$ de **NT** vérifiant les deux conditions suivantes :

(Inj) pour toute immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ de schémas non vides connexes réguliers de dimension $\leqslant 1$, séparés de type fini sur une extension de type fini E/k, le morphisme de restriction

$$j^* : \mathscr{M}(X) \hookrightarrow \mathscr{M}(U)$$

est injectif ;
(FP) pour toute courbe C connexe régulière et projective sur E/k de corps des fonctions K, le morphisme naturel

$$\operatorname*{colim}_{U\subseteq C} \mathscr{M}(U) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{M}(K)$$

est un isomorphisme, la colimite étant prise sur les ouverts non vides U de C.

On note **MFsp** la sous-catégorie pleine de **NT** formée des foncteurs de Mackey avec morphismes de spécialisation.

Remarquons que les conditions (Inj) et (FP) impliquent que le morphisme canonique $\mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}(K)$ est injectif.

5.2.2 La condition de modules

Soit C une courbe connexe régulière et projective sur une extension de type fini E/k. On note K le corps des fonctions de C. Remarquons que

$$k_C := H^0(C, \mathscr{O}_C)$$

est une extension de k sur laquelle la courbe est définie et qui ne dépend que de C. L'extension k_C/E est alors finie. Si $P \in C$ est un point fermé, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$

$$U_P^{(n)} := 1 + \mathfrak{m}_P^n,$$

où $\mathfrak{m}_P \subset \mathscr{O}_{C,P}$ est l'idéal maximal. On note $v_P : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation discrète associée à P. Si $\mathfrak{m} = \sum_P n_P[P]$ est un diviseur effectif sur C et $f \in K^\times$ alors

$$f \equiv 1 \bmod \mathfrak{m} \qquad \text{ssi} \qquad f \in U_P^{(n_P)} \quad \forall\, P \in |\mathfrak{m}|.$$

Notons que si $\mathfrak{m} = 0$, cas que nous n'excluons pas par la suite, alors la condition $f \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ est vide. Soient U un ouvert non vide de C et $P \in U$ un point fermé. L'image inverse par l'immersion fermée $P \hookrightarrow U$ définit un morphisme

$$s_P : \mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}(P).$$

Par ailleurs, l'extension $\kappa(P)/k_C$ étant finie, on dispose d'un morphisme

$$\mathrm{Tr}_{P/k_C} : \mathscr{M}(P) \to \mathscr{M}(k_C).$$

Définition 5.2.2. — Un foncteur à réciprocité est un objet $\mathscr{M}$ de **MFsp** tel que pour une courbe C connexe régulière et projective sur une extension de type fini de k, tout ouvert non vide $U \subseteq C$ et toute section $a \in \mathscr{M}(U)$, il existe un diviseur effectif $\mathfrak{m}$ sur C de support égal à $C \setminus U$ vérifiant la condition suivante : pour toute fonction rationnelle $f \in K^\times$ vérifiant $f \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$, on a

$$\sum_{P \in C\setminus|\mathfrak{m}|} v_P(f)\mathrm{Tr}_{P/k_C}(s_P(a)) = 0.$$

On note **RF** la sous-catégorie pleine de **MFsp** dont les objets sont les foncteurs à réciprocité.

On peut alors suivre essentiellement les calculs de [Ser84] pour montrer que les foncteurs à réciprocité $\mathscr{M} \in \mathbf{RF}$ sont munis de symboles locaux satisfaisant une loi de réciprocité pour les courbes connexes régulières et projectives sur une extension de type fini de k. Plus précisément, si C est une telle courbe (de corps des fonctions K) et $P \in C$ est un point fermé, le symbole local en P est une application bilinéaire

$$(-,-)_P : \mathscr{M}(K) \times K^\times \to \mathscr{M}(k_C),$$

qui est continue, lorsque $\mathscr{M}(K)$ et $\mathscr{M}(k_C)$ sont munis des topologies discrètes et $K^\times$ de la topologie $\mathfrak{m}_P$-adique. Plus précisément, on a la proposition ci-dessous :

Proposition 5.2.3. — *Soient $\mathscr{M}$ un foncteur à réciprocité, C une courbe connexe régulière et projective sur une extension de type fini de k. Pour tout point fermé $P \in C$, il existe une et une seule application bilinéaire*

$$(-,-)_P : \mathscr{M}(K) \times K^\times \to \mathscr{M}(k_C),$$

ayant les propriétés suivantes.

1. *$(-,-)_P$ est continue lorsque $\mathscr{M}(K)$ et $\mathscr{M}(k_C)$ sont munis des topologies discrètes et $K^\times$ est muni de la topologie pour laquelle les $\{U_P^{(n)} \mid n \geqslant 1\}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de* 1*.*
2. *Pour tout ouvert U de C tel que $P \in U$, tout $a \in \mathscr{M}(U)$ et tout $f \in K^\times$, on a*
$$(a,f)_P = v_P(f)\mathrm{Tr}_{P/k_C}(s_P(a)).$$
3. *Pour tout $a \in \mathscr{M}(K)$ et tout $f \in K^\times$, on a*
$$\sum_{P \in C} (a,f)_P = 0.$$

La dernière propriété est la loi de réciprocité qui justifie la terminologie « foncteurs à réciprocité ». Ces symboles permettent de définir une filtration croissante et exhaustive $\mathrm{Fil}^\bullet_P\mathscr{M}(K)$ en définissant $\mathrm{Fil}^n_P\mathscr{M}(K)$, pour $n \geqslant 1$, comme le sous-groupe formé des éléments $a \in \mathscr{M}(K)$ tels que

$$(a, 1+\mathfrak{m}_P^n)_P = 0.$$

Le premier cran de la filtration $\mathrm{Fil}^0_P\mathscr{M}(K)$ est donné quant à lui par la fibre $\mathscr{M}_{C,P}$ en P pour la topologie de Zariski de la restriction de $\mathscr{M}$ aux ouverts de C.

Soit $n \geqslant 0$ un entier. On note $\mathbf{RF}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{RF}$ formée des foncteurs à réciprocité $\mathscr{M} \in \mathbf{RF}$ tels que

$$\mathrm{Fil}^n_P\mathscr{M}(K) = \mathscr{M}(K)$$

pour toute courbe C connexe régulière et projective sur une extension de type fini de k et tout point fermé $P \in C$. Les objets de $\mathbf{RF}_1$ peuvent être vus comme les foncteurs à réciprocité invariants par homotopie. En effet $\mathscr{M} \in \mathbf{RF}_1$ si et seulement si, pour toute extension de type fini E/K, on a $s_0^{\mathscr{M}} = s_1^{\mathscr{M}} : \mathscr{M}_{\mathbb{P}^1_E}(\mathbb{A}^1_E) \to M(E)$.

5.2.3 Quelques exemples

Dans [IR12, Section] nous avons détaillé un certain nombre d'exemples de foncteurs à réciprocité. À tout faisceau Nisnevich invariant par homotopie $\mathscr{F} \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$, on peut associer fonctoriellement un foncteur à réciprocité $\hat{\mathscr{F}} \in \mathbf{RF}_1$ de sorte que le foncteur obtenu $\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}} \to \mathbf{RF}_1$ soit conservatif.

