MAthématiques Générales 2

Examen de deuxième session - Juin 2016
Durée : 2h

Les sept exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*4 points*)
Lire attentivement l'énoncé en annexe (page suivante). **En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 4.**

Exercice n°2 (*2 points*)
Exprimer les assertions suivantes en langage mathématique (avec des quantificateurs) puis écrire leurs négations :

1) La fonction inverse ($x \longmapsto \dfrac{1}{x}$) n'est pas minorée sur $]-\infty, 0[$.

2) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique.

Exercice n°3 (*2 points*)
Soit n un entier naturel. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice n°4 (*3 points*)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $a \leqslant b \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon)$.

Exercice n°5 (*2 points*)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(x^2 \geqslant 1$ ou $(x-2)^2 \geqslant 1)$.

Exercice n°6 (*3,5 points*)
Montrer que toute fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction affine (c'est à dire du type $x \longmapsto ax + b$) et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice n°7 (*3,5 points*)
Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $u_0 \geqslant 0$ et que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n u_0$.

ANNEXE

Exercice

1) Soit p un nombre premier différent de 2. On suppose que -1 est un carré modulo p, c'est à dire qu'il existe $\overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $\overline{x}^2 = -1$.
Quel est l'ordre (multiplicatif) de $\overline{x}$? Montrer qu'alors p est congru à 1 modulo 4.

2) Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4, $p = 4k + 1$. Soit $P = X(X^{2k} - 1)$.

a) Montrer qu'il existe $\overline{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui n'est pas racine de P.

b) Que vaut $\overline{y}^4$? En déduire que $\overline{y}^{2k} = -1$.

c) Montrer alors que -1 est un carré modulo p.

3) Montrer que -1 est un carré modulo 2.

4) Résumer sous forme de théorème le résultat obtenu dans cet exercice (on justifiera soigneusement la réponse).