MAG 2

Examen de deuxième session - Juin 2014
Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*4 points*)
Lire attentivement l'énoncé en annexe (page suivante). En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 4.

Exercice n°2 (*3 points*)

1) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La proposition suivante :

$$\text{“}(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0) \iff [(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)]\text{”}$$

est-elle vraie ?

2) La proposition suivante : “$\forall x \in \mathbb{C}, \exists y \in \mathbb{C}, (x = 0 \text{ ou } xy = 1)$” est-elle vraie ?

On justifiera à chaque fois sa réponse en démontrant la propriété ou bien en exhibant un contre-exemple.

Exercice n°3 (*4 points*)

1) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^q - 1 = (X - 1)\sum_{k=0}^{q-1} X^k$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.

Exercice n°4 (*2,5 points*)
Soient x et y deux réels. Montrer que :

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq -3) \Longrightarrow (3x - 2y + xy \neq 6)$$

Exercice n°5 (*3,5 points*)
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Exercice n°6 (*3 points*)
Montrer que tout entier naturel supérieur à 2 possède au moins un diviseur premier. *On pourra procéder par récurrence forte ou bien introduire en le justifiant le plus petit diviseur strictement supérieur à 1 de n.*

ANNEXE

Le théorème de Heine

Soit $I = [a; b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*
On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

1. Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$$
2. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes et telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\left|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})\right| > \varepsilon$$
3. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$$
4. Conclure.