Les travaux de M. Rosenlicht et J.-P. Serre [Ros57, Ser84] montrent que les k-groupes algébriques commutatifs, lisses et connexes définissent des foncteurs à réciprocité. Les variétés abéliennes appartiennent à $\mathbf{RF}_0$, les variétés semi-abéliennes à $\mathbf{RF}_1$ mais les groupes unipotents n'appartiennent à aucune des sous-catégories $\mathbf{RF}_n$. Pour $\mathbb{G}_m$ le symbole obtenu est le symbole modéré usuel (composé avec la norme)

$$(a, f)_P = (-1)^{v_P(a)v_P(f)} \mathrm{N}_{P/k_C}\left(\frac{a^{v_P(f)}}{f^{v_P(a)}}\right).$$

Pour $\mathbb{G}_a$ il s'agit du symbole résiduel

$$(a, f)_P = \mathrm{Res}_P\left(a\frac{df}{f}\right).$$

Si $\mathscr{M}_*$ est un module de cycles de M. Rost [Ros96], alors $\mathscr{M}_n$ est un foncteur à réciprocité pour tout n. Ceci peut se vérifier directement sur les propriétés que les modules de cycles doivent satisfaire par définition. Si X est une k-variété projective lisse purement de dimension d, les groupes de zéro cycles de S. Bloch permettent de définir un foncteur à réciprocité $\mathscr{C}\mathrm{H}^{d+n}(X, n)$.

Les différentielles de Kähler absolues fournissent également des foncteurs à réciprocité : l'on peut en effet vérifier que $\Omega^n_{/\mathbb{Z}}$ appartient à $\mathbf{RF}$ pour tout $n \geqslant 1$.

5.3 K-groupe associé à une famille de faisceaux à réciprocité

La construction principale de [IR12] permet de fabriquer à partir d'une famille de foncteurs à réciprocité $\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n$ un nouveau foncteur à reciprocité noté $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$. Comme la notation le suggère, nous voyons ce foncteur à réciprocité comme une sorte de produit tensoriel des foncteurs à réciprocité $\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n$. La justification en est le théorème 5.3.6 qui montre que $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$ représente bien le foncteur des applications n-linéaires de foncteurs à réciprocité.

On prendra garde cependant que nous ignorons si cette construction possède certaines des propriétés élémentaires que l'on est en droit d'attendre de tout produit tensoriel. Par exemple il n'est pas évident du tout que la construction soit associative. De même nous ignorons si la construction présente des propriétés d'exactitude à droite similaire à celle d'un produit tensoriel classique (on peut montrer que la catégorie **RF** est quasi-abélienne au sens de [Sch99] ce qui donne un sens à la question).

Outre ses relations avec les K-groupes définis par M. Somekawa, c'est pour cette raison que nous appelons $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n)$ le K-groupe associés aux faisceaux à réciprocité $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$.

5.3.1 Propriété universelle

Commençons par énoncer la propriété universelle qui caractérise $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n)$. Soit $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n, \mathscr{N} \in \mathbf{PT}$. Il est facile de définir une notion d'application n-linéaire

$$\Phi : \mathscr{M}_1 \times \cdots \times \mathscr{M}_n \to \mathscr{N}$$

de **PT**. On exige que Φ soit n-linéaire sur les sections, soit compatible aux images inverses et satisfasse des formules de projections. Dans le cas des foncteurs à réciprocité pour que la notion devienne intéressante, il est nécessaire de rajouter une condition de compatibilité avec la condition de modules. En étudiant les exemples, on arrive ainsi à la définition suivante :

Définition 5.3.1. — Soient $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n, \mathscr{N} \in \mathbf{RF}$. Une application n-linéaire $\Phi : \mathscr{M}_1 \times \cdots \times \mathscr{M}_n \to \mathscr{N}$ dans **RF** est une application n-linéaire de **PT** vérifiant la condition ci-dessous. Pour tout $r \geqslant 1$, toute courbe C connexe, régulière et projective sur une extension de type fini de k et tout point fermé $P \in C$, on a

$$\Phi(\mathrm{Fil}^r_P \mathscr{M}_1(K) \times \cdots \times \mathrm{Fil}^r_P \mathscr{M}_n(K)) \subseteq \mathrm{Fil}^r_P \mathscr{N}(K).$$

Notons $n - \mathrm{Lin}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n; \mathscr{N})$ l'ensemble des applications n-linéaires de **RF**. L'un des résultats principaux de [IR12] est alors le théorème de représentabilité suivant :

Théorème 5.3.2. — *Soient $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n \in \mathbf{RF}$. Le foncteur $\mathbf{RF} \to \mathbf{Ab}$,*

$$\mathscr{N} \mapsto n - \mathrm{Lin}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n; \mathscr{N})$$

est représentable par un foncteur à réciprocité

$$\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n).$$

On appelle $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n)$ le K-groupe de $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$: il s'agit en fait d'un foncteur à réciprocité.

5.3.2 Idée de la construction

Nous allons maintenant esquisser la construction du foncteur à réciprocité $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n)$. Le point de départ consiste à remarquer que la catégorie **PT** est tensorielle. En effet si $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ sont des objets de **PT**, on peut définir leur produit tensoriel $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$. Par additivité, ce dernier est déterminé par ses sections sur les schémas connexes de dimension un (et séparé de type fini sur une extension de type fini de k), et pour un tel schéma X, on a

$$(\mathscr{M} \otimes \mathscr{N})(X) := \left(\bigoplus_{Y \xrightarrow{\text{fin. fl.}} X} \mathscr{M}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{N}(Y) \right) / \mathcal{R}(X)$$

la somme étant prise sur tous les morphismes finis plats $Y \to X$ et $\mathcal{R}(X)$ étant le sous-groupe engendré par les éléments

$$(a \otimes g_* b') - (g^* a \otimes b'), \qquad (g_* a' \otimes b) - (a' \otimes g^* b)$$

avec $g : Y' \to Y$ un X-morphisme fini plat, $a \in \mathscr{M}(Y)$, $a' \in \mathscr{M}(Y')$, $b \in \mathscr{N}(Y)$, $b' \in \mathscr{N}(Y')$.

Pour cela nous avons besoin d'introduire une catégorie auxiliaire :

Définition 5.3.3. — Un objet de **LMFsp** est un objet $\mathscr{L} \in \mathbf{PT}$ tel que pour toute courbe C régulière connexe et projective sur une extension de type fini de k, le morphisme naturel

$$\operatorname{colim}_U \mathscr{L}(U) \to \mathscr{L}(K)$$

est surjectif, la colimite étant prise sur les ouverts non vides U de C.

Les morphismes dans **LMFsp** sont les morphismes de préfaisceaux avec transferts, de sorte que **LMFsp** est une sous-catégorie pleine de **PT** contenant par définition la sous-catégorie pleine **MFsp**. L'on a donc les inclusions

$$\mathbf{MFsp} \subseteq \mathbf{LMFsp} \subseteq \mathbf{PT}.$$

L'intérêt de cette catégorie réside dans la conjonction de la proposition suivante et du lemme 5.3.5 :

Proposition 5.3.4. — *L'inclusion*

$$\mathbf{MFsp} \subseteq \mathbf{LMFsp}$$

admet un adjoint à gauche

$$\Sigma : \mathbf{LMFsp} \to \mathbf{MFsp}.$$

tel que la composition $\mathbf{MFsp} \xrightarrow{\text{forget}} \mathbf{LMFsp} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{MFsp}$ *soit l'identité.*

L'idée de la preuve consiste essentiellement à tuer par récurrence les sections qui sont génériquement nulles. Partant d'un objet $\mathscr{L} \in \mathbf{LMFsp}$, ce procédé fournit un objet de **LMFsp** vérifiant les conditions (Inj) et (FP) de la définition des objets de **MFsp** mais qui n'est pas nécessairement un faisceau Nisnevich. On peut cependant prouver que le faisceau Nisnevich associé $\Sigma(\mathscr{L})$ appartient bien à **MFsp** (ce point nécessite un peu de travail, voir [IR12, 1.3.8 Lemma, 3.1.4 Proposition]) et vérifie la propriété universelle souhaitée.

