Licence de Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire
Contrôle du 4 novembre 2016
Début 10h15, durée 30 minutes
Documents et calculettes autorisés

L'exercice 3 est hors barème. Les étudiant(e)s disposant d'un aménagement pour raison médicale sont dispensé(e)s de la question 3 de l'exercice 2. Bon courage.

Exercice 1

Trouver la forme de Jordan sur $\mathbb{C}$ des matrices suivantes (en justifiant la réponse, mais sans calculer explicitement la base de Jordan)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k et $\phi_1, \ldots, \phi_m \in E^*$ des éléments de l'espace dual, et soit

$$\begin{aligned} b\colon E \times F &\to F^m = F \times \cdots \times F \\ (e, f) &\mapsto (\phi_1(e) \cdot f, \phi_2(e) \cdot f, \ldots, \phi_m(e) \cdot f) \end{aligned}$$

1. Montrer que b est bilinéaire.
2. En déduire qu'il existe une unique application linéaire $\Phi\colon E \otimes F \to F^m$ telle que $\Phi(e \otimes f) = b(e, f)$ pour tous $e \in E, f \in F$.
3. Supposons que la famille $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ soit libre, et soit $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \ldots \phi_m, \phi_{m+1}, \ldots \phi_n\}$ une base de E^*. Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n\}$ la base duale de E^{**} ; grâce à l'isomorphisme canonique $E^{**} \cong E$ (que l'on décrira), on peut considérer $\mathcal{B}$ comme une base de E. Décrire l'image d'un élément $e_i \otimes f \in E \otimes F$. En déduire que Φ est surjective.

Exercice 3

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; montrer que si $tr(u)^2 > 4 \cdot det(u)$, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que dire si on a l'égalité ?

Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

2 décembre 2016

Algébre linéaire et bilinéaire

(*Corrigé en italique*)

Calculatrices et documents autorisés.

Le sujet comporte trois exercices indépendants dont un en bonus. Les étudiant(e)s disposant d'un tiers temps sont dispensé(e)s des questions 3) et 4) de l'exercice II.
La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront prises en compte.

Exercice I
Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme quadratique réelle :

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 2yz + 2z^2$$

Corrigé (3 pts) : On a la suite d'égalités suivante :

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2(y^2 - yz + z^2) = x^2 + 2(y - \frac{1}{2}z)^2 + \frac{3}{2}z^2$$

Donner la base orthogonale associée à cette décomposition.
Corrigé (1 pt + 1 pt) : On a les matrices suivantes :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage, J la matrice de la forme Q dans la base d'origine et D dans la nouvelle base. Les vecteurs de la base orthogonale sont donc les vecteurs colonnes de la matrice P soient : $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1/2,1)$ *(et non les lignes de la matrice P) .*

Exercice II
On considère un espace vectoriel réel normé $(\mathbb{E}, \| \|)$ non réduit à 0. Soient deux applications linéaires continues u et v de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ telles que : $u \circ v - v \circ u = Id$.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$.
Corrigé (1,5 pts) : On raisonne par récurrence. L'égalité est clairement vraie pour $n = 1$. Montrons que si $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$ alors on a aussi $u^{n+1} \circ v - v \circ u^{n+1} = (n+1)u^n$. On a la suite d'implications suivante :

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1} \Longrightarrow u \circ (u^n \circ v - v \circ u^n) = nu \circ u^{n-1} \Longrightarrow u^{n+1} \circ v - u \circ v \circ u^n = nu^n$$

En utilisant la relation $u \circ v = Id + v \circ u$ on obtient :

$$u^{n+1} \circ v - u \circ v \circ u^n = nu^n \Longrightarrow u^{n+1} \circ v - (Id + v \circ u) \circ u^n = nu^n$$

En développant et en reportant le terme u^n à droite de l'égalité on obtient le résultat souhaité.

2) Montrer par l'absurde que u ne peut être nilpotent.
Corrigé (1,5 pts) : On raisonne par l'absurde, si u était nilpotent alors soit m_0 *le plus petit entier tel que* $u^{m_0} = 0$, *le résultat de la question précédente montre alors que* $u^{m_0-1} = 0$, *ce qui est absurde. Noter que* $m_0 \geq 1$.

