# MAG 2 (Mathématiques générales 2)

Ce qui suit n'a pas la prétention de définir un modèle strict de rédaction. Il nous arrive tous, pour une raison ou une autre, de déroger à ces préceptes. L'essentiel est d'en avoir pleine conscience et d'être capable, si nécessaire, de rédiger de manière parfaitement rigoureuse.

## *Le statut des énoncés*

*Beaucoup de candidats parlent du « principe de récurrence » sans avoir conscience qu'il s'agit en fait d'un théorème dont d'ailleurs bon nombre de candidats sont difficilement capables de fournir un énoncé correct. Rappelons à ce sujet qu'une théorie mathématique ne contient pas de « principe » (contrairement à une théorie physique) mais uniquement des axiomes, des définitions et des théorèmes.* (rapport du jury du CAPES externe de mathématiques 2004).

– **Axiome**
  Dans une théorie quelconque (mathématique ou non), on appelle *axiomes* les propositions que la théorie tient pour vraies (vérités premières).
  *Exemple : Un des axiomes d'Euclide s'énonce sous la forme : « Par un point extérieur à une droite passe une unique parallèle ».*
  *Il existe toutefois des géométries qui n'utilisent pas cet axiome (géométrie de la sphère par exemple) !*
– **Définition**
  On appelle *définition* toute manière de donner un nom (non encore utilisé !) à un objet vérifiant une certaine propriété. La rédaction d'une définition est donc de la forme : « On appelle *truc* tout objet tel que ... » ou encore : « Soit $x$ un objet. On dit que $x$ est un *truc* s'il vérifie ... ».
  Une définition ne devrait donc jamais contenir l'expression « si et seulement si » ...
  Remarque : Il faut bien sûr vérifier que les objets introduits ont bien un sens. Par exemple, écrire « soit $n$ le plus grand entier vérifiant la propriété $P$ » nécessite d'avoir démontré au préalable qu'il existe bien un tel entier... *Exemple : « Soit $p$ un entier naturel non nul. On dit que $p$ est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$. »*
– **Théorème**
  On appelle *théorème* tout résultat qui peut être mathématiquement démontré. C'est donc un énoncé dont on peut démontrer l'exactitude, c'est-à-dire une assertion qui peut être établie comme vraie au travers d'un raisonnement logique construit à partir des axiomes.
  Dans la pratique, ces énoncés peuvent bénéficier de différentes appellations suivant l'importance que leur accorde l'auteur. Ainsi, on appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un « plus gros » théorème.
  On appelle *corollaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un « plus gros » théorème. Une *proposition* est aussi, dans les textes mathématiques, un analogue de théorème : c'est un énoncé qui a été ou qui va être démontré, que l'auteur juge avoir une portée suffisante pour ne pas être un simple lemme, mais avoir moins d'importance que ceux qu'il qualifie de théorème.
  Il faut signaler également la notion de *conjecture* qui correspond à une assertion mathématique non (encore) démontrée (mais que l'on pense être vraie).

*Exemple (Conjecture de Golbach) : Tout entier pair supérieur ou égal à quatre peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers.*

# *La rédaction en mathématiques*

*(. . . ) la qualité de la présentation et de la rédaction sont donc des éléments très importants de l'appréciation des copies. On attend des raisonnements correctement structurés, les objets étant proprement introduits, les hypothèses clairement formulées tout comme les conclusions, tout cela avec un usage correct des notations mathématiques, de la grammaire et de l'orthographe.* (rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques 2013)
*Le jury invite les candidats à soigner davantage la rédaction, en particulier dans les premières questions de chaque problème et à se montrer précis et rigoureux tout au long de leur copie.* (rapport du jury du CAPES externe de mathématiques 2013).

