UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques - 3ème année

MAG 2

Examen de deuxième session - Mercredi 24 juin 2015
Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*5 points*)
Lire attentivement l'énoncé en **annexe** (page suivante). En admettant tous les résultats des questions précédentes, **traiter uniquement la question 11.**

Exercice n°2 (*2,5 points*)
Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des x de X vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun x dans X tel que $A = f(x)$.

Exercice n°3 (*3,5 points*)
En raisonnant par équivalences, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+2} \geqslant 1 - x$.

Exercice n°4 (*3 points*)
On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\sin(1)}{2^n \sin(\frac{1}{2^n})}$$

Exercice n°5 (*2,5 points*)
Montrer que toute fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction linéaire ($x \mapsto ax$) et d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0;1]$. Y-a-t'il unicité de cette écriture ?

Exercice n°6 (*3,5 points*)

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.

ANNEXE

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $\mathscr{S} = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation *(E)*.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $(3x - 4y, 3y - 2x) \in \mathscr{S}$ alors $(x, y) \in \mathscr{S}$.

On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à $\mathscr{S}$ et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.

7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.

8. Montrer que : $x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$.

9. En déduire que : $x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$.

10. Montrer que :

- **10.1.** $3X - 4Y > 0$;
- **10.2.** $3Y - 2X > 0$;
- **10.3.** $3Y - 2X < Y$;
- **10.4.** $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).

11. Conclure.

12. Donner les cinq premiers couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n.