Calcul de modes guidés en optique intégrée

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Fabrice MAHE
ENSTA / GHN (URA D0853 du CNRS)
Centre de l'Yvette
Chemin de la Hunière
91120 PALAISEAU

Nous nous intéressons à des guides d'ondes stratifiés qui ont un indice de réfraction invariant dans la direction de propagation (Ox_3) et des dimensions transversales supposées infinies ([1]) :

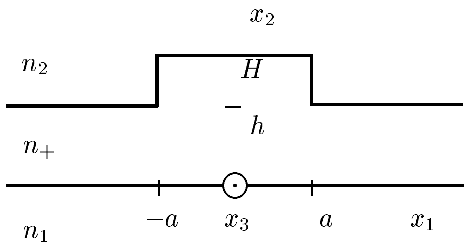

Fig.1 *Profil d'indice* $n(x_1, x_2)$ *d'un guide "ruban" :* $n_+ > n_1 \geq n_2$

Un **mode guidé** ([2]) est une solution non nulle des équations de Maxwell de la forme suivante :

$$(1) \qquad (\mathbb{E}, \mathbb{H})\,(x_1, x_2, x_3, t) = Re\left((E, H)(x_1, x_2)\, e^{i(kc_0 t - \beta x_3)}\right)$$

avec $k, \beta \in \mathbb{R}$ et $E, H \in \left[L^2(\mathbb{R}^2)\right]^3$. c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, k le nombre d'onde, β la constante de propagation du mode (vitesse de phase $v = \frac{kc_0}{\beta}$), $\mathbb{E}$ le champ électrique, $\mathbb{H}$ le champ magnétique.

Sous les hypothèses de faible guidage, les équations de Maxwell deviennent alors, en approximation scalaire :

$$(2) \qquad \begin{cases} u \in H^2(\mathbb{R}^2), u \neq 0, \beta \in \mathbb{R}^+, \ \textit{tel que} : \\ -\triangle u - k^2 n^2 u = -\beta^2 u\,, \ \ \textit{sur} \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

où u désigne une composante transverse quelconque du champ électromagnétique.

Il s'agit donc de résoudre, à k fixé, un **problème bidimensionnel de valeurs propres** pour l'opérateur A_k défini par $A_k u = -\triangle u - k^2 n^2 u$. Pour cela, nous utilisons le **principe du min-max** qui s'applique aux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement. Il permet de caractériser les valeurs propres $\lambda_m(k)$ situées en-dessous du spectre continu. Dans la suite, nous noterons $\gamma(k)$ la borne inférieure du spectre continu qui peut être obtenue analytiquement.

À l'aide du principe du min-max, on établit le **principe de comparaison** suivant :

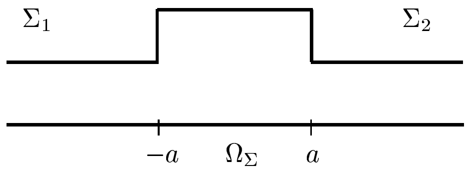

Fig.2

Soient Ω_Σ la bande située entre Σ_1 et Σ_2, et $\lambda_m^D(k)$ (resp. $\lambda_m^N(k)$) la m$^{\text{ième}}$ valeur propre du problème $-\triangle u - k^2 n^2 u = \lambda u$ dans Ω_Σ où l'on impose une condition aux limites de Dirichlet (resp. Neumann) homogène sur $\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$. Alors, on montre que :

(3) $$\min(\lambda_m^N(k),\, \gamma(k)) \leq \lambda_m(k) \leq \lambda_m^D(k)$$

Si les frontières Σ_1 et Σ_2 sont placées exactement en $x_1 = \pm a$, les valeurs $\lambda_m^D(k)$ et $\lambda_m^N(k)$ peuvent être obtenues analytiquement. Nous pouvons ainsi estimer le nombre de modes à k fixé et donner un encadrement des constantes de propagation.

Méthode numérique

Pour utiliser une méthode éléments finis, on veut se ramener à un domaine borné de calcul. On plonge le guide dans une bande horizontale et on impose soit la nullité du champ, soit la nullité de sa dérivée normale, sur les deux frontières fictives Γ_1 et Γ_2. Grâce à un principe de comparaison analogue au précédent on obtient ainsi un encadrement des valeurs recherchées.

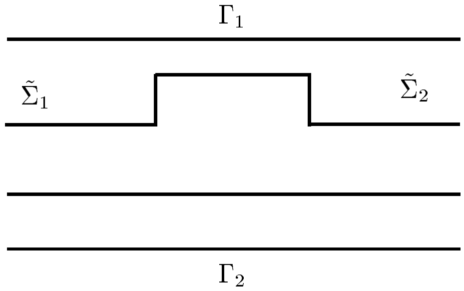

Fig.3

On écrit sur $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ une condition aux limites exacte en utilisant la décomposition en série du champ dans le domaine extérieur (méthode des éléments finis localisés [4]).

Si le champ est bien confiné dans la direction verticale, il n'en est pas de même dans la direction horizontale (cf. Fig. 4). Ainsi, on peut imposer la nullité du champ sur Γ_1 et Γ_2 sans avoir à mettre ces frontières trop loin. En revanche, la méthode des éléments finis localisés permet de placer les frontières $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ aussi près que l'on veut du cœur du guide.

Cette méthode est en cours d'implémentation. Afin d'illustrer la nécessité d'écrire sur Σ une condition exacte, nous présentons ci-dessous le mode fondamental dans le demi-domaine (Fig.4.a) obtenu lorsque l'on impose sur Γ une condition de Dirichlet et sur Σ successivement une condition de Dirichlet (Fig.4.b) et une condition de Neumann (Fig.4.c). On note une différence significatice entre les deux résultats.

Fig.4.a **Fig.4.b** **Fig.4.c**

[1] M.J. ROBERTSON, S. RITCHIE AND P. DAYAN, *Semiconductor waveguides : analysis of optical propagation in single rib structures and directional couplers*, IEE PROCEEDINGS, Vol. 132, No. 6, December 1985.
[2] D. MARCUSE, *Theory of dielectric optical waveguides*, Academic Press, 1974.
[3] A. BAMBERGER AND A.S. BONNET, *Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber*, SIAM J. MATH. ANAL.,Vol. 21, No. 6, pp. 1487-1510, November 1990.
[4] M. LENOIR AND A. TOUNSI, *The localised finite element method and its applications to the two-dimensional sea-keeping problem*, SIAM J. NUMER. ANAL.,Vol. 25, No. 4, pp. 729-752, August 1988.