## Qu'est-ce-que bien rédiger ?

Un devoir de mathématiques est bien rédigé lorsque tous les raisonnements sont complets (sans ambiguïtés ni failles) et peuvent être compris sans effort par n'importe quelle personne connaissant le programme de mathématique requis. Une bonne rédaction n'est pas pour autant synonyme d'une longue rédaction ! Une bonne copie ne doit contenir que les arguments nécessaires, sans redondance ni phrase inutile.
*Par exemple : dans l'affirmation « Le quadrilatère $ABCD$ ayant ses quatre côtés égaux et des diagonales se coupant en leur milieu, c'est un losange », le fait que les diagonales se coupent en leur milieu est parfaitement superflu puisque c'est une conséquence de la propriété précédente.*
Bien rédiger aide à clarifier ses idées et permet ainsi de trouver plus facilement la solution logique d'un problème. Cela oblige à être rigoureux et donc à déceler les difficultés ou pièges dissimulés dans une question.

## Comment bien rédiger ?

### Rédiger une introduction

Il faut tout d'abord préciser le numéro complet de la question traitée, en respectant la numérotation de l'énoncé. Il est également important d'introduire au fur et à mesure toutes les variables utilisées. Indiquer les hypothèses clairement et succinctement afin de définir la base du raisonnement. Attention, il ne s'agit surtout pas de recopier l'énoncé !
Une introduction bien rédigée permet au correcteur de lire la copie et de comprendre de quoi il s'agit sans avoir à se référer à l'énoncé (ce qui lui est d'autant plus agréable !)

**Annoncer ce que l'on va faire et donner ses conclusions** (en disant « on va montrer que . . . », « on va raisonner par l'absurde », « Montrons d'abord .... Il ne reste plus qu'à prouver .... », « on a montré que . . . »). Cela permet de structurer les démonstrations et de les rendre plus claires. C'est aussi un bon moyen pour ne pas se tromper. Vous pouvez aussi admettre provisoirement un résultat dont la démonstration semble difficile ou ennuyeuse (« supposons qu'on ait démontré que . . ., alors . . . »).

Ne pas hésiter à être assez explicite et à détailler les étapes au début. Même si cela donne des démonstrations trop longues, ne pas chercher à les raccourcir avant d'avoir acquis assez d'aisance pour écrire des démonstrations exactes qui soient plus courtes. Ne pas hésiter d'autre part pas à utiliser du brouillon ! !

Toujours conclure son raisonnement, même si celui-ci n'aboutit pas : « cette démarche n'aboutit pas », ou « je n'obtiens qu'une conclusion partielle », ...

**Mettre en évidence les articulations logiques du raisonnement**. Il est important de **justifier toutes les affirmations** en se référant au cours (théorème, définition ..) ou au résultat d'une question antérieure. C'est le point le plus important de la rédaction. La référence à un résultat du cours ou à celui d'une question précédente doit se faire avec une précision absolue, en vérifiant et rassemblant toutes les hypothèses nécessaires avant de conclure.
Ne pas oublier de citer le nom du théorème ou de la définition utilisée ; le numéro de la question utilisée... (remarque : on peut toujours utiliser le résultat d'une question précédente, même si on ne l'a pas démontré !)
*De façon générale, les candidats vérifient trop rarement les hypothèses avant d'appliquer une propriété établie antérieurement, ou encore lors des questions de synthèse.* (Rapport du jury du CAPES 2014.)

**Prendre garde au statut des lettres et des objets.** Il ne faut pas hésiter à introduire des notations pour préciser le texte, mais elles doivent être expliquées clairement. Si on est amené à introduire de nouvelles lettres (en disant par exemple « soit $x$ tel que . . . »), il est indispensable d'être très explicite sur le statut

