Modes guidés dans un milieu stratifié perturbé

Anne-Sophie BONNET, Fabrice MAHE
ENSTA / GHN
Centre de l'Yvette
Chemin de la Hunière
91120 PALAISEAU

De la même manière que l'on parle d'électronique intégrée, on peut parler d'optique intégrée. C'est de ce domaine que la présente étude tire ses motivations physiques. Nous nous intéressons à des guides d'ondes stratifiés qui ont un indice de réfraction invariant dans la direction de propagation (on parlera donc de profil d'indice), et des dimensions transversales supposées infinies (cf. fig.1 et 2).

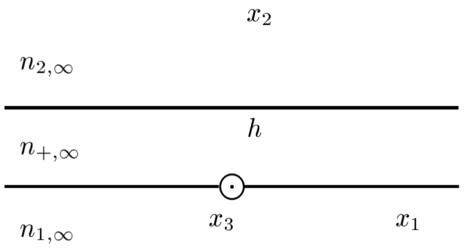

Fig.1 *Profil d'indice $n'(x_1,x_2)$ d'un milieu stratifié à trois couches.*

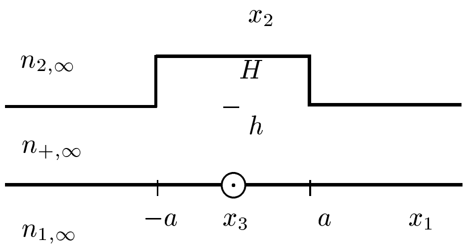

Fig.2 *Profil d'indice $n(x_1,x_2)$ d'un guide optique intégré.*

avec $n_+ \geq n_{+,\infty} > n_{1,\infty} \geq n_{2,\infty}$; où $n_+ = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} n(x)$ et (Ox_3) la direction de propagation.

La perturbation du milieu stratifié suffit pour observer, à certaines fréquences, des ondes guidées plus ou moins confinées dans la bande d'indice fort et au voisinage de la perturbation. Ces guides ont déjà été le sujet d'études numériques ([2]) mais de peu d'études théoriques. Les problèmes rencontrés présentent des analogies avec ceux que pose l'hydrodynamique navale, ce qui permet des échanges fructueux.

Un **mode** est une solution non nulle des équations de Maxwell de la forme suivante :

$$(1)\qquad (\mathbb{E},\mathbb{H})\,(x_1,x_2,x_3,t) = Re\left((E,H)(x_1,x_2)\,e^{i(kc_0t-\beta x_3)}\right)$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, k le nombre d'onde, β la constante de propagation du mode (vitesse de phase $v = \frac{kc_0}{\beta}$), $\mathbb{E}$ le champ électrique, $\mathbb{H}$ le champ magnétique.
Ce mode est dit **guidé** s'il se propage sans s'atténuer (i.e. : $k,\beta \in \mathbb{R}$) et si l'énergie transverse est finie (i.e. : $E,H \in \left[L^2(\mathbb{R}^2)\right]^3$).
Sous les hypothèses de faible guidage, les équations de Maxwell deviennent alors, en approximation scalaire :

$$(2)\qquad \begin{cases} u \in H^2(\mathbb{R}^2), u \neq 0, \beta \in \mathbb{R}^+, \;\; \textit{tel que :} \\ -\triangle u - k^2n^2u = -\beta^2 u\,, \;\; \textit{sur}\;\; \mathbb{R}^2\,. \end{cases}$$

où u désigne une composante transverse quelconque du champ électromagnétique.
Il s'agit donc de résoudre un **problème bidimensionnel de valeurs propres**. En effet, $-\beta^2$ est valeur propre de l'opérateur A_k, défini par $A_ku = -\triangle u - k^2n^2u$, qui dépend du milieu de propagation par le profil d'indice n et de la fréquence de l'onde par le nombre d'onde k. Pour un profil d'indice $n(x_1,x_2)$ donné, on cherche les courbes de dispersion qui à k associent $\lambda_m(k)$, m-ième valeur propre de A_k.
Pour déterminer les valeurs propres de A_k nous utilisons le **principe du min-max** qui s'applique aux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement. Il permet de caractériser les valeurs propres situées en-dessous du spectre continu.
Pour déterminer le spectre continu de A_k, on calcule celui de l'opérateur correspondant à l'indice non perturbé $n'(x_1,x_2)$. En effet, une perturbation du profil d'indice localisée dans un compact ne modifie pas le spectre continu. Ceci vient du fait qu'alors l'opérateur associé à l'indice perturbé ne diffère du

précédent que par un opérateur qui lui est relativement compact. En utilisant la transformée de Fourier, on peut montrer que :