On vérifie aisément le lemme suivant (voir [IR12, 4.1.4 Lemma]) :

Lemme 5.3.5. — *Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N} \in$ **LMFsp**. Alors $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N} \in$ **LMFsp**.*

Soient $\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n$ des foncteurs à réciprocité. On considère le quotient dans **PT**

$$\mathrm{LT}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n) := \mathscr{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{M}_n / \mathcal{R},$$

de $\mathscr{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{M}_n \in \mathbf{PT}$ par le sous-ensemble $\mathcal{R}$ formé des éléments

$$\sum_{P \in C \setminus |\max_i\{\mathfrak{m}_i\}|} v_P(f) \cdot s_P^{\mathscr{M}_1}(a_1) \otimes \cdots \otimes s_P^{\mathscr{M}_n}(a_n) \quad \text{dans } (\mathscr{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{M}_n)(x_C),$$

où $C \in \mathscr{C}/S$, $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, \dots, n$, sont des diviseurs effectifs sur C, $a_i \in \mathscr{M}_i(C, \mathfrak{m}_i)$ et $f \in \kappa(\eta_C)^\times$ est une fonction rationnelle telle que $f \equiv 1 \bmod \max_i\{\mathfrak{m}_i\}$.

Comme les $\mathscr{M}_i$ sont en particulier des objets de **LMFsp**, le lemme 5.3.5 assure en particulier que $\mathrm{LT}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$ est également un objet de **LMFsp**. Ceci permet de poser

$$\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n) := \Sigma(\mathrm{LT}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)).$$

Théorème 5.3.6. — *Soient $\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n \in$ **RF**. Alors le foncteur de Mackey avec morphismes de spécialisation $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$ est un foncteur à réciprocité qui représente le foncteur **RF** $\to$ **Ab**,*

$$\mathscr{N} \mapsto n - \mathrm{Lin}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n; \mathscr{N}).$$

Notons que la preuve du théorème n'est pas immédiate bien que $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$ ait été expressement construit de sorte que ce dernier soit vrai. En effet, le point à vérifier est que $\mathrm{T}(\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n)$ satisfait la condition de module (MC). Par construction, celle-ci est vérifiée localement pour la topologie de Nisnevich. Pour conclure, il faut donc prouver que la condition de module est bien une condition locale pour la topologie de Nisnevich. Ce point est vrai, mais sa démonstration nécessite un peu de travail (voir [IR12, 1.4.7 Theorem] pour une preuve).

5.4 Calculs explicites et lien avec les constructions antérieures

5.4.1 Comparaison avec les faisceaux avec transferts

Nous avons vu que tout faisceau Nisnevich invariant par homotopie $\mathscr{F} \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$ définit un foncteur à réciprocité $\hat{\mathscr{F}} \in \mathbf{RF}$. Le résultat principal que nous obtenons est le suivant :

Théorème 5.4.1. — *Soient $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$. Il existe un isomorphisme dans* **RF**

$$\mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \dots, \hat{\mathscr{F}}_n) \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \cdots \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \mathscr{F}_n)\widehat{\ }. \tag{34}$$

Notons que la preuve de ce théorème donnée dans [IR12] montre en particulier que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \dots, \hat{\mathscr{F}}_n)(k) \simeq \mathrm{K}(k, \mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n)$$

le terme de droite étant le groupe introduit par B. Kahn et T. Yamazaki dans [KY13]. De ceci se déduit en particulier la compatibilité avec la construction de M. Somekawa dans le cas des variétés semi-abéliennes.

Comme dans [KY13], on obtient le corollaire suivant :

Corollaire. — *Soient $X_1, \dots, X_r$ des k-variétés projectives lisses et équidimensionnelles. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et toute extension de type fini E/k, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{T}(\mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_1), \dots, \mathscr{C}\mathrm{H}_0(X_r), \underbrace{\mathbb{G}_m, \dots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})(E) \cong \mathrm{CH}^{d+n}(X_E, n).$$

où $X := X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$ et d est la dimension de X

Donnons les grandes lignes de la démonstration qui se divise en trois étapes. La première consiste à construire pour deux préfaisceaux avec transferts $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{PST}$ un isomorphisme fonctoriel dans $\mathbf{PT}$

$$(\mathscr{F} \otimes_{\mathbf{PST}} \mathscr{G})\widehat{\ } \cong \hat{\mathscr{F}} \otimes \hat{\mathscr{G}}$$

ceci ne présente pas de difficultés particulières mais nécessite de vérifier certaines compatibilités un peu fastidieuses (voir [IR12, Proposition 5.1.3] pour les détails).

Ensuite, nous donnons une description particulière de $\mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \dots, \hat{\mathscr{F}}_n)$ utilisant l'invariance par homotopie. Pour cela on remarque tout d'abord que la proposition 5.3.4 peut servir à forcer l'invariance par homotopie dans $\mathbf{RF}$. Elle permet en effet d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 5.4.2. — *Pour tout $n \geqslant 1$, le foncteur d'oubli $o_n : \mathbf{RF}_n \to \mathbf{LMFsp}$ admet un adjoint à gauche*

$$\varrho_n : \mathbf{LMFsp} \to \mathbf{RF}_n$$

tel que $\varrho_n \circ o_n = \mathrm{Id}$.

En remarquant que $\mathrm{T}(\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n)$ appartient à $\mathbf{RF}_1$, il est facile de déduire des propriétés universelles du lemme 5.4.2 et du théorème 5.3.6 la description ci-dessous de $\mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \dots, \hat{\mathscr{F}}_n)$ (voir [IR12, 5.1.7 Lemma]) :

Lemme 5.4.3. — *Soient $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \in \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$. Alors*

$$\varrho_1(\hat{\mathscr{F}}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathscr{F}}_n) = \mathrm{T}(\hat{\mathscr{F}}_1, \cdots, \hat{\mathscr{F}}_n) \quad \textit{dans } \mathbf{RF}_1.$$

Notons que le foncteur ϱ_n est obtenu de la manière suivante. Si $\mathscr{M} \in \mathbf{LMFsp}$, on peut considérer le quotient dans $\mathbf{PT}$

$$\mathrm{L}\varrho_n(\mathscr{M}) := \mathscr{M}/\mathcal{R}_n$$

de $\mathscr{M}$ par le sous-ensemble $\mathcal{R}_n$ formé par les éléments

$$\sum_{P \in U} v_P(f) \cdot \mathrm{Tr}_{P/k_C}(s_P^{\mathscr{M}}(a)),$$

où $C \in (\mathscr{C}/S)$ est une courbe, $U \subseteq C$ est un ouvert non vide, $a \in \mathscr{M}(U)$ et $f \in K^\times$ est une fonction rationnelle telle que $f \equiv 1$ modulo $\sum_{P\in C\setminus U} n[P]$. Ce dernier appartient à **LMFsp** et l'on peut poser

$$\varrho_n(\mathscr{M}) := \Sigma(\mathrm{L}\varrho_n(\mathscr{M})),$$

en utilisant le foncteur Σ de la proposition 5.3.4.

Remarque 5.4.4. — Forcer l'invariance par homotopie peut conduire à un résultat plutôt brutal. L'on a par exemple $\varrho_1(\mathbb{G}_a) = 0$.

La dernière étape consiste alors à comprendre le foncteur ϱ_1 en terme de faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie. Rappelons que le foncteur d'oubli $\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}} \to \mathbf{PST}$ admet un adjoint à gauche $h_0^{\mathrm{Nis}} : \mathbf{PST} \to \mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}$. Ainsi si $\mathscr{F} \in \mathbf{PST}$, en appliquant $\widehat{\ }$ au morphisme de **PST** $a : \mathscr{F} \to h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})$ on obtient un morphisme

$$\hat{a} : \widehat{\mathscr{F}} \to \widehat{h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})}$$

dans **LMFsp**. Le terme de droite étant dans $\mathbf{RF}_1$, le lemme 5.4.2 permet d'obtenir un morphisme dans **RF**

$$\hat{a}^\sharp : \varrho_1(\widehat{\mathscr{F}}) \to \widehat{h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})}. \tag{35}$$

Proposition 5.4.5. — *Soit $\mathscr{F} \in \mathbf{PST}$. Alors (35) est un isomorphisme dans* **RF**.