3) À l'aide des questions précédentes, vérifier : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n \leq 2\| u \|\| v \|)$.
Corrigé (1 pt) : On a :

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1} \Longrightarrow \| u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1} \| \Longrightarrow \| nu^{n-1} \| \leq \| u^n \circ v \| + \| v \circ u^n \| .$$

Il suffit alors d'utiliser $\| u \circ v \| \leq \| u \|\| v \|$ *et que u ne peut être nilpotent pour en déduire :*

$$\| nu^{n-1} \| \leq \| u^n \circ v \| + \| v \circ u^n \| \Longrightarrow n \| u \|^{n-1} \leq 2 \| u \|^n \| v \| \Longrightarrow n \leq 2 \| u \|\| v \| .$$

d'où le résultat.(Noter que $\mathbb{E}$ *est pas nécessairement une algèbre)*

4) En déduire que l'hypothèse $u \circ v - v \circ u = Id$ est absurde.
Corrigé (1 pt) : Si cette hypothèse n'était pas absurde, en faisant tendre n vers $+\infty$ *on constate que* $\| u \|$ *ou* $\| v \|$ *n'est pas bornée.*

Exercice III (bonus)

Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice symétrique réelle de dimension n.

1) Montrer que les coefficients de la diagonale de la matrice M^2 sont des sommes de carrés.
Corrigé (1 pt) : Comme $m_{i,j} = m_{j,i}$ *en développant on constate que le i - ième coefficient diagonal s'écrit :* $\sum_{k=1}^{n}(m_{k,i})^2$, *ce qui est bien une somme de carrés.*

2) Justifier sans calcul pourquoi cette matrice M est diagonalisable.
Corrigé (1 pt) : C'est une matrice symétrique réelle.

3) On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit l'expression $S(M) = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + \cdots + (\lambda_n)^2$. Exprimer $S(M)$ en fonction des $m_{i,j}$.
Corrigé (1 pt) : Notons P une matrice telle que $Dia(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = P^{-1}MP$, *alors on a :* $Dia((\lambda_1)^2, (\lambda_2)^2, ..., (\lambda_n)^2) = P^{-1}M^2P$, *donc* $S(M) = Trace(M^2)$, *soit :* $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(m_{k,i})^2)$

4) L'application $M \longrightarrow S(M)$ est elle une forme quadratique définie positive ?
Corrigé (1 pt) : On peut écrire : $S(M) = \sum_{i=1}^{n}(m_{i,i})^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(m_{i,j})^2$, *c'est donc bien une forme quadratique définie positive.*

Université de Rennes 1 Année 2015/2016

Licence de Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire

Épreuve du 4 janvier 2016
Début 14 h - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes sont autorisées. Passez votre téléphone en mode avion.

– EXERCICE –

Diagonaliser la matrice réelle

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée : on déterminera une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$.

–PROBLÈME –

Soient K un corps de caractéristique différente de 2, E un espace vectoriel sur K, Φ une forme bilinéaire sur E et

$$Q : E \to K, \quad x \mapsto \Phi(x, x).$$

1) Montrer que la « symétrisée » de Φ :

$$\widetilde{\Phi} : E \times E \to K, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_1)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique et que

$$\forall x \in E, \quad \widetilde{\Phi}(x, x) = Q(x).$$

2) En déduire que Q est une forme quadratique sur E. Quelle est sa forme polaire ?

On suppose maintenant que $K = \mathbb{R}$ et que E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (de degré au plus d fixé si vous préférez).

3) Montrer que l'application

$$\Psi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (P_1, P_2) \mapsto \int_0^1 P_1(t)P_2(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

4) Déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\forall P \in E, \quad \left(\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t,$$

avec égalité si et seulement si P est constant.

5) Montrer que l'application

$$\Lambda : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (P_1, P_2) \mapsto P_1(1)P_2(1)$$

est une forme bilinéaire symétrique positive. Est-elle *définie* positive ?

6) Montrer que l'application

$$\Phi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (P_1, P_2) \mapsto \int_0^1 tP_1(t)P_2'(t)\mathrm{d}t$$

(notez bien qu'il s'agit du polynôme dérivé de P_2) est une forme bilinéaire sur E. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?

7) En déduire que l'application

$$Q : E \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto \int_0^1 tP(t)P'(t)\mathrm{d}t$$

est une forme quadratique sur E. Quelle est sa forme polaire ?

8) Montrer (en utilisant une intégration par parties) que l'on a

$$\widetilde{\Phi} = \frac{1}{2}(\Lambda - \Psi)$$

(attention, il s'agit de la « symétrisée » de Φ).

9) En déduire que si $P \in E$, on a
   (a) $P \perp 1$ relativement à Q si et seulement si $P(1) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
   (b) $Q(P) \leq 0$ si et seulement si $P(1)^2 \leq \int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t$, avec égalité si et seulement si $Q(P) = 0$ (c'est à dire, P isotrope relativement à Q).