Théorème 1 :
Le spectre continu de A_k est l'intervalle $[\gamma(k), +\infty[$, où

$$\gamma(k) = \inf_{\substack{\varphi \in H^1(\mathbb{R}) \\ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}=1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\varphi}{dx_2} \right|^2 - k^2 n'^2 |\varphi|^2 \; dx_2 \tag{3}$$

Remarque :
$\gamma(k)$ est la première valeur propre de l'opérateur associé au guide plan monodimensionnel d'indice n', quand elle existe. Sinon $\gamma(k) = -k^2 n_{1,\infty}^2$.

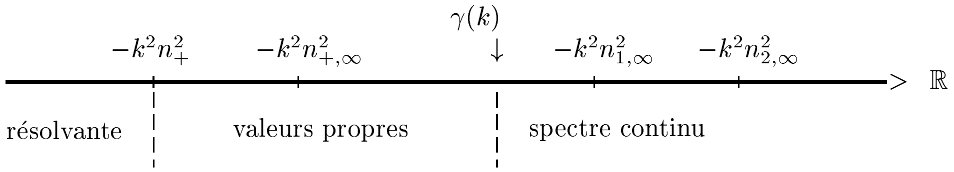

Fig.3 *Récapitulation*

L'encadrement suivant des valeurs propres $-k^2 n_+^2 \leq -\beta^2 \leq \gamma(k)$, nous dit que la vitesse de phase du mode $v = \frac{kc_0}{\beta}$ est comprise entre $\frac{c_0}{n_+}$ et $\frac{kc_0}{\sqrt{-\gamma(k)}}$, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se propager moins vite qu'une onde plane dans un milieu d'indice n_+, ni plus vite qu'une onde plane dans le guide plan.
Soit $N(k)$ le nombre de valeurs propres en-dessous du spectre continu.

Théorème 2 :
1) Si $n \leq n'$, il n'y a pas de mode guidé : $N(k) = 0, \;\; \forall k$.
2) Pour un guide symétrique ($n_{1,\infty} = n_{2,\infty}$), si $n \geq n'$ et $n > n'$ sur un ensemble de mesure non nulle, il y a au moins un mode guidé pour toute fréquence : $N(k) \geq 1, \;\; \forall k$.
3) Pour un guide asymétrique, on montre l'existence d'une fréquence de coupure inférieure en-dessous de laquelle, il n'y a pas de mode guidé, et en-dessus de laquelle, il y en a toujours au moins un.

A haute fréquence, il y a une grande diversité de situations, et généralement $N(k)$ n'est pas une fonction croissante de la fréquence :
1) Pour le guide représenté sur la fig.1, $N(k)$ est borné et non nul à haute fréquence.
2) Si le guide est tel que $n_+ > n_{+,\infty}$: $N(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.
3) Pour le cas suivant :

- fig.3 -

il n'y a pas de mode guidé à haute fréquence : $\exists K \in \mathbb{R}^+$, tel que si $k > K$, $N(k) = 0$.
4) Si on prend $h = h^*$, il y en a un seul à haute fréquence.

Conclusion :
Le fait d'avoir plus de trois couches ne semble pas affecter notablement les techniques de démonstration, ce qui permettra de généraliser les résultats précédents.
La discrétisation se trouve confrontée au problème du milieu non borné qui pourra être résolu par la méthode de couplage éléments finis-représentation intégrale (ou celle des éléments finis localisés) déjà expérimentée au Groupe Hydrodynamique Navale.
Cette étude est un préliminaire à l'étude vectorielle des modes guidés dans les guides optiques intégrés, et fait l'objet d'une collaboration avec le L.E.T.I. (Grenoble).

[1] A. BAMBERGER AND A.S. BONNET, *Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber*, SIAM J. MATH. ANAL.,Vol. 21, No. 6, pp. 1487-1510, November 1990.
[2] M.J. ROBERTSON, S. RITCHIE AND P. DAYAN, *Semiconductor waveguides : analysis of optical propagation in single rib structures and directional couplers*, IEE PROCEEDINGS, Vol. 132, No. 6, December 1985.