MAthématiques Générales 2

Méthode et rédaction

Exercice n°1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = xe^x$. Que vaut $f'(x)$?

Exercice n°2

(*Deuxième session 2016*)

Exprimer les assertions suivantes en langage mathématique (avec des quantificateurs) puis écrire leurs négations :

1) La fonction inverse $(x \longmapsto \frac{1}{x})$ n'est pas minorée sur $]-\infty, 0[$.

2) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique.

Exercice n°3

(*Contrôle continu 2016*)

Exprimer les assertions suivantes en langage courant. Dire si elles sont vraies ou fausses (justifier), dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation :

a) $\forall x \in]-1, 1],\ \exists y \in]-1, 1],\ y < x$.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ ((x < y) \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{N}\ ,\ x < z < y))$.

Exercice n°4

(*Contrôle continu 2015*)

On vous présente quatre cartes imprimées sur les deux faces. On sait que chaque carte présente une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face. Posées sur la table, les quatre cartes présentent les symboles suivants :

$$A \qquad B \qquad 2 \qquad 3$$

Quelle(s) carte(s) est-il nécessaire et suffisant de retourner pour savoir si la règle « Si une face présente une voyelle, alors l'autre face présente un chiffre pair » est respectée ?

Exercice n°5

Déterminer l'ensemble E formé des entiers naturels non nuls n inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient la proposition : (n est un nombre pair) $\Longrightarrow$ ($n + 1$ est un nombre premier).

Exercice n°6

1) Montrer que si tout entier pair supérieur à 4 est somme de deux entiers premiers (conjecture de Goldbach) alors tout entier impair supérieur à 7 est somme de trois entiers premiers.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $10^n + 1$ est divisible par 9 alors $10^{n+1} + 1$ est aussi divisible par 9.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $A_n = 3^{2n} - 2^{n+1}$. Démontrer que $(7|A_n \Longrightarrow 7|A_{n+1})$.

Exercice n°7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On note $(\mathscr{P})$ l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$ ».
Dire (en le justifiant) si cette assertion est vraie ou fausse. Écrire sa négation.

Exercice n°8

On considère l'assertion $(\mathscr{P})$: « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(x \geqslant y^2$ ou $e^y \geqslant x\big)$ ».
Dire (en le justifiant) si cette assertion est vraie ou fausse. Écrire sa négation.

Exercice n°9 (*Contrôle continu 2014*)

Soit n un entier naturel. Montrer que : « n est pair ou $n^2 - 1$ est divisible par 8 ».

Exercice n°10 (*Contrôle continu 2015*)

Soient n et p deux entiers. Montrer que « (np est pair) ou ($n^2 - p^2$ est multiple de 8) ».

Exercice n°11 (*Deuxième session 2016*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\big(x^2 \geqslant 1$ ou $(x-2)^2 \geqslant 1\big)$.

Exercice n°12 (*Contrôle continu 2016*)

En raisonnant par équivalences, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|1 - x| \leqslant 2\,|x| - 3$.

Exercice n°13 (*Deuxième session 2015*)

En raisonnant par équivalences, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+2} \geqslant 1 - x$.

Exercice n°14

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.
Montrer, en n'utilisant que des arguments accessibles à un élève de Terminale, que la suite dont le terme général est $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nf(t)}{1+n+t^2}\,dt$ est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice n°15

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$. Montrer que $|\alpha_n| \leqslant \frac{k}{2n}$.

Exercice n°16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1) Soient f et g deux fonctions bornées intégrables sur $[a,b]$. Montrer que $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$. Étudier le cas d'égalité lorsqu'on suppose en outre f et g continues sur $[a,b]$.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ $(a \leqslant b)$, à valeurs réelles, et telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geqslant (b-a)^2$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Exercice n°17 (Plus dur)

Soit $f : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$.
Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

Exercice n°18

Soient E et F deux ensembles tels que $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$. Démontrer que $E \subseteq F$.

Exercice n°19

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de F dans E.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que l'on a toujours $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ mais que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ avec égalité si f est injective.

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F.
Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

3) Soient A une partie de E et B une partie de F. Montrer que :
$A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ avec égalité si f est surjective

4) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall g \in \mathscr{F}$, $\forall h \in \mathscr{F}$, $(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$

Exercice n°20

(E,d) désignant un espace métrique et A une partie non vide de E, on appelle *expansion* de (A,d) toute application f de A dans A telle que : $\forall M, M' \in A,\ d(M,M') \leqslant d(f(M), f(M'))$.

1) Montrer que toute expansion est injective.

2) Montrer que l'ensemble des expansions de (A,d) est stable par composition.

3) Soit f une expansion bijective de (A,d). Montrer que f est une isométrie de (A,d) si et seulement si f^{-1} est une expansion de (A,d).

On suppose désormais que A et B sont deux points de l'espace affine euclidien E et que $\mathscr{A} = [AB]$.

4) Soit f une expansion de $(\mathscr{A}, d)$. Déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$.

5) En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathscr{A}, d)$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f.

6) Déterminer l'ensemble des expansions de $(\mathscr{A}, d)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°21}}$ (Isométries du plan affine euclidien)

Soient X un plan affine euclidien et f une isométrie de X. On rappelle que par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

1) Montrer que s'il existe trois points a, b et c *non alignés* fixés par f ($i.e$ $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = c$), alors f est l'identité.

2) Montrer que si f fixe deux points distincts o et a alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (oa).

3) Soit o un point de X. Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent o invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par o et des rotations qui laissent o invariant.

4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

5) Montrer que l'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un groupe et que pour tout point o de X, l'ensemble $Is_o(X)$ des isométries de X fixant o est un sous-groupe de $Is(X)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°22}}$

Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points c'est à dire l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathscr{E}$ contenant A, B, C, D.

1) Rappeler la définition d'une partie convexe de $\mathscr{E}$.

2) Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres des quatre points A, B, C, D affectés de masses positives ou nulles.

3) Un point X de T est dit *extrémal* si pour tous points Y et Z de T on a : $(X \in [YZ] \Longrightarrow X = Y$ ou $X = Z)$.
Montrer que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets.
D'une manière générale, on peut montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathscr{E}$ est égale à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

$\boxed{\textbf{Exercice n°23}}$

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.