Le morphisme $\hat{a}$ est une surjection de faisceaux Nisnevich avec transferts. Par ailleurs par construction, il existe un morphisme canonique $b : \hat{\mathscr{F}} \to \varrho_1(\hat{\mathscr{F}})$ dont la composition avec $\hat{a}^\sharp$ est le morphisme $\hat{a}$. Le morphisme $\hat{a}^\sharp$ est donc lui aussi une surjection de faisceaux Nisnevich avec transferts et il suffit, grâce aux conditions (Inj) et (FP), de vérifier que pour toute extension de type fini E/k le morphisme

$$\hat{a}^\sharp(E) : \varrho_1(\widehat{\mathscr{F}})(E) \to \widehat{h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})}(E).$$

est injectif. Puisque le moprhisme $b(E) : \hat{\mathscr{F}}(E) \to \varrho_1(\hat{\mathscr{F}})(E)$ est surjectif et que

$$\widehat{h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})}(E) = \widehat{h_0(\mathscr{F})}(E) = \mathrm{Coker}\left[\hat{\mathscr{F}}_{\mathbb{P}^1_E}(\mathbb{A}^1_E) \xrightarrow{i_0^*-i_1^*} \hat{\mathscr{F}}(E)\right]$$

il suffit de prouver que pour $\alpha \in \hat{\mathscr{F}}_{\mathbb{P}^1_E}(\mathbb{A}^1_E)$, on a $i_0^*(\alpha) - i_1^*(\alpha) = 0$ dans $\varrho_1(\widehat{\mathscr{F}})(E)$. Cela résulte de la définition puisque pour $\mathfrak{m} = \{\infty\}$, la fonction rationnelle $f = \frac{t}{t-1} \in E(t)^\times$ est congruente à 1 modulo $\mathfrak{m}$ et

$$i_0^*(\alpha) - i_1^*(\alpha) = \sum_{P\in\mathbb{A}^1_E} v_P(f)\mathrm{Tr}_{P/E}(s_P^{\hat{\mathscr{F}}}(\alpha))$$

dans $\hat{\mathscr{F}}(E)$. Cet élément est bien nul dans $\varrho_1(\widehat{\mathscr{F}})(E)$ par définition.

Le théorème 5.4.1 s'obtient maintenant aisément. En effet, en posant $\mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \otimes_{\mathbf{PST}} \cdots \otimes_{\mathbf{PST}} \mathscr{F}_n$, partant de l'isomorphisme fonctoriel dans **LMFsp**

$$\hat{\mathscr{F}}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathscr{F}}_n \xrightarrow{\nu} \hat{\mathscr{F}},$$

la proposition 5.4.5 assure que la composition

$$\varrho_1\left(\hat{\mathscr{F}}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathscr{F}}_n\right) \xrightarrow{\varrho_1(\nu)} \varrho_1(\hat{\mathscr{F}}) \xrightarrow{\hat{a}^\sharp} \left[h_0^{\mathrm{Nis}}(\mathscr{F})\right]^\wedge = (\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \cdots \otimes_{\mathbf{HI}_{\mathrm{Nis}}} \mathscr{F}_n)^\wedge .$$

est un isomorphisme dans **RF** et l'on conclut par le lemme 5.4.3.

5.4.2 Lien avec les différentielles de Kähler

Le résultat suivant a été conjecturé par B. Kahn :

Théorème 5.4.6. — *Il existe un isomorphisme naturel de foncteurs à réciprocité*

$$\Omega^n_{/\mathbb{Z}} \to \mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})$$

qui est un isomorphisme lorsque k est de caractéristique zéro.

Ce morphisme est construit en utilisant la présentation de $\Omega^n_{E/\mathbb{Z}}$ comme quotient du produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{Z}} (E^\times)^{\otimes n}$ donnée dans [BE03]. En caractéristique zéro, on peut utiliser la propriété universelle du théorème 5.3.6 pour construire un morphisme réciproque. Ceci utilise le fait que la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet_P \mathbb{G}_a$ est alors la filtration par l'ordre du pôle (voir [IR12, 5.4.8 Lemma]). En caractéristique zéro, l'on déduit donc du théorème de S. Bloch et H. Esnault [BE03] un isomorphisme

$$\mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{\text{n-1}})(E) \simeq \mathrm{TCH}^n(E, n; 1)$$

pour toute extension de type fini E/k.

En caractéristique positive le morphisme du théorème 5.4.6 n'est plus un isomorphisme. Ceci tient au fait que $\mathbb{G}_a$ a alors plus d'endomorphismes qu'en caractéristique zéro puisqu'il faut tenir compte du Frobenius. L'on a ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 5.4.7. — *On suppose k de caractéristique $p > 0$. Le morphisme surjectif de foncteurs à réciprocité du théorème 5.4.6 se factorise pour donner un morphisme dans* **RF**

$$\Omega^n_{/\mathbb{Z}}/B_\infty \twoheadrightarrow \mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}})$$

et le diagramme suivant est commutatif dans **RF**

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n_{/\mathbb{Z}}/B_\infty \arrow[r, "C^{-1}"] \arrow[d] & \Omega^n_{/\mathbb{Z}}/B_\infty \arrow[d] \\
\mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}}) \arrow[r, "F\otimes\mathrm{Id}"] & \mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \underbrace{\mathbb{G}_m, \ldots, \mathbb{G}_m}_{n \text{ facteurs}}),
\end{tikzcd}$$

où $F : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ désigne le Frobenius absolu et C l'opérateur de Cartier.

5.4.3 Un théorème d'annulation

Le résultat suivant a été également conjecturé par B. KAHN et peut se démontrer par un calcul direct :

Théorème 5.4.8. — *On suppose* $\operatorname{char}(k) \neq 2$. *Soient* $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ *des foncteurs à réciprocité. On a*

$$\mathrm{T}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n) = 0.$$

5.5 Modules de cycles et théorie de l'intersection

Dans cette section, nous exposons le résultat principal de [Ivo14a].

5.5.1 La théorie de l'intersection selon M. Rost

L'opération principale dans la théorie de l'intersection telle que développée par W. FULTON [Ful98] est le *morphisme de Gysin* $f^* : \mathrm{CH}_p(X) \to \mathrm{CH}_{p-d}(Y)$ associé à une immersion fermée régulière $f : Y \to X$, de codimension d, entre deux schémas séparés de type fini sur k. Ce morphisme est obtenu comme la composition du morphisme de spécialisation $\mathrm{CH}_p(X) \to \mathrm{CH}_p(N_Y X)$ fourni par la *déformation au cône normal* $N_Y X$ et de la réciproque de l'isomorphisme $\mathrm{CH}_{p-d}(Y) \to \mathrm{CH}_p(N_Y X)$ d'image inverse. En particulier, lorsque X est lisse purement de dimension d, l'immersion diagonale $\Delta_X : X \to X \times_k X$ étant une immersion fermée régulière de codimension d, le morphisme de Gysin associé permet de définir l'intersection de deux cycles $\alpha \in \mathrm{CH}_p(X)$ et $\beta \in \mathrm{CH}_q(X)$ comme le cycle de $\mathrm{CH}_{p+q-d}(X)$ donné par $\alpha \cdot \beta = \Delta_X^*(\alpha \times \beta)$. Ce produit d'intersection est associatif puisque les morphismes de Gysin sont fonctoriels. Rappelons que le groupe de Chow $\mathrm{CH}_p(X)$est le conoyau de l'application diviseur:

$$\bigoplus_{x \in X_{(p+1)}} \kappa(x)^\times \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \mathbb{Z},$$

qui elle même est la dernière différentielle non nulle du complexe de Gersten pour la K-théorie de Milnor

$$\cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(p+r)}} \mathrm{K}_r^{\mathrm{M}}(\kappa(x)) \to \cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(p+1)}} \mathrm{K}_1^{\mathrm{M}}(\kappa(x)) \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \mathrm{K}_0^{\mathrm{M}}(\kappa(x)).$$

