UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MAthématiques Générales 2

MAG 2

Corrigé rapide du contrôle continu du 7 avril 2017

Exercice n°1 *(4 points)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $nW_n^2 = \frac{n}{n+1}(n+1)W_nW_{n+1}\frac{W_n}{W_{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}\frac{W_n}{W_{n+1}}$ d'après A.5. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$ d'après A.4.
Comme $W_n \geqslant 0$ (d'après A.1.) on a, par caractérisation séquentielle de la continuité de la fonction racine carrée en $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{n}W_n = \sqrt{nW_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice n°2 *(1,5 points)*
L'assertion $(\mathscr{P})$ est vraie. Il suffit pour s'en convaincre de choisir, pour un réel x donné, $y = x$.
Sa négation est : $\quad$ (non $\mathscr{P}$) : $\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \neq y$ et $x^2 + y^2 \neq 0$

Exercice n°3 *(2 points)*
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ en montrant la contraposée (qui lui est équivalente). Supposons donc $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. On a alors $xy+y-x-1 = xy+x-y-1$ soit $2(y-x) = 0$ et donc $x = y$. On a bien montré : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Longrightarrow x = y$.

Exercice n°4 *(2 points)*
Soit un entier $n \geqslant 1$. Supposons par l'absurde que n^2+1 soit le carré d'un entier a. On a alors $n^2+1 = a^2$ soit $(a-n)(a+n) = 1$. $a-n$ et $a+n$ étant des entiers, cela conduit à $a-n = a+n = 1$ (et donc $a = 1$ et $n = 0$) ou à $a-n = a+n = -1$ (et donc $a = -1$ et $n = 0$). n ayant été supposé non nul, ces résultats sont impossibles.

Exercice n°5 *(2 points)*
Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par exemple par disjonction de cas :
• ou bien $x \geqslant 2$ et $x^2 - 2x + 3 - |x-2| = x^2 - 3x + 5 > 0$ (trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -11 < 0$ et de coefficient dominant $1 > 0$).
• ou bien $x < 2$ et $x^2 - 2x + 3 - |x-2| = x^2 - x + 1 > 0$ (trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -3 < 0$ et de coefficient dominant $1 > 0$).
Dans tous les cas on a bien $|x-2| < x^2 - 2x + 3$.

Exercice n°6 *(3 points)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « $(3n-1)4^n + 1$ est un multiple de 9 ».
– *(initialisation)* $\mathscr{P}_0$ est vraie puisque $(3\times 0 - 1)4^0 + 1 = 0$ est un multiple de 9.
– *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a $(3(n+1)-1)4^{n+1} + 1 = 4((3n-1)4^n + 1) + 3(4^{n+1} - 1)$. Or, $4^{n+1} - 1 = (4-1)\sum_{k=0}^{n} 4^k$ est un multiple de 3 donc $3(4^{n+1}-1)$ est un multiple de 9 et d'autre part, par hypothèse de récurrence, $(3n-1)4^n + 1$ est aussi un multiple de 9. $(3(n+1)-1)4^{n+1} + 1$ est donc bien un multiple de 9.
– *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a finalement montré que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9 | (3n-1)4^n + 1$.

Exercice n°7 (*3 points*)

On procède par Analyse/Synthèse.

• Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = f(x) + f(y)$. Alors $f(0)^2 = 2f(0)$ (choix de $(x,y) = (0,0)$) et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

Si $f(0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = f(x)$ (choix de $y = 0$).

Si $f(0) = 2$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x) = f(x) + 2$ (choix de $y = 0$) soit $f(x) = 2$.

• Synthèse. Les fonctions constantes égales respectivement à 0 et 2 sont bien solutions.

En conclusion, l'ensemble cherché est réduit aux deux seules fonctions $x \longmapsto 0$ et $x \longmapsto 2$.

Exercice n°8 (*3,5 points*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « n peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes ».

– *(initialisation)* $\mathscr{P}_1$ est vraie puisque $1 = 2^0$.

– *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour tout entier k de $[1, n]$ et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

  • ou bien $n+1$ est impair. Alors $n+1 = 2^0 + n$ et le résultat en découle puisque par hypothèse de récurrence n peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes, aucune de ces puissances n'étant nulle (car n est pair).

  • ou bien $n+1$ est pair. Alors $n+1 = 2\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ est un entier de $[1, n]$ donc, par hypothèse de récurrence, $\frac{n+1}{2}$ s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes. Il en est alors de même de $n+1$ (les puissances étant les mêmes, augmentées de 1).

– *(conclusion)* Par le théorème de récurrence forte, on a finalement montré que : tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.