UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MAthématiques Générales 2

Contrôle continu du 22 avril 2016

Durée : 2h

Les sept exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 *(4,5 points)*

Lire attentivement l'énoncé en annexe (page suivante). **En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 2.6.a.**

Exercice n°2 *(2,5 points)*

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Répondre aux deux questions suivantes en justifiant soigneusement les réponses.

1) A-t-on $(5|a^2 + b^2 \Longrightarrow 5|a \text{ et } 5|b)$?

2) A-t-on $(7|a^2 + b^2 \Longrightarrow 7|a \text{ et } 7|b)$?

Exercice n°3 *(2,5 points)*

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice n°4 *(3 points)*

En raisonnant par équivalences, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|1 - x| \leqslant 2|x| - 3$.

Exercice n°5 *(2 points)*

Exprimer les assertions suivantes en langage courant. Dire si elles sont vraies ou fausses (justifier), dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation :

a) $\forall x \in]-1, 1], \exists y \in]-1, 1], \ y < x$.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, ((x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N} \ , \ x < z < y))$.

Exercice n°6 *(3 points)*

On rappelle que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout n-uplet $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ de nombres complexes,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| \, .$$

Exercice n°7 *(2,5 points)*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

ANNEXE

- Le mot « suite » désignera toujours une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^\star$ ou sur une partie infinie de $\mathbb{N}^\star$. Une suite définie sur une partie infinie X de $\mathbb{N}^\star$ sera notée $(u_n)_{n\in X}$. Une suite définie sur tout $\mathbb{N}^\star$ sera notée par simplification (u_n).
- Une suite (u_n) sera dite convergente en moyenne (respectivement « convergente en moyenne vers ℓ ») si la suite (S_n) définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est convergente (resp. « converge vers ℓ »).
- Une partie E de $\mathbb{N}^*$ est dite de densité nulle si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}\cap\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}) = 0$.

2.3. On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ s'il existe un nombre réel Λ tel que la suite $(|u_n - \Lambda|)$ converge en moyenne vers 0 c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \Lambda| = 0$.

Démontrer que si une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$, elle converge en moyenne vers Λ. La réciproque est-elle vraie ?

2.4. Dans cette question, (u_n) est une suite bornée et E une partie de $\mathbb{N}^\star$ de densité nulle dont le complémentaire dans $\mathbb{N}^\star$ est noté $\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}$. On suppose de plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}}$ converge vers Λ. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n - \Lambda|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5. Dans cette question, (u_n) est une suite bornée non nulle, et la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5.a. Pour tout naturel n, on note

$$B_n = \left\{ S_p,\ S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} |u_k|\,,\ p \geqslant n \right\}.$$

Démontrer l'existence du nombre réel $\alpha_n = \sup B_n$.

2.5.b. Démontrer que la suite $(\alpha)_n$ décroît et converge. Quelle est sa limite ?

2.5.c. On appelle E l'ensemble des naturels p tels que $u_p^2 \geqslant \alpha_p$.

Établir pour tout naturel n l'inégalité :

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}\cap\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{\sqrt{\alpha_k}}.$$

En déduire que l'ensemble E est de densité nulle.

2.5.d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}}$ converge vers zéro.

2.6. **2.6.a.** Déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite bornée vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2.6.b. Démontrer que si deux suites (u_n) et (u'_n) bornées vérifient la propriété $\mathscr{P}$, il en est de même de la suite $(u_n.u'_n)$.