UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques - 3ème année

MAG 2

Contrôle continu du vendredi 10 avril 2015

Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*4,5 points*)

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 6.4.

6. Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $F(x) \leqslant ax + b$.

6.1. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, (|x-y| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

6.2. Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et montrer que $n_0 \leqslant \dfrac{x_0}{\eta_1} + 1$.

6.3. Montrer que : $$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|$$

6.4. Conclure.

Exercice n°2 (*2 points*)

On vous présente quatre cartes imprimées sur les deux faces. On sait que chaque carte présente une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face. Posées sur la table, les quatre cartes présentent les symboles suivants :

$$A \qquad B \qquad 2 \qquad 3$$

Quelle(s) carte(s) est-il nécessaire et suffisant de retourner pour savoir si la règle « Si une face présente une voyelle, alors l'autre face présente un chiffre pair » est respectée ?

Exercice n°3 (*2 points*)

Montrer que si x est un réel tel que $x^3 + x^2 - 6x < 0$ alors $x < 2$.

Exercice n°4 (*3 points*)

Soient n et p deux entiers. Montrer que « (np est pair) ou ($n^2 - p^2$ est multiple de 8) ».

Exercice n°5 (*4 points*)

Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x).f(y) - f(x.y) = x + y$.

Exercice n°6 (*4,5 points*)

1) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
À l'aide d'une récurrence forte, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$.