10) On désigne par I l'hyperplan de E formé des polynômes qui s'annulent en 1. Montrer que la restriction de Q à I est définie négative.

On désigne par D la droite des polynômes constants et par H la partie orthogonale à D relativement à Q.

11) Montrer que la restriction de Q à H est négative. Est-elle *définie* négative ? Montrer que l'ensemble des vecteurs de H qui sont isotropes relativement à Q est exactement D.

12) Exhiber un polynôme P qui n'est *pas* orthogonal à 1 relativement à Q. En déduire qu'un polynôme constant non nul ne peut pas être dans le noyau (aussi appelé *radical*) de Q.

13) Montrer que si P est dans le noyau de Q, alors $P \in H$, puis que $P \in D$. En déduire que Q est non dégénérée.

Université de Rennes 1 Année 2016/2017

Licence de Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire

Épreuve corrigée du 4 janvier 2017
Début 16 h 30 - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes sont autorisées. Passez votre téléphone en mode avion. On traitera les deux problèmes (voir au verso) et on s'appliquera bien dans les calculs !

– PROBLÈME I (12 points + 3 bonus) –

On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x+z \\ y' & = & x-2y \\ z' & = & -x+y \end{array}\right. .$$

1) Réécrire le système sous la forme d'une équation $X' = AX$ ou A est une matrice carrée d'ordre 3.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

2) Quelle est la trace A ? quel est son déterminant ?

$$\operatorname{tr}(A) = -3 \quad \text{et} \quad \det(A) = -1.$$

3) Calculer le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda+1 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3.$$

4) Quelles sont ses valeurs propres ?

$$\lambda = -1.$$

5) Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

Si A était diagonalisable, son polynôme minimal serait $X + 1$ et on aurait donc $A + I = 0$.

6) Déterminer les sous-espaces propres de A.

On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + z & = & -x \\ x - 2y & = & -y \\ -x + y & = & -z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array} \right. .$$

On trouve donc la droite dirigée par

$$E_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7) En déduire la forme de Jordan J de A.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8) Montrer que si I désigne la matrice unité et N est une matrice carrée nilpotente d'ordre 3, on a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(aI + bN) = e^a(I + bN + \frac{b^2}{2}N^2).$$

Comme aI et bN commutent, et que $N^k = 0$ pour $k > 2$, on a

$$\exp(aI + bN) = \exp(aI)\exp(bN) = e^a(I + bN + \frac{b^2}{2}N^2).$$

9) Calculer $\exp(tJ)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

$$\exp(tJ) = \exp(-tJ + tN)$$

avec

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si bien que

$$\exp(tJ) = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

10) Déterminer une matrice inversible P telle que $J = P^{-1}AP$.

On part du vecteur propre E_1 ci-dessus et on résout successivement $AX = -X + E_1$ puis $AX = -X + E_2$ pour trouver E_2 et E_3. On a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x + z & = & -x + 1 \\ x - 2y & = & -y + 1 \\ -x + y & = & -z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 1 \\ x & = & y + 1 \end{array} \right. .$$

On peut donc prendre

$$E_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x + z & = & -x + 1 \\ x - 2y & = & -y \\ -x + y & = & -z + 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 1 \\ x & = & y \end{array} \right. .$$

On peut donc prendre

$$E_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On peut donc choisir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11) Calculer P^{-1}.

Le plus simple est de voir P comme la matrice de l'endomorphisme u donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ u(e_2) & = & e_1 + e_3 \\ u(e_3) & = & e_3 \end{array}\right.$$

et d'en déduire

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & u^{-1}(e_1) + u^{-1}(e_2) \\ e_2 & = & u^{-1}(e_1) + u^{-1}(e_3) \\ e_3 & = & u^{-1}(e_3) \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{rcl} e_1 - e_2 + e_3 & = & u^{-1}(e_2) \\ e_2 - e_3 & = & u^{-1}(e_1) \\ e_3 & = & u^{-1}(e_3) \end{array}\right.$$

si bien que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12) En déduire $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

$$\exp(tA) = P\exp(tJ)P^{-1} = e^{-t}\left(I + tPNP^{-1} + \frac{t^2}{2}PN^2P^{-1}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} PNP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} PN^2P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} (1-\frac{t^2}{2})e^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} & (t+\frac{t^2}{2})e^{-t} \\ (t-\frac{t^2}{2})e^{-t} & (1-t+\frac{t^2}{2})e^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ -te^{-t} & te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

13) Quelles sont les solutions du système différentiel aux conditions initiales $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = -1$? Vérifiez !

