UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MAthématiques Générales 2

MAG 2

Corrigé rapide du contrôle continu du 22 avril 2016

Exercice n°1 (*4,5 points*)

2.6.a. Soit (u_n) une suite bornée.

• S'il existe une partie E de $\mathbb{N}^*$ de densité nulle telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\setminus \mathrm{E}}$ converge alors, d'après **2.4.**, la suite $(|u_n-\Lambda|)$ converge en moyenne vers 0 i.e. (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

• Réciproquement, si (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ alors :

Ou bien la suite bornée $(u_n-\Lambda)$ est la suite nulle et en particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\setminus\emptyset}$ converge (vers Λ) avec $\emptyset$ de densité nulle.

Ou bien la suite bornée $(u_n-\Lambda)$ n'est pas la suite nulle et comme la suite $(|u_n-\Lambda|)$ converge en moyenne vers 0 alors d'après **2.5.d.** la suite $(u_n-\Lambda)_{n\in\mathbb{N}^\star\setminus \mathrm{E}}$ converge (vers 0) avec E de densité nulle d'après **2.5.c.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\setminus \mathrm{E}}$ converge donc (vers Λ).

En conclusion, (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement s'il existe une partie E de $\mathbb{N}^*$ de densité nulle telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\setminus \mathrm{E}}$ converge.

Exercice n°2 (*2,5 points*)

1) Non : par exemple, 5 divise 2^2+1^2 mais 5 ne divise pas 2.

2) Oui : les carrés modulo 7 sont 0,1, 4 et 2 donc $a^2+b^2\equiv 0(\mod 7)$ si et seulement si $a\equiv 0(\mod 7)$ et $b\equiv 0(\mod 7)$.

Exercice n°3 (*2,5 points*)

On procède par Analyse/Synthèse. Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, en notant n le degré d'un polynôme solution alors $2n=2+n$ donc $n=2$. L'identité $a_0+a_1X^2+a_2X^4=(X^2+1)(a_0+a_1X+a_2X^2)$ conduit alors à $a_1=0$ et $a_2=-a_0$. Finalement les solutions sont les $a_0(1-X^2)$.

Exercice n°4 (*3 points*)

Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$|1-x|\leqslant 2\,|x|-3 \iff \begin{cases} x\geqslant 1 \text{ et } -1+x\leqslant 2x-3 \\ \text{ou } x<1 \text{ et } 1-x\leqslant 2\,|x|-3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x\geqslant 1 \text{ et } x\geqslant 2 \\ \text{ou } 0\leqslant x<1 \text{ et } 1-x\leqslant 2x-3 \\ \text{ou } x<0 \text{ et } 1-x\leqslant -2x-3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x\geqslant 2 \\ \text{ou } 0\leqslant x<1 \text{ et } x\geqslant \frac{4}{3} \\ \text{ou } x<0 \text{ et } x\leqslant -4\end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc finalement $\mathscr{S}=]-\infty,-4]\cup[2,+\infty[$.

Exercice n°5 (*2 points*)

a) Cette assertion signifie : « $]-1,1]$ n'a pas de plus petit élément » et elle est vraie. En effet, si $x \in]-1,1]$ alors l'intervalle $]-1,x[$ est non vide et si $y \in]-1,x[$ alors $y \in]-1,1]$ et $y < x$.

b) Cette assertion signifie : « On peut toujours trouver un entier naturel strictement compris entre deux entiers naturels distincts donnés » et elle est fausse. En effet, on a $1 < 2$ et il n'existe pas d'entier z tel que $1 < z < 2$.
Sa négation est : $\exists (x,y) \in \mathbb{N}^2,\ x < y \text{ et } (\forall z \in \mathbb{N},\ (x \geqslant z \text{ ou } z \geqslant y))$.

Exercice n°6 (*3 points*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « Pour tout n-uplet $(z_1, \cdots, z_n)$ de complexes, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ ».

- *(initialisation)* $\mathscr{P}_1$ est une tautologie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $(z_1, \cdots, z_{n+1})$ un $(n+1)$-uplet de complexes. $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$ d'après le rappel donc, par hypothèse de récurrence, $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.
- *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Exercice n°7 (*2,5 points*)

Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n)$.
En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $f \neq f_p$.