Dans [Ros96] M. ROST a généralisé la théorie de l'intersection classique dans deux directions, tout d'abord en considérant le complexe de Gersten dans son entier et non plus seulement son homologie en degré 0 mais également en autorisant des coefficients plus généraux que la K-théorie de Milnor : les *modules de cycles* (ces derniers étant essentiellement des modules gradués sur la K-théorie de Milnor munis de certains morphismes supplémentaires). À un module de cycles M, M. ROST associe un complexe de cycles $C_*(X, M)$, qui est un complexe analogue au complexe de Gersten de composantes données par

$$C_p(X,M,n) := \bigoplus_{x\in X_{(p)}} M_{n+p}(\kappa(x)),$$

et construit une théorie de l'intersection pour ces complexes entièrement en termes de la déformation au cône normal et de quatre applications de base qui sont définies au niveau des complexes : images inverses par des morphismes plats, images directes par des morphismes propres, multiplications par des fonctions inversibles et morphismes bord.

Soit $A_p(X,M,n)$ le p-ème groupe d'homologie du complexe de cycle X. Dans [Ros96], M. Rost construit un morphisme de Gysin $f^* : A_p(X,M,n) \to A_{p-d}(Y,M,n+d)$, coincidant avec celui de W. Fulton pour $n=-p$ et $M = \mathrm{K}_*^{\mathrm{M}}$. Le point suprenant de sa construction est que ces morphismes de Gysin sont en fait induits par un morphisme de complexes

$$I(f) : C_*(X,M,n) \to C_{*-d}(Y,M,n+d)$$

défini entièrement en termes des quatre applications de base.

Il montre également la fonctorialité des morphismes de Gysin en vérifiant que, si $g : Z \to Y$ est une autre immersion fermée régulière, les morphismes $I(g)\circ I(f)$ et $I(f\circ g)$ sont homotopes. L'associativité du produit d'intersection induit sur l'homologie du complexe de cycles de M. Rost s'en déduit.

5.5.2 L'A_∞-algèbre d'intersection

En examinant attentivement la construction de l'homotopie entre $I(g)\circ I(f)$ et $I(f\circ g)$ donnée dans [Ros96, (11.6) Lemma, (11.7) Lemma], nous avons été frappé par sa ressemblance avec le morphisme de Gysin lui-même. En effet elle est obtenue comme la composée d'une sorte de morphisme de spécialisation et d'un morphisme lié à l'invariance par homotopie. Cette observation (et une analogie osée avec la géométrie symplectique et l'homologie de Floer) suggère que si X est un k-schéma lisse et M un module de cycles muni d'un structure d'anneau, alors le complexe des cycles $C^*(X,M)$ est muni d'une structure de A_∞-algèbre.

C'est effectivement le cas, le théorème principal de [Ivo14a] étant le suivant :

Théorème 5.5.1. — *Soient X un k-schéma lisse de type fini et M un module de cycles muni d'une structure d'anneaux. Alors, il existe sur le complexe de cycles $C^*(X,M)_{\mathbb{Q}} := C^*(X,M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, une structure de A_∞-algèbre qui induit sur la cohomologie le produit d'intersection défini dans [Ros96].*

On construit donc dans [Ivo14a] une famille de morphismes gradués de bidegré $(2-n,0)$, que l'on peut voir comme des *produits d'intersection supérieurs*,

$$m_n : C^*(X,M)_{\mathbb{Q}}^{\otimes n} \to C^*(X,M)_{\mathbb{Q}}$$

tels que pour tout $n \geqslant 1$

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{r+st} m_{r+1+t} \circ \left(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}\right) = 0,$$

la somme étant prise sur tous les entiers positifs r, s, t tels que $r + s + t = n$. Le morphisme m_1 est la différentielle du complexe de cycles et m_2 un morphisme fermé qui induit sur la cohomologie le produit d'intersection de [Ros96].

Remarque 5.5.2. — Notons que classiquement les morphismes m_n sont simplement gradués de degré $2 - n$. La présence d'un second degré ici provient du fait que les complexes de cycles de M. Rost sont naturellement bigradués et qu'il convient de tenir compte non seulement de la graduation cohomologique mais également de cette graduation supplémentaire.

La structure de A_∞-algèbre du théorème 5.5.1 est obtenue par perturbation homologique. La stratégie mise en place dans [Ivo14a] est la suivante : (a) on commence par construire un nouveau complexe $\mathscr{C}^*(X, M)$ en prenant essentiellement une colimite homotopique de complexes de cycles sur les produits du fibré tangent de X ; (b) on utilise les opérations de base de M. Rost ainsi que la déformation au cône normal pour construire sur $\mathscr{C}^*(X, M)$ une structure de DG-algèbre ; (c) on construit finalement des données SDR (abréviation pour « strong deformation retract »)

$$\left(C^*(X, M)_{\mathbb{Q}} \underset{r}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}^*(X, M)\ , H \right).$$

Autrement dit α, r sont des morphismes gradués, fermés de bidegré $(0, 0)$ tels que $r \circ \alpha = 1$ et $H : \mathscr{C}^*(X, M) \to \mathscr{C}^*(X, M)$ est un morphisme gradué de bidegré $(-1, 0)$ de différentielle $\delta(H) = 1 - \alpha \circ r$.

5.5.3 Esquisse de la preuve du théorème

Commençons par donner la définition du complexe $\mathscr{C}^*(X, M)$. Il s'agit d'un cas particulier d'une construction plus générale qui à un fibré vectoriel E de rang fini sur X associe un complexe $\mathscr{C}^*_E(X, M)$. Le complexe $\mathscr{C}^*(X, M)$ est alors obtenu en prenant pour E le fibré tangent de X.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, notons $p_n : E^{\oplus n+1} \to E^{\oplus n}$ la projection sur les n premiers facteurs et $\pi_n : E^{\oplus n} \to X$ la projection canonique. Le groupe symétrique Σ_n agit sur $E^{\oplus n}$ par permutation des facteurs, et l'on peut considérer le facteur direct

$$\mathscr{C}^*_E(X, M)_n := C^*(E^{\oplus n}, M)^{\Sigma_n}_{\mathbb{Q}}$$

du complexe de cycles $C^*(E^{\oplus n}, M)_{\mathbb{Q}}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on dispose des morphismes

$$c_n := \Pi_{n+1} \circ p_n^* : \mathscr{C}^*_E(X, M)_n \to \mathscr{C}^*_E(X, M)_{n+1}$$

où Π_{n+1} désigne la projection sur les invariants sous Σ_{n+1}. On obtient ainsi un système inductif

$$\mathscr{C}^*_E(X,M)_0 \xrightarrow{c_0} \mathscr{C}^*_E(X,M)_1 \xrightarrow{c_1} \cdots \to \mathscr{C}^*_E(X,M)_n \xrightarrow{c_n} \cdots$$

dans lequel les morphismes c_n sont fermés de bidegré $(0,0)$. Le complexe $\mathscr{C}^*_E(X,M)$ est par définition la colimite homotopique de ce système, i.e. le mapping cone :

$$\mathscr{C}^*_E(X,M) := \mathsf{Mc}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n \xrightarrow{1-\mathsf{s}_{\mathscr{C}}} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n\right)$$

où $\mathsf{s}_{\mathscr{C}}$ est la somme directe des morphismes c_n. Les morphismes de projection π_n induisent par image inverse un morphisme fermé de bidegré $(0,0)$

$$\alpha : C^*(X,M)_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{C}^*_E(X,M)$$

qui est un quasi-isomorphisme d'après la propriété d'invariance par homotopie prouvée dans [Ros96, (8.6) Proposition, §9].

