Systèmes de réaction-diffusion

Michel Pierre, Rozenn Texier-Picard

L'objectif du cours est de présenter divers aspects de l'analyse mathématique des équations d'évolution de type "réaction-diffusion", qui interviennent dans des domaines variés comme la chimie, la biologie, la dynamique des populations, la thermique, mais aussi la physique des plasmas, la cristallisation, la médecine, etc. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - D\Delta u(t,x) = f(u(t,x)).$$

Ici, le temps t varie dans un intervalle $[0,T]$ et x dans un ouvert Ω de $I\!R^N$; l'inconnue u est une fonction définie sur $[0,T] \times \Omega$ à valeurs dans $I\!R^m$, qui, dans les applications visées, correspond à un m-vecteur de concentrations d'espèces chimiques, de températures, de densités de populations, etc. Dans cette écriture, D est une $m \times m$ matrice qui sera le plus souvent diagonale, Δ désigne le laplacien, et $f : I\!R^m \to I\!R^m$ est une fonction non-linéaire modélisant les phénomènes de réaction mis en jeu (réaction chimique, par exemple).

L'approche choisie consistera à se ramener à un système de la forme

$$\frac{du}{dt}(t) + A\,u(t) = F(u(t)),$$

où $u : [0,T) \to X$ est une fonction inconnue du temps à valeurs dans un espace de Banach X (par exemple $L^\infty(\Omega)$), A un opérateur "de diffusion" agissant de X dans X, et $F : X \to X$ une fonction non linéaire. Dans le cas où X est de dimension finie, on retrouve le cadre classique des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) dont on s'inspirera tout au long du cours.

Nous aborderons des questions aussi variées que possible parmi lesquelles l'existence locale de solutions, l'existence globale en temps ou l'éventuelle explosion en temps fini, l'unicité, la régularité, le comportement asymptotique, les ensembles invariants, le principe du maximum et l'ordre (ou le désordre), etc. Nous exposerons les théories bien établies, en travaillant souvent par analogie avec le cas des EDO et nous évoquerons aussi des problèmes ouverts et d'actualité.

Plusieurs exemples seront décrits explicitement, avec la modélisation dont ils sont issus, et nous indiquerons les algorithmes de base pour simuler numériquement l'évolution de leurs solutions. Il sera demandé de les implémenter effectivement, parallèlement à ce cours, afin d'acquérir une intuition des divers comportements évolutifs qui deviennent très vite complexes et surprenants.

Le niveau requis est celui d'un M1 classique de mathématiques. Toutes les notions nécessaires seront rappelées : une connaissance minimale de la notion d'espace de Banach, combinée avec une bonne curiosité et une bonne motivation, devrait suffire. Le cours "Outils fondamentaux pour les EDP et leur discrétisation" peut toutefois constituer une bonne introduction.