MAG 2

Licence de Mathématiques - 3ème année

Corrigé rapide du contrôle du 10 avril 2015

Exercice n°1 (*4,5 points*)

Soit $k \in \{0, \cdots, n_0 - 1\}$. Alors $\dfrac{(k+1)x_0}{n_0} \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{kx_0}{n_0} \in \mathbb{R}^+$ et $\left|\dfrac{(k+1)x_0}{n_0} - \dfrac{kx_0}{n_0}\right| = \left|\dfrac{x_0}{n_0}\right| = \dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$ d'après 6.2. On a alors, d'après 6.1., $\left|F\left(\dfrac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\dfrac{kx_0}{n_0}\right)\right| \leqslant 1$.

On déduit alors de 6.3 que $|F(x_0) - F(0)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} 1 = n_0$. Une nouvelle utilisation de 6.2. montre alors que $F(x_0) - F(0) \leqslant |F(x_0) - F(0)| \leqslant \dfrac{x_0}{\eta_1} + 1$. Finalement, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+ \quad F(x_0) \leqslant ax_0 + b$ où l'on a posé $a = \dfrac{1}{\eta_1}$ (qui est bien indépendant de x_0) et $b = F(0) + 1$.

Exercice n°2 (*2 points*)

La règle est en défaut si et seulement si une carte comporte une voyelle et un chiffre impair (la négation de « $A \Longrightarrow B$ » est « A et (non B) »). Il est donc nécessaire et suffisant de retourner la carte laissant apparaître « A » (le chiffre au dos pourrait être impair) et la carte laissant apparaître « 3 » (la lettre au dos pourrait être une voyelle).

Exercice n°3 (*2 points*)

On montre cette implication en démontrant sa contraposée (qui lui est équivalente). Supposons donc $x \geqslant 2$. Alors $x \geqslant 0$, $x - 2 \geqslant 0$ et $x + 3 \geqslant 5 \geqslant 0$ donc $x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3) \geqslant 0$.

Exercice n°4 (*3 points*)

Supposons np impair (pour montrer « A ou B », on suppose (non A) et on montre B). n et p sont alors tous deux impairs et on peut écrire $n = 2s + 1$ et $p = 2t + 1$ avec $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$.
Mais alors $n^2 - p^2 = (4s^2 + 4s + 1) - (4t^2 + 4t + 1) = 4(s(s+1) - t(t+1))$ et le résultat en découle puisque le produit de deux entiers consécutifs est pair (et que la différence de deux entiers pairs est paire).

Exercice n°5 (*4 points*)

Procédons par Analyse / Synthèse. Supposons tout d'abord que l'application f soit une solution. Alors on a $f(0)[f(0) - 1] = 0$ et comme $f(0) = 0$ est impossible (puisque $f(0)f(1) - f(0) = 1$), on en déduit $f(0) = 1$. Mais alors, pour tout réel x, $f(x)f(0) - f(0) = x$ soit $f(x) = x + 1$. $f : x \mapsto x + 1$ est donc la seule éventuelle solution.
Soit à présent $f : x \mapsto x + 1$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$.
Conclusion : $f : x \mapsto x + 1$ est l'unique solution.

Exercice n°6 (*4,5 points*)

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion « $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ».

- *(initialisation)* $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2.2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$. On a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion « $u_n \leqslant 2^n$ ».

- *(initialisation)* $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $u_0 = 1 \leqslant 2^0 = 1$.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout entier k de $[0, n]$ et on montre qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par définition, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $u_0 \leqslant 2^0$, $u_1 \leqslant 2^1, \cdots,\ u_n \leqslant 2^n$. On en déduit $u_{n+1} \leqslant 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (d'après la question 1)). Donc $u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$. On a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* Par le théorème de récurrence forte, on a finalement montré que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 2^n$