UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques - 3ème année

MAG 2

Corrigé rapide de l'examen du 24 juin 2015

Exercice n°1 (*5 points*)

- D'après **4.** $\mathscr{S}$ est inclus dans l'ensemble des solutions de (E).
- En supposant (par l'absurde) l'inclusion réciproque fausse, on peut introduire la plus petite solution (X, Y) de (E) qui n'est pas dans $\mathscr{S}$. On a alors :
  - d'après **10.4.** $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E)
  - d'après **10.3.** $3Y - 2X < Y$ donc $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est une plus petite solution de (E) que (X, Y),

  par définition de (X, Y) on en déduit que $(3X - 4Y, 3Y - 2X) \in \mathscr{S}$. Mais alors d'après **5.** $(X, Y) \in \mathscr{S}$. Contradiction.

Finalement, $\mathscr{S}$ est bien l'ensemble des solutions de (E).

Exercice n°2 (*2,5 points*)

Supposons par l'absurde l'existence d'un $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

- ou bien $x \in A$ et alors $x \notin f(x) = A$ ce qui est contradictoire,
- ou bien $x \notin A$ et donc $x \in f(x) = A$ ce qui est encore contradictoire

Exercice n°3 (*3,5 points*)

Soit $x \in [-2, +\infty[$ (pour tous les autres réels x, l'inéquation n'a pas de sens).

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} \geqslant 1 - x \quad & \iff \begin{cases} 1 - x > 0 \text{ et } x + 2 \geqslant (1-x)^2 \\ \text{ou } 1 - x \leqslant 0 \text{ et } \sqrt{x+2} \geqslant 0 \geqslant 1 - x \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} 1 - x > 0 \text{ et } x^2 - 3x - 1 \leqslant 0 \\ \text{ou } 1 - x \leqslant 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x < 1 \text{ et } x \in [\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}] \\ \text{ou } x \geqslant 1 \end{cases} \\
& \iff x \in [\tfrac{3-\sqrt{13}}{2}, +\infty[
\end{aligned}$$

Exercice n°4 (*3 points*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « $\cos\left(\frac{1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(1)}{2^n \sin(\frac{1}{2^n})}$ ».

– *(initialisation)* $\mathscr{P}_1$ est vraie puisque $\sin(1) = \sin\left(2.\frac{1}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc $\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\sin(1)}{2^1 \sin(\frac{1}{2^1})}$.

– *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $\cos\left(\frac{1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin(1)}{2^n \sin(\frac{1}{2^n})} \cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Or, on peut écrire $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sin\left(2.\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et donc, après simplification par $\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, $\cos\left(\frac{1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin(1)}{2^{n+1} \sin(\frac{1}{2^{n+1}})}$.

– *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \cos\left(\frac{1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\sin(1)}{2^n \sin(\frac{1}{2^n})}$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(2,5 points)*

On procède par analyse / synthèse pour montrer l'existence et l'unicité d'une telle écriture.

Supposons tout d'abord que $f = g + h$ avec $g : x \mapsto ax$ et h telle que $\displaystyle\int_0^1 h = 0$. Alors, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 f = \left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 h = \frac{a}{2}$ et donc $a = 2\displaystyle\int_0^1 f$.

Soit à présent $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Posons $a = 2\displaystyle\int_0^1 f$ (l'intégrale existe car f est continue), $g : x \mapsto ax$ et $h = f - g$.

On a alors $f = g + h$ avec g linéaire et $\displaystyle\int_0^1 h = \int_0^1 f - \int_0^1 g = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(3,5 points)*

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$ ».

– *(initialisation)* $\mathscr{P}_0$ est vraie puisque $a^0 - 1 = 0$ est divisible par $a - 1$.

– *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On a $a^{n+1} - 1 = a^{n+1} - a + a - 1 = a(a^n - 1) + (a - 1)$. Comme par hypothèse de récurrence, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$, $a^{n+1} - 1$ est aussi divisible par $a - 1$.

– *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a donc bien :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad a^n - 1 \text{ est divisible par } a - 1$$

2) Supposons par l'absurde n non premier. On peut alors écrire $n = n_1 n_2$ avec $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}\backslash\{0, 1, n\})^2$. Mais alors $2^n - 1 = (2^{n_1})^{n_2} - 1$ est, d'après 1), divisible par $2^{n_1} - 1 \notin \{0, 1, 2^n - 1\}$ ce qui contredit la primalité de ce nombre.