UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre Linéaire 3

Feuille n° 5

Quelques définitions

- Un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_K(E)$ est dit cyclique s'il existe x dans E tel que $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.
- Un vecteur x de E est dit cyclique si $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.
- Un sous-espace F de E est dit cyclique pour u s'il est stable par u et si la restriction de u à F est cyclique.

Exercice 51

Soit $u \in \mathrm{End}_K(E)$. On note $P_1, \dots, P_r$ les facteurs invariants non constants de u. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E cycliques pour u tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ et tels que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on ait $\mu_{u|_{F_i}} = P_i$.

Exercice 52

1 Calculer les facteurs invariants de la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 En déduire une réduite de Jordan et sa forme réduite de Frobenius.

Exercice 53

Déterminer les facteurs invariants de la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 8 & 12 & -14 \\ -46 & 22 & 35 & -41 \\ 2 & -1 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54

Montrer que deux matrices de $\mathscr{M}_2(K)$ ou $\mathscr{M}_3(K)$ sont semblables si et seulement si elles ont même polynômes caractéristiques et minimaux.

Exercice 55

Soit $u \in \mathrm{End}_K(E)$. On appelle commutant de u le sous-ensemble $\mathscr{C}(u)$ de $\mathrm{End}_K(E)$ formé des $v \in \mathrm{End}_K(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$.

1 Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(E)$ qui contient $K[u] = \{P(u) : P \in K[X]\}$.

2 Montrer que si u est cyclique, alors $\mathscr{C}(u) = K[u]$.

Exercice 56

Soient $u \in \mathrm{End}_K(E)$ un endomorphisme cyclique et $x \in E$ un vecteur cyclique pour u. On se donne un sous-espace vectoriel F de E stable par u et on note χ_u le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.

1 Montrer que $\{P \in K[X] : P(u)(x) \in F\}$ est un idéal de $K[X]$.

2 En déduire que l'endomorphisme induit par u sur F est cyclique.

3 Soit $Q \in K[X]$ un polynôme unitaire non constant tel que $Q|\chi_u$. Montrer qu'il existe un sous-espace stable par u sur lequel l'endomorphisme induit est cyclique de polynôme caractéristique Q.

4 Montrer que tout sous-espace stable par u est de la forme $\mathrm{Ker}\, Q(u)$ pour un certain diviseur Q de χ_u.

5 Montrer qu'un endomorphisme cyclique a un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 57

Montrer qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.

Exercice 58

Soient L/K une extension de corps. Montrer que si $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ alors A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(K)$ si et seulement si elles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(L)$.

Exercice 59

Si

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

déterminer une réduite de Jordan de la matrice compagnon C_P. Déduire du théorème de réduction de Frobenius le théorème de réduction de Jordan.

Exercice 60

Soient $u \in \mathrm{End}_K(E)$ à polynôme caractéristique scindé. Montrer que u est cyclique si et seulement si pour toute valeur propre λ de u, u a un unique bloc de Jordan associé à la valeur propre u.