Le système $X' = AX$ avec condition initiale $X = X_0$ a pour solution $\exp(tA)X_0$. On fait le calcul

$$\begin{bmatrix} (1-\frac{t^2}{2})e^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} & (t+\frac{t^2}{2})e^{-t} \\ (t-\frac{t^2}{2})e^{-t} & (1-t+\frac{t^2}{2})e^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ -te^{-t} & te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

et on a donc

$$\begin{cases} x = -te^{-t} \\ y = (1-t)e^{-t} \\ z = -e^{-t} \end{cases}.$$

On vérifie que

$$\begin{cases} x' &= (-1+t)e^{-t} &= -x+z \\ y' &= (-2+t)e^{-t} &= x-2y \\ z' &= e^{-t} &= -x+y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1 \end{cases}.$$

– PROBLÈME 2 (8 points + 2 bonus) –

Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie), F un sous-espace vectoriel de E et $p : E \to F$ la projection orthogonale sur F.

1) Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

Par définition, on a $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. On applique alors le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$

et on en déduit la formule.

On désignera par $\overline{x} \in E/F$ la classe d'un $x \in E$. On rappelle que la norme quotient est alors définie par

$$\|\overline{x}\| := \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

2) Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \|\overline{x}\| = \|x - p(x)\|.$$

On peut de nouveau utiliser le théorème de Pythagore : si $y \in F$, alors

$$(x - p(x)) \perp (p(x) - y)$$

et donc

$$\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|y - p(x)\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2.$$

Il suit que l'on a toujours $\|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$ et l'égalité annoncée.

On suppose maintenant que $E = \text{Vect}(1, t, e^t) \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$(f, g) \to \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

et que $F = \text{Vect}(1, t)$.

3) Montrer que $(1, t)$ est une base orthogonale de F.

   On a

$$\langle 1, t\rangle = \int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

4) Calculer $\|1\|^2$ ainsi que $\|t\|^2$.

   On a

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = [t]_{-1}^{1} = 2 \quad \text{et} \quad \|t\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

5) Calculer $\langle 1, e^t\rangle$ et $\langle t, e^t\rangle$.

   On a

$$\langle 1, e^t\rangle = \int_{-1}^{1} e^t\mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-1}^{1} = e - e^{-1}$$

   et

$$\langle t, e^t\rangle = \int_{-1}^{1} te^t\mathrm{d}t = \left[(t-1)e^t\right]_{-1}^{1} = 2e^{-1}.$$

6) Utiliser ces résultats pour calculer $\|p(e^t)\|^2$.

   On applique la formule

$$\|p(x)\|^2 = \frac{\langle x, e_1\rangle^2}{\|e_1\|^2} + \frac{\langle x, e_2\rangle^2}{\|e_2\|^2}$$

   lorsque (e_1, e_2) est une base orthogonale de F :

$$\|p(e^t)\|^2 = \frac{(e - e^{-1})^2}{2} + \frac{(2e^{-1})^2}{2/3} = -1 + \frac{e^2}{2} + \frac{13}{2}e^{-2}.$$

7) Calculer $\|e^t\|^2$.

   On a

$$\|e^t\|^2 = \int_{-1}^{1} e^{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}.$$

8) En déduire que

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 \mathrm{d}t = 1 - 7e^{-2} \simeq 0,05.$$

On a

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 \mathrm{d}t = \inf_{f(t)\in F} \|e^t - f(t)\|^2 = \|\overline{e^t}\|^2 = \|e^t - p(e^t)\|^2$$

$$= \|e^t\|^2 - \|p(e^t)\|^2 = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \left(-1 + \frac{e^2}{2} + \frac{13}{2}e^{-2}\right) = 1 - 7e^{-2}.$$

Licence de Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire
Épreuve de rattrapage du 7 décembre 2016
Début 14h - Durée 30 mn (+ 10 mn)

La consultation de document et l'utilisation de calculette sont autorisées. Bon courage.

1) On considère la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz.$$

   (a) (1 point) Quelle est la matrice J de Q (dans la base canonique) ?
   (b) (3 points) Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme Q.
   (c) (1 point) En déduire l'existence d'une matrice P^{-1} et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera telles que $J = {}^tP^{-1}DP^{-1}$.
   (d) (1 point) Déterminer l'inverse P de la matrice P^{-1}.
   (e) (1 point) Quelle est la base dans laquelle la matrice de Q est D ?

2) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ des polynômes de degré au plus n.
   (a) (1 point) Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \right\| := \max_{i=1}^{n} |a_i|$$

   définit une norme sur E.
   (b) (1 point) Montrer que l'application

$$u : E \to E, P(X) \mapsto P'(X)$$

   est linéaire.
   (c) (1 point) Est-elle continue ?