

## Résolution numérique d'une EDP avec bilaplacien

Janvier 2012

Sujet proposé par : Fabrice Mahé<sup>1</sup>

**Objectifs** : Programmer la méthode d'intégration numérique de Gauss, l'utiliser dans la méthode des éléments finis et résoudre une EDP avec bilaplacien.

### 1 Intégration numérique de Gauss-Lobatto et programmation C

Il s'agit de calculer une approximation de l'intégrale de la fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

par la méthode de Gauss-Lobatto.

- Recherche des livres de la bibliothèque traitant du sujet.
- Synthèse de la méthode, de ses caractéristiques et de ses avantages.
- Programmer en C cette méthode et vérifier numériquement le degré et l'ordre de convergence sur un exemple bien choisi.

### 2 Méthode des éléments finis

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$-\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u(x)) + \beta(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

sur un domaine  $\Omega$  (dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  en fonction des symétries du problème) avec des conditions sur la frontière de  $\Omega$ . Les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $f$  ne sont pas fixées a priori (mais  $\alpha$  et  $\beta$  pourront être considérées positives).

- Recherche des livres de la bibliothèque traitant de l'existence de solution et de la résolution numérique de cette équation.
- Donner des conditions d'existence et d'unicité de la solution pour des conditions au bord de type Neumann et Dirichlet.
- Écrire la formulation faible du problème et l'étudier.
- Discrétiser le problème par des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et étudier le problème discrétisé.
- Programmer en Matlab la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème en dimension 1 en utilisant la méthode de Gauss-Lobatto programmée en C. Cette application devra pouvoir être utilisée pour différentes valeurs des paramètres. Mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode.

---

1. Fabrice Mahé - bureau 116 du bâtiment 22 - 02 23 23 60 48 - fabrice.mahe@univ-rennes1.fr

### 3 Résolution du problème avec bilaplacien

On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles d'évolution :

$$\Delta (\alpha(x)\Delta u(x)) - \beta(x)\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

sur un domaine  $\Omega$  (dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  en fonction des symétries du problème) avec des conditions sur la frontière de  $\Omega$ . Les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $f$  ne sont pas fixées à priori (mais  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pourront être considérées positives).

- Recherche des livres de la bibliothèque traitant de l'existence de solution et de la résolution numérique de cette équation.
- Donner des conditions d'existence et d'unicité de la solution pour des conditions au bord de type Neumann et Dirichlet (éventuellement pour des valeurs particulières des paramètres) et une condition initiale.
- Écrire la formulation faible du problème et l'étudier.
- Écrire le problème comme un système d'EDP d'ordre 2.
- Discrétiser le problème par des éléments finis  $\mathbb{P}_k$  en utilisant ce qui a été fait au paragraphe précédent et étudier le problème discrétisé : quelle valeur choisir pour  $k$  ?
- Programmer en Matlab la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème en dimension 1 en utilisant ce qui a été fait au paragraphe précédent. Construire un exemple pour tester la méthode et mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode.

### 4 Extension de la méthode

Étendre cette étude en dimension 2 en utilisant les fonctions d'intégration de matlab.

### Bibliographie

1- *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, P.A. Raviart, J.M Thomas, Masson, Paris, 1983.