En utilisant les opérations de base, des espaces de déformation au cône normal et le lemme suivant, on peut munir $\mathscr{C}^*(X,M)$ d'une structure de DG-algèbre.

Lemme 5.5.3. — *Supposons donné, pour tout entier $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, un morphisme fermé de bidegré* $(0,0)$

$$m_2^{k_1,k_2} : \mathscr{C}^*(X,M)_{k_1} \otimes \mathscr{C}^*(X,M)_{k_2} \to \mathscr{C}^*(X,M)_{k_1+k_2+1}$$

tel que

$$c_{k_1+k_2+1} \circ m_2^{k_1,k_2} = m_2^{k_1+1,k_2} \circ (c_{k_1} \otimes 1) = m_2^{k_1,k_2+1} \circ (1 \otimes c_{k_2}).$$

1. *Les morphismes $m_2^{k_1,k_2}$ induisent un morphisme fermé de bidegré* $(0,0)$
$$m_2 : \mathscr{C}^*(X,M) \otimes \mathscr{C}^*(X,M) \to \mathscr{C}^*(X,M)$$
2. *Si, pour tout $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, la relation*
$$m_2^{k_1,k_2+k_3+1} \circ (1 \otimes m_2^{k_2,k_3}) = m_2^{k_1+k_2+1,k_3} \circ (m_2^{k_1,k_2} \otimes 1)$$
est vérifiée, alors les morphismes m_2 satisfont l'égalité
$$m_2 \circ (1 \otimes m_2) = m_2 \circ (m_2 \otimes 1).$$

Pour construire la multiplication $m_2^{k_1,k_2}$, l'espace de déformation que l'on doit considérer n'est pas celui associé à l'immersion diagonale Δ_X mais celui associé à l'immersion fermée induite par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} TX^{\oplus k_1+k_2} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & TX^{\oplus k_1} \boxtimes TX^{\oplus k_2} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\Delta_X"] & X \times_k X. \end{tikzcd}$$

La vérification des relations entre les $m_2^{k_1,k_2}$ fait intervenir des espaces de déformation double au cône normal, les propriétés des opérations de base ainsi qu'un peu de combinatoire géométrique. Nous renvoyons à [Ivo14a] pour les détails.

Le dernier point restant à vérifier est la proposition suivante :

Proposition 5.5.4. — *Soit E un fibré vectoriel de rang fini sur X. Alors, il existe des données SDR*

$$\left(C^*(X,M)_{\mathbb{Q}} \underset{r}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}^*_E(X,M)\ , H \right)$$

où α est le morphisme canonique.

La preuve de la proposition s'inspire de la preuve de l'invariance par homotopie donnée dans [Ros96]. En effet, on commence par construire explicitement des données SDR convenant lorsque E est un fibré trivial, elles sont alors données explicitement en terme d'images inverses, de morphismes bord et de multiplication par des fonctions inversibles. On traite ensuite le cas général par recollement en utilisant comme dans [Ros96, (9.13)] des coordinations du fibré E.

5.5.4 Opérations d'ordres supérieurs sur les groupes de Chow à coefficients

Le théorème 5.5.1 fournit a priori de nouvelles opérations sur les groupes de Chow à coefficients. Rappelons que d'après [Kad82] (voir également [Kel01, §3.3] pour de plus amples références), si l'on se donne une A_∞-algèbre A, il existe

- une structure de A_∞-algèbre sur son homologie H^*A telle que $m_1 = 0$ et m_2 soit le morphisme induit par la multiplication m_2 de A ;
- et un quasi-isomorphisme de A_∞-algèbre $H^*A \to A$ qui relève l'identité de H^*A.

De plus, cette structure est unique à isomorphisme (non unique) de A_∞-algèbres près. Notons que la multiplication m_2 sur H^*A est associative puisque la différentielle m_1 est nulle (la multiplication m_3 quant à elle peut être non nulle).

En particulier, le théorème 5.5.1 implique donc que les groupes de Chow à coefficients dans M

$$A^p(X,M)_{\mathbb{Q}} = H^p(C^*(X,M)_{\mathbb{Q}})$$

ont une structure de A_∞-algèbre. Étant donnés des entiers $n \geqslant 2$, $p_1,\dots,p_n \in \mathbb{N}$, $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{Z}$, ceci fournit des morphismes

$$m_n : \bigotimes_{i=1}^{n} A^{p_i}(X,M,r_i)_{\mathbb{Q}} \to A^{p+2-n}(X,M,r)_{\mathbb{Q}}$$

où $p = p_1 + \dots + p_n$, $r = r_1 + \dots + r_n$ et tels que m_2 soit le produit d'intersection défini par M. Rost. Dans le cas particulier $M = K_*^M$, et $p_i = r_i$ on obtient des produits d'intersection supérieurs

$$m_n : \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{CH}^{p_i}(X)_{\mathbb{Q}} \to A^{p+2-n}(X,K_*^M,p)_{\mathbb{Q}}$$

qui coincident avec le produit d'intersection usuel pour $n = 2$.

Bibliographie

[Abb10] A. Abbes – *Éléments de géométrie rigide. Volume I*, Progress in Mathematics, vol. 286, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010, Construction et étude géométrique des espaces rigides. [Construction and geometric study of rigid spaces], With a preface by Michel Raynaud.

[Akh04] R. Akhtar – "Milnor K-theory of smooth varieties", *K-Theory. An Interdisciplinary Journal for the Development, Application, and Influence of K-Theory in the Mathematical Sciences* **32** (2004), no. 3, p. 269âĂŞ291.

[And96] Y. André – "Pour une théorie inconditionnelle des motifs", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), no. 83, p. 5–49.

[And04] ———, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Ara05] D. Arapura – "The Leray spectral sequence is motivic", *Invent. Math.* **160** (2005), no. 3, p. 567–589.

[Ara13] ———, "An abelian category of motivic sheaves", *Adv. Math.* **233** (2013), p. 135–195.

[Ayo07a] J. Ayoub – "Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I", *Astérisque* (2007), no. 314, p. x+466 pp. (2008).

[Ayo07b] ———, "Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II", *Astérisque* (2007), no. 315, p. vi+364 pp. (2008).

[Ayo09] ———, "Motifs des variétés analytiques rigides", *Submitted* (2009).

[Ayo10] ———, "Note sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti", *J. Inst. Math. Jussieu* **9** (2010), no. 2, p. 225–263.

[Ayo12] ———, "Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier", To appear in Annals of Mathematics, available on http://user.math.uzh.ch/ayoub/, 2012.

[Ayo14] ______, "La réalisation étale et les opérations de Grothendieck", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **47** (2014), no. 1, p. 1–141.

[Bat99] V. V. Batyrev – "Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers", in *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, p. 1–11.

[BBD82] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein & P. Deligne – "Faisceaux pervers", in *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5–171.

[BE03] S. Bloch & H. Esnault – "An additive version of higher Chow groups", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **36** (2003), no. 3, p. 463–477.

[Beĭ86] A. A. Beĭlinson – "Notes on absolute Hodge cohomology", in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 35–68.

[Beĭ87a] ______, "Correction to: "Notes on absolute Hodge cohomology" [*applications of algebraic k-theory to algebraic geometry and number theory, part i, ii* (Boulder, Colo., 1983), 35–68, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986; MR0862628 (87m:14019)]", in *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, p. 25–26.

[Beĭ87b] ______, "Height pairing between algebraic cycles", in *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, p. 1–25.

[Beĭ87c] ______, "On the derived category of perverse sheaves", in *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, p. 27–41.

