UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre Linéaire 2

Feuille n°4 : Produit et somme directe d'espaces vectoriels

Exercice 39

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires ?

(a) $E = \{(x, y, z) | x = y = z\}$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

(b) $E = \{(3t, 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(2u + v, u + 2v, u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

(c) $E = \{(2u + v, u + 2v, u + v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(u + v, u + v, 2u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 40

Donner deux sous-espaces vectoriels distincts S et T de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 1, 1)) \oplus S = \text{Vect}((1, 1, 1)) \oplus T.$$

Exercice 41

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 42

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que F et H sont en somme directe dans E et que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 43

Soient K un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note E le sous-espace vectoriel de K^n engendré par $e = (1, \dots, 1)$ et on pose $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$. Vérifier que $E \oplus H = K^n$.

Exercice 44

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel. Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et $F \subseteq H$. Montrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

Exercice 45

Soient E un K-espace vectoriel et F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que :

(a) F et G sont supplémentaires dans E ;

(b) F' et G' sont supplémentaires dans E ;

(c) $F' \subseteq G$.

Montrer que $F, F', G \cap G'$ sont en somme directe de somme E.

Exercice 46

Soient E un K-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $x_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et les droites vectorielles $Kx_1, \ldots, Kx_n$ sont en somme directe.

Exercice 47

Soient K un corps, E un K-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

et $E_i \subseteq F_i$ pour tout $i\{1, \ldots, n\}$. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i = F_i$.

Exercice 48

Soit S une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-x \in S$ pour tout $x \in S$. On note $\mathbb{R}^S$ l'ensemble des applications de S dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on pose

$$\mathscr{P} = \{f \in \mathbb{R}^S : \forall x \in S, f(-x) = f(x)\} \qquad \mathscr{I} = \{f \in \mathbb{R}^S : \forall x \in S, f(-x) = -f(x)\}.$$

Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^S$.

Exercice 49

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on pose

$$\mathscr{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \in S, f(1) = 0\} \qquad \mathscr{G} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}.$$

Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 50

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel. On se donne des sous-espaces vectoriels F, G, F', G' de E. On suppose que les sous-espaces F, G sont supplémentaires dans E, que les sous-espaces F', G' sont supplémentaires dans E et que $F' \subseteq G$.

1 Montrer que $F, F', G \cap G'$ sont en somme directe.

2 Montrer que $F' + (G \cap G') = G$.

3 En déduire que E est somme directe des sous-espaces $F, F', G \cap G'$.

Exercice 51

Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de K deux à deux distincts. Montrer que les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E), \ldots, F_n = \operatorname{Ker}(f - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$$

sont en somme directe.

Exercice 52

Soient E un K-espace vectoriel et $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$ et $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$. Montrer que $p = q$.

Exercice 53

Soient E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$;

(b) f et g sont des projecteurs et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 54

Soient E un K-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. On pose $q = \operatorname{Id}_E - p$.

(a) Montrer que q est un projecteur de E.

(b) Déterminer le noyau et l'image de q.

(c) On pose

$$\mathscr{A} = \{f \in \mathscr{L}(E) : \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ p\} \qquad \mathscr{B} = \{g \in \mathscr{L}(E) : \exists v \in \mathscr{L}(E), f = v \circ q\}.$$

Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 55

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel.

1 Rappeler la définition d'un projecteur de E.

2 Soient $\pi_1, \ldots, \pi_n$ des projecteurs.

a On suppose que $\pi_i \circ \pi_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(\pi_1), \ldots, \operatorname{Im}(\pi_n)$ sont en somme directe.

b On suppose $n = 2$. Si les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(\pi_1), \operatorname{Im}(\pi_2)$ sont en somme directe, a-t-on nécessairement $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ et $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$? (Si c'est le cas, montrer l'assertion, sinon, donner un contre-exemple).

3 Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe. Montrer qu'il existe des projecteurs de E tels que $F_i = \operatorname{Im}(\pi_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\pi_i \circ \pi_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$.