Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Master 1 Mathématiques - M2CS - 2011-2012
Projet tutoré

Résolution numérique d'une EDP dynamique

Novembre 2011

Sujet proposé par : Fabrice Mahé[1]

Objectifs : Programmer une méthode de résolution numérique d'équation différentielle, l'utiliser avec la méthode des éléments finis pour résoudre une EDP dynamique et éventuellement en faire une application à un problème de thérapie thermique.

1 Résolution numérique d'une équation différentielle et programmation C

Il s'agit de calculer une approximation de la solution $y \in \mathbb{R}^m$ continue sur $[0,T]$ de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in]0,T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

où la fonction f est L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant du sujet.

• Choix d'une méthode adaptée en précisant ses caractéristiques et ses avantages.

• Programmer en C cette méthode et vérifier numériquement l'ordre de convergence sur un (des) exemple(s) bien choisi(s).

2 Méthode des éléments finis

On considère l'équation au dérivées partielles :

$$-\operatorname{div}(\beta(x)\nabla u(x)) + \gamma(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega,$$

sur un domaine Ω (dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en fonction des symétries du problème) avec des conditions sur la frontière de Ω. Les fonctions β, γ et f ne sont pas fixées à priori (mais β et γ pourront être considérées positives).

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant de l'existence de solution et de la résolution numérique de cette équation.

• Donner des conditions d'existence et d'unicité de la solution pour des conditions au bord de type Neumann et Dirichlet.

• Écrire la formulation faible du problème et l'étudier.

• Discrétiser le problème par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ et étudier le problème discrétisé.

• Programmer en Matlab la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème en dimension 1 en utilisant les fonctions d'intégration de matlab. Cette application devra

1. Fabrice Mahé - bureau 116 du bâtiment 22 - 02 23 23 60 48 - fabrice.mahe@univ-rennes1.fr

pouvoir être utilisée pour différentes valeurs des paramètres. Mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode.

3 Résolution du problème dynamique

On considère maintenant l'équation au dérivées partielles d'évolution :

$$\alpha(x)\partial_t u(t,x) - \mathrm{div}(\beta(x)\nabla u(t,x)) + \gamma(x)u(t,x) = f(t,x),\ \ (t,x) \in Q =]0,T[\times\Omega,$$

sur un domaine Ω (dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en fonction des symétries du problème) avec des conditions sur la frontière de Ω. Les fonctions α, β, γ et f ne sont pas fixées à priori (mais α, β et γ pourront être considérées positives).

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant de l'existence de solution et de la résolution numérique de cette équation.

• Donner des conditions d'existence et d'unicité de la solution pour des conditions au bord de type Neumann et Dirichlet (éventuellement pour des valeurs particulières des paramètres) et une condition initiale.

• Écrire la formulation faible en espace du problème et l'étudier.

• Discrétiser le problème en espace par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ et étudier le problème discrétisé en espace sous forme de système d'équations différentielles.

• Utiliser la méthode numérique du premier paragraphe pour discrétiser le problème en temps.

• Utiliser la méthode de résolution numérique d'équation différentielle programmée en C et la méthode des éléments finis programmée en Matlab pour résoudre ce problème en dimension 1 d'espace. Cette application devra pouvoir être utilisée pour différentes valeurs des paramètres. Mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode et les relations entre le pas de temps et le pas d'espace.

4 Extension de la méthode

Étendre cette étude en dimension 2 d'espace en utilisant les fonctions d'intégration de matlab et l'appliquer à un problème de thérapie thermique.

Bibliographie

1- *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, P.A. Raviart, J.M Thomas, Masson, Paris, 1983.