[Ber] P. Berthelot – "Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres", *Preprint*.

[Ber93] V. G. Berkovich – "Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1993), no. 78, p. 5–161 (1994).

[Ber94] ______, "Vanishing cycles for formal schemes", *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.

[Ber96] ______, "Vanishing cycles for formal schemes. II", *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry.

[Bit04] F. Bittner – "The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero", *Compos. Math.* **140** (2004), no. 4, p. 1011–1032.

[Bit05] F. Bittner – "On motivic zeta functions and the motivic nearby fiber", *Math. Z.* **249** (2005), no. 1, p. 63–83.

[Bli11] M. Blickle – "A short course on geometric motivic integration", in *Motivic integration and its interactions with model theory and non-Archimedean geometry. Volume I*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 383, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, p. 189–243.

[Blo86] S. Bloch – "Algebraic cycles and higher K-theory", *Adv. in Math.* **61** (1986), no. 3, p. 267–304.

[Bon09] M. V. Bondarko – "Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky versus Hanamura", *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 1, p. 39–97.

[BT73] H. Bass & J. Tate – "The Milnor ring of a global field", in *Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 349–446. Lecture Notes in Math., Vol. 342.

[BZ90] J.-L. Brylinski & S. Zucker – "An overview of recent advances in Hodge theory", in *Several complex variables, VI*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 69, Springer, Berlin, 1990, p. 39–142.

[CD13] D.-C. Cisinski & F. Déglise – "Triangulated categories of mixed motives", arXiv:0912.2110v3, 2013.

[CKS86] E. Cattani, A. Kaplan & W. Schmid – "Degeneration of Hodge structures", *Ann. of Math. (2)* **123** (1986), no. 3, p. 457–535.

[CKS87] ______, "L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure", *Invent. Math.* **87** (1987), no. 2, p. 217–252.

[CS01] P. Colmez & J.-P. Serre (éds.) – *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 2, Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[Del71] P. Deligne – "Théorie de Hodge. II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.

[Del74a] ______, "La conjecture de Weil. I", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 43, p. 273–307.

[Del74b] ______, "Théorie de Hodge. III", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 44, p. 5–77.

[Del80] ______, "La conjecture de Weil. II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 52, p. 137–252.

[Del87] P. Deligne – "Un théorème de finitude pour la monodromie", in *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, Progr. Math., vol. 67, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, p. 1–19.

[Del90] ______, "Catégories tannakiennes", in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 111–195.

[Del94] P. Deligne – "À quoi servent les motifs?", in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 143–161.

[DHI04] D. Dugger, S. Hollander & D. C. Isaksen – "Hypercovers and simplicial presheaves", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), no. 1, p. 9–51.

[DL98] J. Denef & F. Loeser – "Motivic Igusa zeta functions", *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 3, p. 505–537.

[DL99] ———, "Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration", *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, p. 201–232.

[DL01] ———, "Geometry on arc spaces of algebraic varieties", in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 327–348.

[DL02] ———, "Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs", *Topology* **41** (2002), no. 5, p. 1031–1040.

[DMOS82] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus & K.-y. Shih – *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Dwo60] B. Dwork – "On the rationality of the zeta function of an algebraic variety", *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631–648.

[Ful98] W. Fulton – *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gab62] P. Gabriel – "Des catégories abéliennes", *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[Gab81] O. Gabber – "The integrability of the characteristic variety", *Amer. J. Math.* **103** (1981), no. 3, p. 445–468.

[Gir95] J. Giraud – "Résolution des singularités (d'après Heisuke Hironaka)", in *Séminaire Bourbaki, Vol. 10*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 320, 101–113.

[GJRW96] R. Guralnick, D. B. Jaffe, W. Raskind & R. Wiegand – "On the Picard group: torsion and the kernel induced by a faithfully flat map", *J. Algebra* **183** (1996), no. 2, p. 420–455.

[GNA02] F. Guillén & V. Navarro Aznar – "Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2002), no. 95, p. 1–91.

[Groa] A. Grothendieck – "Motifs".

[Grob] ———, "Récoltes et semailles".

[Gro60] ———, "Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1960), no. 4, p. 228.

[Gro68] ———, "Crystals and the de Rham cohomology of schemes", in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 306–358.

[Gro69] ———, "Standard conjectures on algebraic cycles", in *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 193–199.

[GS96] H. Gillet & C. Soulé – "Descent, motives and K-theory", *J. Reine Angew. Math.* **478** (1996), p. 127–176.

[GS06] P. Gille & T. Szamuely – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Han04] M. Hanamura – "Mixed motives and algebraic cycles. II", *Invent. Math.* **158** (2004), no. 1, p. 105–179.

[Hir03] P. S. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[HMS12] A. Huber & S. Müller-Stach – "On the relation between Nori motives and Kontseich periods", arXiv:math/1105.0865v4, 17 April 2012.

[Hov99] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[HTT08] R. Hotta, K. Takeuchi & T. Tanisaki – *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 236, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008, Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[Hub95] A. Huber – *Mixed motives and their realization in derived categories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1604, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Hub00] ———, "Realization of Voevodsky's motives", *J. Algebraic Geom.* **9** (2000), no. 4, p. 755–799.

[Hub04] A. Huber – "Corrigendum to: "Realization of Voevodsky's motives" [J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 4, 755–799; mr1775312]", *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 1, p. 195–207.

[Jan90] U. Jannsen – *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1400, Springer-Verlag, Berlin, 1990, With appendices by S. Bloch and C. Schoen.

[Jan92] U. Jannsen – "Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity", *Invent. Math.* **107** (1992), no. 3, p. 447–452.

[Jan94] U. Jannsen – "Motivic sheaves and filtrations on Chow groups", in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 245–302.

[Jan95] ———, "Mixed motives, motivic cohomology, and Ext-groups", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 667–679.

[Jou73] J. P. Jouanolou – "Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique", in *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 293–316. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[Kad82] T. V. Kadeishvili – "The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra", *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR* **108** (1982), no. 2, p. 249–252 (1983).

[Kah] B. Kahn – "Foncteurs de Mackey à réciprocité", Preprint, Available at http://arxiv.org/abs/1210.7577.

[Kap00] M. Kapranov – "The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups", *Preprint* (2000), ArXiv:math.AG/0001005 v2.

[Kas83] M. Kashiwara – "Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations", in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, p. 134–142.

[Kas84] M. Kashiwara – "The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 2, p. 319–365.

[Kas86] ______, "A study of variation of mixed Hodge structure", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **22** (1986), no. 5, p. 991–1024.

[Kas95] ______, "Algebraic study of systems of partial differential equations", *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1995), no. 63, p. xiv+72.

[Kel01] B. Keller – "Introduction to A-infinity algebras and modules", *Homology Homotopy Appl.* **3** (2001), no. 1, p. 1–35 (electronic).

[Kim05] S.-I. Kimura – "Chow groups are finite dimensional, in some sense", *Math. Ann.* **331** (2005), no. 1, p. 173–201.

[KL08] A. Krishna & M. Levine – "Additive higher Chow groups of schemes", *J. Reine Angew. Math.* **619** (2008), p. 75–140.

[Kon95] M. Kontsevich – "Lecture at orsay", (December 7, 1995).

[KS94] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.

[KSY] B. Kahn, S. Saito & T. Yamazaki – "Reciprocity sheaves i", Preprint, Available at http://arxiv.org/abs/1402.4201.

[KY13] B. Kahn & T. Yamazaki – "Voevodsky's motives and Weil reciprocity", *Duke Mathematical Journal* **162** (2013), no. 14, p. 2751–2796.

[Lau83] G. Laumon – "Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés", in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, p. 151–237.

[Lev98] M. Levine – *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Lev05] ______, "Mixed motives", in *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, Springer, Berlin, 2005, p. 429–521.

