Université de Rennes 1 Master 1 Mathématiques - M2CS - 2011-2012
UFR Mathématiques Projet tutoré

Optimisation et algorithmes stochastiques

Décembre 2011

Sujet proposé par : Valérie Monbet [1] et Fabrice Mahé [2]

Objectifs : Étudier et programmer des méthodes d'optimisation stochastiques, les comparer avec les méthodes de gradient, les appliquer à un problème inverse d'estimation des paramètres d'une équation aux dérivées partielles.

1 Méthodes de gradient et programmation C

Il s'agit de calculer une approximation de la solution $\hat{y}$ minimisant une fonctionnelle $J(y)$ sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^m$:

$$\text{Trouver } \hat{y} \in \Omega \text{ tel que } J(\hat{y}) \leq J(y), \forall y \in \Omega.$$

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant du sujet.
• Étudier les conditions d'existence et d'unicité au problème d'optimisation ci-dessus.
• Décrire et étudier les méthodes du gradient et du gradient conjugué (caractéristiques, avantages, conditions d'utilisation, convergence, ...).
• Programmer en C les méthodes du gradient et du gradient conjugué et les tester sur des exemples bien choisis (fonctions quadratiques présentant des vallées rectilignes ou circulaires, avec un ou plusieurs minima locaux). Mettre en évidence numériquement les avantages et les limites de ces méthodes.

2 Méthodes d'optimisation stochastique

Pour palier aux limites des méthodes de gradient, en particulier lorsque la fonctionnelle présente plusieurs minima locaux, on utilise des algorithmes d'optimisation stochastiques qui permettent de mettre en place des stratégies d'exploration de l'espace et d'éviter de rester "piégé" dans le domaine d'attraction d'un minimum local.

Nous étudierons successivement plusieurs algorithmes d'optimisation stochastique en commençant par un algorithme naïf et en allant vers des méthodes proposant des stratégies plus évoluées (comme par exemple le recuit-simulé). Les algorithmes seront implémentés et testés sur les mêmes exemples typiques que les méthodes de gradient puis dans la section suivante sur un problème d'estimation des paramètres d'une EDP.

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant du sujet.
• Faire une liste des différents types de méthodes et sélectionner deux ou trois méthodes particulièrement intéressantes. Décrire et étudier ces méthodes

1. Valrie Monbet - bureau 313 du bâtiment 22 - 02 23 23 59 55 - valerie.monbet@univ-rennes1.fr
2. Fabrice Mahé - bureau 116 du bâtiment 22 - 02 23 23 60 48 - fabrice.mahe@univ-rennes1.fr

• Programmer en Matlab les méthodes sélectionnées et les tester sur les exemples déjà traités plus éventuellement d'autres pour mettre en évidence leurs avantages et inconvénients, tester leur robustesse.

3 Estimation des paramètres d'une EDP

3.1 Résolution de l'EDP par la méthode des éléments finis

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$-\operatorname{div}(\beta(x)\nabla u(x)) + \gamma(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega,$$

sur un domaine Ω (dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en fonction des symétries du problème) avec des conditions sur la frontière de Ω. Les fonctions β, γ et f ne sont pas fixées a priori (mais β et γ pourront être considérées positives).

• Recherche des livres de la bibliothèque traitant de l'existence de solution et de la résolution numérique de cette équation.

• Donner des conditions d'existence et d'unicité de la solution pour des conditions au bord de type Neumann et Dirichlet.

• Écrire la formulation faible du problème et l'étudier.

• Discrétiser le problème par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ et étudier le problème discrétisé.

• Programmer en Matlab la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème en dimension 1 en utilisant les fonctions d'intégration de matlab. Cette application devra pouvoir être utilisée pour différentes valeurs des paramètres. Mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode.

3.2 Résolution du problème inverse par une méthode d'optimisation

On considère maintenant que la solution de l'équation est connue (obtenue par exemple par des mesures), on la note u_{obs}, et on cherche à déterminer les paramètres β et γ de l'équation (éventuellement aussi f et les données sur le bord). Pour cela, on va chercher les valeurs de β et γ qui vont minimiser la fonctionnelle

$$J(\beta, \gamma) = \frac{1}{2}\|u - u_{obs}\|^2.$$

• Dans un premier temps, on considère d'abord les fonctions β et γ constantes. Construire un exemple test : les données α, β, f et la solution exacte notée u_{obs}. Représenter le graphe de la fonctionnelle $J(\beta, \gamma)$. Appliquer les méthodes stochastiques étudier précédemment pour calculer une approximation de β et γ.

• Dans un second temps, on considèrera les fonctions β et γ variables en x. Elles seront donc représentées par les vecteurs de la valeur des fonctions aux sommets de la discrétisation. Tester les méthodes stochastiques dans ce cas.

Bibliographie

1- *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, P.A. Raviart, J.M Thomas, Masson, Paris, 1983.

2- *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, P.G. Ciarlet, Masson, Paris, 1988.

3- *Handbook of Computational Statistics - Stochastic Optimization*, J. Gentle, W. Härdle, Y. Mori, J.C. Spall, Springer, Heidelberg, 2004.