de ces lettres, c'est-à-dire sur les objets qu'elles représentent et les propriétés qu'elles possèdent. De façon générale, il faut se donner pour règle de ***vérifier, à chaque fois qu'une lettre apparaît dans une démonstration, qu'elle a été convenablement « déclarée »***, c'est-à-dire que son statut a été clairement précisé. Les fautes les plus fréquentes et les plus dangereuses sont dues à l'oubli de cette règle. Par exemple, écrire « $e^x$ est toujours positif » conduira (pour un $\theta$ réel) à « $e^{i\theta} \geqslant 0$ », ce qui ne veut plus rien dire. On écrira plutôt, « pour tout $x$ réel, $e^x$ est positif ».
De la même manière, le statut des objets utilisé doit être clair. Par exemple, il ne faut pas confondre la fonction $f$ et la valeur $f(x)$ de cette fonction en un point $x$ (rapport du jury du CAPES 1997), ou encore les objets $u_n$, $u_n(x)$, $(u_n(x))_{n>|x|}$ (rapport du jury 2004).

**Structurer son raisonnement.** Voici quelques exemples très fréquents :

- Pour montrer une proposition du type $(\forall x \in E, \mathbf{P}(x))$, on commence en écrivant une expression du style « Soit $x$ un élément de $E$ », ou « Considérons un élément $x$ de $E$ », puis on écrit une démonstration de $\mathbf{P}(x)$. Lorsque cette démonstration est un peu longue, on peut ajouter « On va montrer qu'on a $\mathbf{P}(x)$ » et la conclusion partielle « On a montré $\mathbf{P}(x)$ ». On conclut par « On a montré $(\forall x \in E, \mathbf{P}(x))$ ».
- Pour un énoncé du type « Montrer que si l'on a $\mathbf{P}$ alors on a $\mathbf{Q}$ », c'est-à-dire « démontrer $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})$ », on commence souvent en écrivant « on suppose $\mathbf{P}$ », c'est-à-dire que l'on considère $\mathbf{P}$ comme une nouvelle donnée, puis on cherche à démontrer $\mathbf{Q}$. La démonstration s'achève par une phrase du genre « on a montré $\mathbf{Q}$ » et il peut être bon de rappeler la conclusion globale « on a montré $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})$ ».
- Pour démontrer une proposition $\mathbf{Q}$ en utilisant une donnée de la forme $(\exists x \in E, \mathbf{P}(x))$, on choisit une lettre $x_0$ par exemple, qui n'a pas été déjà utilisée et surtout qui n'apparait pas dans la proposition $\mathbf{Q}$, on ajoute aux hypothèses la proposition $(x_0 \in E \textit{ et } \mathbf{P}(x_0))$ et on démontre $\mathbf{Q}$.
  En pratique, les deux premiers points sont traduits par une expression de la forme « Soit $x_0$ un élément de $E$ tel que $\mathbf{P}(x_0)$ » ou « On sait que $(\exists x \in E, \mathbf{P}(x))$ ; soit $x_0$ un tel élément ». Il est souvent bon de justifier le « On sait que » par la référence à une définition ou à un théorème.

**Vérifier ses résultats.** On peut par exemple tester leur validité sur des cas particuliers. Il faut également s'interroger sur la cohérence du résultat obtenu notamment lorsqu'il affirme l'égalité de deux objets de natures différentes (comme une fonction et un nombre)...

