MAthématiques Générales 2

Lecture d'énoncés

Exercice n°1 *(CAPES externe - Deuxième composition 2013)*
Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question E.1.

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.

L'ensemble $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
On identifiera par la suite $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on note $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
En posant $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n, on note A^n la puissance n-ième de la matrice A. Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté par la matrice A dans la base canonique.
On définit, pour tout entier naturel n, u^n par : $u^0 = Id_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.
On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).
   1.1. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
   1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer qu'alors $\lambda = 1$. *On pourra considérer* $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.
2. Montrer que Ker $(u - Id) \cap$ Im $(u - Id) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det\,(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u, où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = det(A - XI_p) = \prod\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$.
3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base $(e_1, ..., e_p)$ une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \alpha_2 & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & \cdots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.
   4.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$.
   4.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.
   4.3. En déduire la limite de T^n, puis celle de A^n.
5. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant m$.
   On suppose également que $\text{Ker } (u - Id) \cap \text{Im } (u - Id) = \{0\}$.
   5.1. Montrer que $\text{Ker } (u - Id)$ et $\text{Im } (u - Id)$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par u.
   5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\text{Im } (u - Id)$ induit par u. Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u, distincte de λ_1.
   5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
   Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ |\lambda_i| < 1 \quad \textbf{ou} \quad \lambda_1 = 1,\ \text{Ker } (u - Id) \cap \text{Im } (u - Id) = \{0\} \text{ et } \forall i \in [\![2, m]\!],\ |\lambda_i| < 1$$

2. Déterminer si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, dans chacun des cas suivants :

2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6+\frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6+\frac{i}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ *(CAPES externe - Première composition 2014e)*

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 3.

Soit f une fonction définie sur $]0, 1]$, continue et décroissante sur $]0, 1]$. On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et la fonction I définie sur $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1],\ I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leqslant r_n \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\lim\limits_{x\to 0} I(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) et $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$. Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(Contrôle continu 2016)*

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 2.6.a.

- Le mot « suite » désignera toujours une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^\star$ ou sur une partie infinie de $\mathbb{N}^\star$. Une suite définie sur une partie infinie X de $\mathbb{N}^\star$ sera notée $(u_n)_{n\in X}$. Une suite définie sur tout $\mathbb{N}^\star$ sera notée par simplification (u_n).
- Une suite (u_n) sera dite convergente en moyenne (respectivement « convergente en moyenne vers ℓ ») si la suite (S_n) définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est convergente (resp. « converge vers ℓ »).

- Une partie E de $\mathbb{N}^*$ est dite de densité nulle si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}\cap\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}) = 0$.

2.3. On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ s'il existe un nombre réel Λ tel que la suite $(|u_n-\Lambda|)$ converge en moyenne vers 0 c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|u_k-\Lambda| = 0$.

Démontrer que si une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$, elle converge en moyenne vers Λ. La réciproque est-elle vraie ?

2.4. Dans cette question, (u_n) est une suite bornée et E une partie de $\mathbb{N}^\star$ de densité nulle dont le complémentaire dans $\mathbb{N}^\star$ est noté $\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}$. On suppose de plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}}$ converge vers Λ. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n-\Lambda|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5. Dans cette question, (u_n) est une suite bornée non nulle, et la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5.a. Pour tout naturel n, on note $B_n = \left\{S_p,\ S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}|u_k|\,,\ p\geqslant n\right\}$.
Démontrer l'existence du nombre réel $\alpha_n = \sup B_n$.

2.5.b. Démontrer que la suite $(\alpha)_n$ décroît et converge. Quelle est sa limite ?

2.5.c. On appelle E l'ensemble des naturels p tels que $u_p^2 \geqslant \alpha_p$.

Établir pour tout naturel n l'inégalité : $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}\cap\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|u_k|}{\sqrt{\alpha_k}}$.

En déduire que l'ensemble E est de densité nulle.

2.5.d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star\backslash\mathrm{E}}$ converge vers zéro.

2.6. **2.6.a.** Déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite bornée vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2.6.b. Démontrer que si deux suites (u_n) et (u'_n) bornées vérifient la propriété $\mathscr{P}$, il en est de même de la suite $(u_n.u'_n)$.

Exercice n°4 *(CAPES externe - Deuxième composition 2014e)*
Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 3.3.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.
Un nombre réel x est dit décimal s'il existe un entier n tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.
1. Démontrer que $\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}$ et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit x un nombre rationnel positif. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux et $b\neq 0$.

3.1. On suppose qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$, tels que $b = 2^\alpha\times 5^\beta$. Démontrer que x est décimal.

