UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MAthématiques Générales 2

Différents types de raisonnements

Exercice n°1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon$ alors $a = 0$.

Exercice n°2 (*Deuxième session 2014*)

Soient x et y deux réels. Montrer que : $(x \neq 2 \text{ et } y \neq -3) \Longrightarrow (3x - 2y + xy \neq 6)$

Exercice n°3 (*Contrôle continu 2014*)

Soient x et y deux réels. Montrer que : $(x \neq -1 \text{ et } y \neq -1) \Longrightarrow (x + y + xy \neq -1)$

Exercice n°4 (*Deuxième session 2016*)

Soit n un entier naturel. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice n°5 (*Deuxième session 2016*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $a \leqslant b \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon)$.

Exercice n°6 (*Contrôle continu 2016*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Répondre aux deux questions suivantes en justifiant soigneusement les réponses.

1) A-t-on $(5|a^2 + b^2 \Longrightarrow 5|a \text{ et } 5|b)$?

2) A-t-on $(7|a^2 + b^2 \Longrightarrow 7|a \text{ et } 7|b)$?

Exercice n°7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n + 1$ réels $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[0, 1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

Exercice n°8 (*Contrôle continu 2016*)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice n°9

On se donne une partie A de $\mathbb{N}^*$, finie, non vide et telle que pour tous éléments m et n de A, l'entier $\dfrac{m + n}{\text{pgcd}(m, n)}$ est encore dans A.
Montrer que l'entier 2 est élément de A puis que A ne contient que des entiers pairs. En déduire que $A = \{2\}$.

Exercice n°10

On appelle E l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels strictement positifs qui vérifient les deux inégalités strictes $xyz > 1$ et $x + y + z < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. On cherche à établir quelques propriétés de E.

1) Soit (a, b, c) un élément de E.

a) Démontrer que $\max(a, b, c) > 1$;

b) Démontrer que $\min(a, b, c) < 1$;

c) Démontrer que a, b et c sont tous les trois différents de 1.

2) Déterminer tous les éléments de E qui sont de la forme $(x, \frac{1}{2x}, \frac{1}{2x})$, où x est un réel strictement positif. En déduire que l'ensemble E est infini.

Exercice n°11 (*Deuxième session 2015*)
Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des x de X vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun x dans X tel que $A = f(x)$.

Exercice n°12

1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Peut-on trouver $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ tels que $\alpha^\beta \in \mathbb{Q}$?

Exercice n°13

Soit p un nombre premier impair.

1) Montrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4.

2) Soit N un nombre congru à -1 modulo 4, montrer que l'un des facteurs premiers de N est congru à -1 modulo 4.

3) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

Exercice n°14

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).

1) Cas où $n = 2$: Montrer que 1, 3 et 5 sont solutions du problème.

2) On suppose dorénavant que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).

a) Montrer que les entiers x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

b) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. Montrer qu'on a alors $x^2+y^2+z^2 \equiv 1$ (modulo 4) et en déduire une contradiction.

c) On suppose que x, y et z sont impairs. Montrer qu'on a $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ (modulo 8) et conclure.

Exercice n°15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}(n, \mathbb{R})$ peut s'écrire, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Exercice n°16

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 2 - x - y$.

Exercice n°17 (*Contrôle continu 2015*)
Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x).f(y) - f(x.y) = x + y$.

Exercice n°18 (*Deuxième session 2015*)
Montrer que toute fonction continue $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction linéaire $(x \mapsto ax)$ et d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0; 1]$. Y-a-t'il unicité de cette écriture ?

Exercice n°19 (*Deuxième session 2016*)
Montrer que toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction affine (c'est à dire du type $x \longmapsto ax+b$) et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice n°20 (*Contrôle continu 2016*)
Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice n°21

Démontrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Exercice n°22 (*Deuxième session 2014*)
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.

Exercice n°23 (*Deuxième session 2016*)

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $u_0 \geqslant 0$ et que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n u_0$.

Exercice n°24 (*Contrôle continu 2015*)

1) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
À l'aide d'une récurrence forte, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$.

Exercice n°25

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Étant donnés $n+2$ nombres distincts dans $\{1, 2, \cdots, 2n\}$, montrer que l'un au moins de ces nombres est somme de deux autres.

Exercice n°26

Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre $N = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ n'est pas entier. *(On pourra montrer que ce nombre peut-être écrit comme le quotient d'un entier impair et d'un entier pair.)*

Exercice n°27

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) \geqslant f[f(n)] + 1$.

1) Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ (m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n)$. En déduire que f est strictement croissante.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) < n+1$. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°28

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $m+1$ réels. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R})$. Montrer, par récurrence sur m, que M a pour déterminant $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$.

Exercice n°29 (*Contrôle continu 2016*)
On rappelle que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout n-uplet $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de nombres complexes,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| .$$

Exercice n°30

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\, u_n\right)$$

1) On suppose que u_0 est un entier, que peut-on dire de la suite (u_n) ?
2) On suppose que u_0 n'est pas entier, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.
3) On suppose que $u_0 \in]0, 1[$. Existe-t-il un rang à partir duquel la suite est monotone ?

Exercice n°31 (*Contrôle continu 2014*)
À l'aide d'une récurrence forte et d'une disjonction de cas, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad n = 2^p(2q+1)$$

Exercice n°32

Préciser pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1) Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

2) Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.

3) L'ensemble des nombres premiers admet un plus grand élément.

4) Toute suite numérique non majorée tend vers $+\infty$.

5) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

6) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

7) Pour tout entier naturel n, l'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.

8) Les deux bouts d'une corde non élastique de 101 mètres sont fixés au sol au moyen de deux piquets distants de 100 mètres. On tend la corde en la tirant verticalement par son milieu aussi haut que possible. Une personne mesurant 1,68 m peut alors passer sous la corde sans se baisser.

9) Soit une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n > 0,01$. La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

10) Si n est entier naturel, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Pour tout n entier naturel, I_n existe et vaut $n!$.

Exercice n°33 (*Deuxième session 2014*)
Montrer que tout entier naturel supérieur à 2 possède au moins un diviseur premier. *On pourra procéder par récurrence forte ou bien introduire en le justifiant le plus petit diviseur strictement supérieur à 1 de n.*

Exercice n°34 (*Deuxième session 2015*)

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.