UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MAthématiques Générales 2

Contrôle continu du 7 avril 2017

Durée : 2h

Les huit exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*4 points*)

Lire attentivement l'énoncé en annexe (page suivante). **En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 6.**

Exercice n°2 (*1,5 points*)

L'assertion $(\mathscr{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ? Écrire sa négation.

$$(\mathscr{P}) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \left(x \neq y \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0\right)$$

Exercice n°3 (*2 points*)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice n°4 (*2 points*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice n°5 (*2 points*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x - 2| < x^2 - 2x + 3$.

Exercice n°6 (*2,5 points*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(3n-1)4^n + 1$ est un multiple de 9.

Exercice n°7 (*2,5 points*)

Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = f(x) + f(y)$$

Exercice n°8 (*3,5 points*)

Démontrer par récurrence que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

(Par exemple on a $19 = 2^0 + 2^1 + 2^4$.)

ANNEXE

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant \frac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

4. Montrer que la suite $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

5. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

6. Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n^2$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.