3.2. On suppose que x est un décimal non entier. Démontrer que si p est un diviseur premier de b, alors $p\in\{2,5\}$.

3.3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le rationnel x soit un nombre décimal.

Exercice n°5 *(CAPES externe - Première composition 2006)*
Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la questions 1.e.

2.2 Résultat 2.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série de terme général u_n soit convergente.

1.a. Montrer qu'on définit une suite de réels par la relation : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Quelle est la nature de cette suite ?

1.b. Justifier pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n$.

1.c. Montrer que si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général nu_n est convergente.

1.d. Montrer que si la série de terme général nu_n est convergente alors la suite de terme général nv_n converge vers 0.

Indication : On pourra éventuellement, après l'avoir justifiée, utiliser la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n-1} = \sum_{k \geqslant n} (v_{k-1} - v_k)$$

pour majorer l'expression nv_{n-1}, lorsque n est un entier naturel non nul.

1.e. En déduire que les séries de termes généraux respectifs nu_n et v_n sont simultanément convergentes et de même somme.

2. Dans cette question, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède qu'elle admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P[X > n]$ est convergente et qu'on a alors l'égalité : $E[X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P[X > n]$.

Exercice n°6 *(CAPES externe - Deuxième composition 2009)*

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 1.4)

Soient $(c_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction h par : $h(x) = -\dfrac{H(x)}{x^n}$.

1.1) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

1.3) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que : $|\zeta|^n > \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$.

1.4) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

Exercice n°7

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 3)a)

On cherche à résoudre l'équation différentielle $\quad ay'' + by' + cy = 0$

où a, b, c sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$. On veut trouver les fonctions y, deux fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient cette équation.

1) Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) forment un espace vectoriel réel que l'on notera $\mathscr{E}$.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) telles que l'application $W(y_1, y_2) : x \mapsto y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ ne s'annule pas. $W(y_1, y_2)$ est appelé le Wronskien des deux solutions y_1 et y_2 et on a $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

a) Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(x) & = & c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ y'(x) & = & c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{array}\right.$$

admet une solution unique $(c_1(x), c_2(x))$ et que c_1 et c_2 sont des fonctions continûment dérivables.

b) On suppose maintenant que y est solution de (E). Montrer que c_1 et c_2 sont des constantes.

c) En déduire que (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{E}$.

3) Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $y : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si r vérifie $ar^2 + br + c = 0$. Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle.

a) On suppose que le polynôme P a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($b^2 - 4ac > 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

b) On suppose que le polynôme caractéristique a une racine réelle double s ($b^2 - 4ac = 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{sx}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{sx}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

c) On suppose que le polynôme caractéristique a deux racines complexes non réelles conjuguées distinctes $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ ($b^2 - 4ac < 0$). Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ forment une base de $\mathscr{E}$.

Exercice n°8 *(Deuxième session 2014)*

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 4.

Soit $I = [a; b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*
On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

1. Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad |x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \quad$ et $\quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$.
2. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes et telles que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad \left|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} \quad$ et $\quad \left|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})\right| > \varepsilon$.
3. Montrer que : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$
4. Conclure.

Exercice n°9 *(Contrôle continu 2014)*

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 3.2.

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose : $P_n(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ et $P_0(x) = 1$.
Étant donné un entier naturel n, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(x)\sin x\,dx$

1.
   1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.
   1.2. Calculer $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[0,\pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.
   1.3. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n\left(\dfrac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$
   1.4. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$
   1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que sa limite est nulle.
2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.
   En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :
   2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$ $\qquad$ 2.2. $n \leqslant k \leqslant 2n$ $\qquad$ 2.3. $k \geqslant 2n+1$
   Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.
  3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

  3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$ (*Contrôle continu 2015*)

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 6.4.

6. Soit F une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $F(x) \leqslant ax + b$.

6.1. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, (|x - y| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

6.2. Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et montrer que $n_0 \leqslant \dfrac{x_0}{\eta_1} + 1$.

6.3. Montrer que : $\quad |F(x_0) - F(0)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$

6.4. Conclure.

$\boxed{\textbf{Exercice n°11}}$ (*Deuxième session 2015*)

Lire attentivement l'énoncé suivant. En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 11.

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $\mathscr{S} = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation *(E)*.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $(3x - 4y, 3y - 2x) \in \mathscr{S}$ alors $(x, y) \in \mathscr{S}$.

On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à $\mathscr{S}$ et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.

7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.

8. Montrer que : $x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$.

9. En déduire que : $x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$.

10. Montrer que :

  10.1. $3X - 4Y > 0$; **10.2.** $3Y - 2X > 0$; **10.3.** $3Y - 2X < Y$;

  10.4. $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).

11. Conclure.

12. Donner les cinq premiers couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n.