## Les écueils à éviter

- Ne jamais manipuler un objet avant d'avoir justifier son existence.
  *(...) trop de candidats semblent penser que toute suite admet une limite et que le seul problème est de l'identifier ou pensent que la somme d'une série (dont on ne peut parler sans en avoir prouvé l'existence) a effectivement les propriétés d'une somme finie.* (Rapport du jury du CAPES 2007.)
- Éviter de sortir d'une impasse par un « donc » péremptoire qui ne saurait abuser le correcteur. Au mieux ce dernier pensera que vous êtes sincère et que c'est votre raisonnement qui est fortement défaillant. Au pire, il pensera que vous cherchez à l'escroquer et il aura alors bien du mal à se montrer généreux dans la suite de sa correction... **L'honnêteté intellectuelle est essentielle !**
- Ne pas mélanger les phrases en français et les symboles mathématiques, tout particulièrement les quantificateurs ainsi que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ qui ne doivent pas être utilisés comme abréviations.
  Par exemple, écrire « $g(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$ » est incorrect. Il faut par exemple écrire : « $g$ est positive sur $\mathbb{R}$ » ou « $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$ ».
  En particulier, la flèche d'implication $\Rightarrow$ ne doit pas être utilisée pour dire « donc ». Ce n'est en effet pas du tout son sens. Quand on fait un raisonnement du type « $p$ est vrai donc $q$ est vraie », ce n'est pas « $p \Rightarrow q$ » que l'on est en train d'affirmer mais un enchevêtrement plus complexe de propositions :
  $p$ est vraie **ET** il est vrai que $(p \Rightarrow q)$ **DONC** $q$ est vraie
  Quand on écrit que « $p$ est vrai donc $q$ est vraie », on rappelle que $p$ est vraie, ensuite on sous-entend que « $p \Rightarrow q$ », enfin on en déduit que $q$ est vraie, ce qui était l'objectif. Quand on écrit « $p \Rightarrow q$ » au contraire, ni la vérité de $p$ ni la vérité de $q$ n'est affirmée.
  La même prudence est de mise dans l'utilisation du symbole d'équivalence « $\Leftrightarrow$ ».
  *Dans de nombreux raisonnements ou calculs, on observe une utilisation intempestive, voire irréfléchie du symbole d'équivalence.* (Rapport du jury du CAPES 2014e.)
  *(...) les productions des candidats abondent de (...) « démonstrations par équivalence en partant de la conclusion » se concluant par un triomphant « toujours vrai » marques d'un manque de recul certain sur leurs pratiques.* (Rapport du jury du CAPES 2004.)

*Chez un nombre non négligeable de candidats, la résolution d'une équation par équivalences n'est pas correctement rédigée, une chaîne d'équivalences se poursuivant souvent par l'affirmation que la propriété en bout de chaîne est vraie !* (Rapport du jury de l'agrégation 2013.)

Il faut également respecter la syntaxe de ces symboles dans les formules mathématiques.
Par exemple, écrire « $f(x) \geqslant 0, \forall x \in I$ » est condamnable (rapport du jury du CAPES 1997). Quelle serait d'ailleurs la négation de cette proposition ? ?
*Un effort important est à faire dans la rigueur des raisonnements, notamment dans l'utilisation des quantificateurs, des implications et des équivalences.* (Rapport du jury du CAPES 2011.)
Exceptions :
- Les connecteurs « et », « ou » sont tolérés dans le langage mathématique.
On pourra écrire : $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = -2)$
- Les symboles $\in$, $=$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ sont tolérés dans des phrases en français.
On pourra écrire : Soit un réel $\ell \geqslant 1$, Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ....

- Ne pas commencer une ligne par l'un des symboles « $\Leftrightarrow$ », « $\Rightarrow$ », « $=$ ». Équivalence, implication et égalité ont en effet deux membres. . .
- Ne pas confondre le nombre « 1 », l'adjectif numéral « un » et les articles indéfinis « un » ou « une » comme dans « 1 est 1 solution de l'équation » ou « l'équation n'a qu'1 solution » (rapport du jury du CAPES 1997). On écrira donc qu'une équation a *deux* (en toutes lettres) solutions, ou que l'écriture décimale de 112 comporte *deux* « 1 » et *un* « 2 » . . .
- S'interdire l'utilisation du solécisme (le mot est joli, non ?) trop répandu « On a que » : « On a » est amplement suffisant ! ! D'une manière générale, il faut respecter la langue française et l'orthographe...

**Remarque finale :**
La notion de « bonne rédaction » n'est pas absolue et dépend beaucoup du contexte. Le degré de justification et le niveau de détails attendus sont toujours plus importants en début de problème (c'est la prise de contact avec le correcteur).