[Liu02] Q. Liu – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[LL03] M. Larsen & V. A. Lunts – "Motivic measures and stable birational geometry", *Mosc. Math. J.* **3** (2003), no. 1, p. 85–95, 259.

[LL04] M. Larsen & V. A. Lunts – "Rationality criteria for motivic zeta functions", *Compos. Math.* **140** (2004), no. 6, p. 1537–1560.

[LLW10] Y.-P. Lee, H.-W. Lin & C.-L. Wang – "Flops, motives, and invariance of quantum rings", *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), no. 1, p. 243–290.

[Loe00] F. Loeser – "The Milnor fiber as a virtual motive", in *Singularities—Sapporo 1998*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000,

p. 203–220.

[Loe09] ———, "Seattle lectures on motivic integration", in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 745–784.

[LS10] Q. Liu & J. Sebag – "The Grothendieck ring of varieties and piecewise isomorphisms", *Math. Z.* **265** (2010), no. 2, p. 321–342.

[Meb84a] Z. Mebkhout – "Une autre équivalence de catégories", *Compositio Math.* **51** (1984), no. 1, p. 63–88.

[Meb84b] ———, "Une équivalence de catégories", *Compositio Math.* **51** (1984), no. 1, p. 51–62.

[Meb04] Z. Mebkhout – "Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann", in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 165–310.

[Mil70] J. Milnor – "Algebraic K-theory and quadratic forms", *Invent. Math.* **9** (1969/1970), p. 318–344.

[MM04] P. Maisonobe & Z. Mebkhout – "Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents", in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Sémin. Congr., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 311–389.

[Mor12] F. Morel – *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2052, Springer, Heidelberg, 2012.

[MV99] F. Morel & V. Voevodsky – "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1999), no. 90, p. 45–143 (2001).

[MVW06] C. Mazza, V. Voevodsky & C. Weibel – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[MW13] C. Mazza & C. Weibel – "Schur-finiteness in λ-rings", *J. Algebra* **374** (2013), p. 66–78.

[Nor] M. Nori – "Lectures at TIFR", 32 pages.

[Nor02] M. V. Nori – "Constructible sheaves", in *Algebra, arithmetic and geometry, Part I, II (Mumbai, 2000)*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 16, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 2002, p. 471–491.

[NS89] Y. P. Nesterenko & A. A. Suslin – "Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* **53** (1989), no. 1, p. 121âĂŞ146.

[NS07] J. Nicaise & J. Sebag – "Motivic Serre invariants, ramification, and the analytic Milnor fiber", *Invent. Math.* **168** (2007), no. 1, p. 133–173.

[Orl05] D. O. Orlov – "Derived categories of coherent sheaves, and motives", *Uspekhi Mat. Nauk* **60** (2005), no. 6(366), p. 231–232.

[Poo02] B. Poonen – "The Grothendieck ring of varieties is not a domain", *Math. Res. Lett.* **9** (2002), no. 4, p. 493–497.

[Qui73] D. Quillen – "Higher algebraic K-theory. I", in *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash.,* *1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[Rö7] K. Rülling – "The generalized de Rham-Witt complex over a field is a complex of zero-cycles", *Journal of Algebraic Geometry* **16** (2007), no. 1, p. 109âĂŞ169.

[Ray74] M. Raynaud – "Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$", in *Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, Soc. Math. France, Paris, 1974, p. 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40.

[Rio05] J. Riou – "Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), no. 6, p. 431–436.

[RØ08] O. Röndigs & P. A. Østvær – "Modules over motivic cohomology", *Adv. Math.* **219** (2008), no. 2, p. 689–727.

[Ros57] M. Rosenlicht – "A universal mapping property of generalized jacobian varieties", *Ann. of Math. (2)* **66** (1957), p. 80–88.

[Ros96] M. Rost – "Chow groups with coefficients", *Documenta Mathematica* **1** (1996), p. No. 16, 319âĂŞ393 (electronic).

[RS00] W. Raskind & M. Spiess – "Milnor K-groups and zero-cycles on products of curves over p-adic fields", *Compositio Mathematica* **121** (2000), no. 1, p. 1âĂŞ33.

[RSS01] C. Rezk, S. Schwede & B. Shipley – "Simplicial structures on model categories and functors", *Amer. J. Math.* **123** (2001), no. 3, p. 551–575.

[RZ82] M. Rapoport & T. Zink – "Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik", *Invent. Math.* **68** (1982), no. 1, p. 21–101.

[Sai] M. Saito – "On the definition of mixed hodge modules", Preprint, Available at http://arxiv.org/abs/1307.2140.

[Sai88] ———, "Modules de Hodge polarisables", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24** (1988), no. 6, p. 849–995 (1989).

[Sai90] ———, "Mixed Hodge modules", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), no. 2, p. 221–333.

[Sai91] ———, "Hodge conjecture and mixed motives. I", in *Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 283–303.

[Sai00] ———, "Mixed Hodge complexes on algebraic varieties", *Math. Ann.* **316** (2000), no. 2, p. 283–331.

[Sch73] W. Schmid – "Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping", *Invent. Math.* **22** (1973), p. 211–319.

[Sch99] J.-P. Schneiders – "Quasi-abelian categories and sheaves", *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (1999), no. 76, p. vi+134.

[Sch12] J. Scholbach – "Geometric motives and the h-topology", *Math. Z.* **272** (2012), no. 3-4, p. 965–986.

[Ser84] J. Serre – *Groupes algébriques et corps de classes*, second éd., Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago, 7, Hermann, Paris, 1984, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1264.

[SGA73] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II* – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), Dirigé par P. Deligne et N. Katz.

[Som90] M. Somekawa – "On Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties", *K-Theory. An Interdisciplinary Journal for the Development, Application, and Influence of K-Theory in the Mathematical Sciences* **4** (1990), no. 2, p. 105âĂŞ119.

[SR72] N. Saavedra Rivano – *Catégories Tannakiennes*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265.

[SV00] A. Suslin & V. Voevodsky – "Relative cycles and Chow sheaves", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 10–86.

[SZ85] J. Steenbrink & S. Zucker – "Variation of mixed Hodge structure. I", *Invent. Math.* **80** (1985), no. 3, p. 489–542.

[Tak77] M. Takeuchi – "Morita theorems for categories of comodules", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **24** (1977), no. 3, p. 629–644.

[Vey06] W. Veys – "Arc spaces, motivic integration and stringy invariants", in *Singularity theory and its applications*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, p. 529–572.

[Voe96] V. Voevodsky – "Homology of schemes", *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 1, p. 111–153.

[Voe98] V. Voevodsky – "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, no. Extra Vol. I, 1998, p. 579–604 (electronic).

[Voe00] ———, "Triangulated categories of motives over a field", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

[Voe02] ———, "Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic", *Int. Math. Res. Not.* (2002), no. 7, p. 351–355.

[Voe10] ———, "Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies", *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), no. 8, p. 1384–1398.

[vW11] J. von Wangenheim – "Nori-Motive und Tannaka-Theorie", Diplomarbeit, Universität Freiburg arXiv:1111.5146, 2011.

[Wan04] C.-L. Wang – "K-equivalence in birational geometry", in *Second International Congress of Chinese Mathematicians*, New Stud. Adv. Math., vol. 4, Int. Press, Somerville, MA, 2004, p. 199–216.

[Wei89] C. A. Weibel – "Homotopy algebraic K-theory", in *Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987)*, Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 461–488.

[Wen10] M. Wendt – "$\mathbb{A}^1$-homotopy of Chevalley groups", *J. K-Theory* **5** (2010), no. 2, p. 245–287.

[Zuc79] S. Zucker – "Hodge theory with degenerating coefficients. L_2 cohomology in the Poincaré metric", *Ann. of Math. (2)* **109** (1979), no. 3, p. 415–476.