AL3
L3, semestre 1 (2019-2020) - Groupe magistère
Université Rennes I - ENS Rennes

TD 3 : Espaces quadratiques

Exercice 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

1. Soit q une forme quadratique sur E et $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de q dans la base précédente. Montrer que

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} m_{ij} x_i x_j.$$

2. Réciproquement, on se donne une application $Q : K^n \to K$ définie par

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Montrer que l'application $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto Q(x_1, \ldots x_n)$ définit une forme quadratique sur E dont la matrice dans la base canonique est $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Exercice 2

On considère l'application définie sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]_{<3}$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 par la formule :

$$q(P) = \int_0^1 P'(t) P(1-t) dt + P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire.
2. Déterminer la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$ de E.
3. Calculer le discriminant de q. Est-elle dégénérée ?
4. La forme q possède-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?

Exercice 3

On dit qu'une forme quadratique q sur E *représente* l'élément $\alpha \in K^\times$ s'il existe $x \in E$ tel que $q(x) = \alpha$.

1. Montrer que deux formes quadratiques isométriques représentent exactement le même ensemble de scalaires.

2. Montrer que si q représente $\alpha \in K^\times$, alors il existe $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que q soit isométrique à :

$$\alpha x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2.$$

Exercice 4

Soit $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de représentants de $K^\times/(K^\times)^2$. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à une forme quadratique de la forme :

$$\varepsilon_{i_1} x_1^2 + \varepsilon_{i_2} x_2^2 + \cdots + \varepsilon_{i_n} x_n^2.$$

Exercice 5

Soit (E,q) un espace quadratique et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que $F \cap F^{\perp} = N(q_{|F})$.

2. En déduire que si q est non dégénérée et si $F \subset E$ est un sous-espace totalement isotrope de E (*i.e.* contenu dans son cône isotrope), alors $2 \dim F \leq \dim E$.

Exercice 6

On dit qu'un espace quadratique (E,q) de forme polaire f est un *plan hyperbolique* s'il admet une base $\{e_1, e_2\}$ formée de vecteurs isotropes, tels que $f(e_1, e_2) \neq 0$.

1. Soit (E,q) un plan hyperbolique. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La forme q est-elle dégénérée ?

2. Soit (E,q) un espace quadratique non dégénéré possédant un vecteur isotrope non nul x. Montrer que E contient un sous-espace F contenant x qui est un plan hyperbolique.

3. Démontrer par récurrence que E est somme directe orthogonale de (sous-espaces isométriques à des) plans hyperboliques et d'un sous-espace ne contenant pas de vecteurs isotropes.

Exercice 7

1. Montrer que le groupe $\mathbb{Q}^{\times}/(\mathbb{Q}^{\times})^2$ est infini.

2. En déduire qu'il y a une infinité de classes de formes quadratiques sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel non nul.

Exercice 8

Montrer qu'une forme quadratique est de rang r si et seulement si elle s'écrit comme combinaison linéaire de r carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 9

Ecrire les matrices des formes quadratiques réelles suivantes dans la base canonique. Déterminer leur rang et leur signature.

1. $q(x,y,z) = 4xy - 4yz - y^2 - z^2$.

2. $q(a,b,c) = b^2 - 4ac$

3. $q(x,y,z) = y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz - 2xz$.

Exercice 10

Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

2. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Exercice 11

Soient $(E,q), (E',q')$ des espaces quadratiques réels de dimension finie, de formes polaires respectives f, f'.

1. Montrer que l'on peut définir une structure d'espace quadratique sur $E \otimes E'$ en posant $g(x \otimes x', y \otimes y') = f(x, y)f'(x', y')$.
2. Déterminer le rang et la signature de $E \otimes E'$ en fonction de ceux de E et E'.

Exercice 12

Soit K un corps fini de cardinal q impair.
1. En considérant l'endomorphisme de groupe $x \mapsto x^2$ défini sur $K^\times$, démontrer que $(K^\times)/(K^\times)^2$ est d'ordre 2.
2. Combien y a-t-il de carrés dans K ?
3. En déduire que pour $a, b, c \in K$ tous non nuls, l'équation $ax^2 + by^2 = c$ possède au moins une solution non nulle dans K^2.
4. En utilisant l'exercice 3, en déduire que toute forme quadratique non dégénérée sur K^2 est isométrique à $x^2 + \beta y^2$ pour un certain $\beta \in K^\times$.
5. Soit $\alpha \in K^\times$ non carré, et soit (E, q) un espace quadratique de dimension n, non dégénéré sur K. Montrer que q est isométrique à $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ou à $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$.
6. Dans les deux cas précédents, donner la valeur du discriminant de q. En déduire que deux formes quadratiques non dégénérées sur E sont isométriques si et seulement si elles ont même dimension.

Exercice 13

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré sur $\mathbb{Q}$.
1. On suppose que q représente α. Montrer que la famille $q^{-1}(\{\alpha\})$ engendre E.
2. Montrer que $q^{-1}(\{\alpha\})$ est vide ou infini.
3. Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est infini.