MAG 2

Corrigé rapide du contrôle du 4 avril 2014

Exercice n°1 (*4 points*)
L'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$ a entraîné que, pour tout naturel n, I_n est un entier relatif (question 3.1.) et que $I_n > 0$ (question 1.4.). On en déduit $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \geqslant 1$ ce qui contredit le résultat de la question 1.5. (qui affirme que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0). L'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$ est donc absurde et π est donc irrationnel.

Exercice n°2 (*3 points*)

1) La proposition est vraie. Soient en effet x et y dans $\mathbb{R}$. Si $x = y$ alors $k = 0$ convient (en fait n'importe quel réel k convient). Si $x \neq y$ alors $k = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ convient (l'inégalité large proposée étant alors une égalité).

2) La proposition est fausse puisque la fraction $\dfrac{4}{7}$ est irréductible alors que ce n'est pas le cas de $\dfrac{6}{9} = \dfrac{4+2}{7+2}$.

Exercice n°3 (*2,5 points*)
Soit n un entiers naturel. Supposons n impair (pour montrer "A ou B", on suppose (non A) et on montre B). On peut alors écrire $n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Mais alors $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k + 1)k$. L'un des deux entiers consécutifs k et $k + 1$ étant pair, on en déduit que $n^2 - 1$ est multiple de 8.

Exercice n°4 (*2,5 points*)
Soient x et y deux réels. On prouve l'implication proposée en démontrant sa contraposée (qui lui est équivalente). Supposons donc que $x + y + xy = -1$. On a alors $x + y(x + 1) = -1$ soit $(x + 1)(y + 1) = 0$. On en déduit que $x = -1$ ou $y = -1$. On a donc bien montré non($x \neq -1$ et $y \neq -1$).

Exercice n°5 (*4,5 points*)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition "$\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad n = 2^p(2q + 1)$".

- *(initialisation)* $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout entier k de $[1, n]$ et on montre qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Deux cas sont possibles :
  - ou bien $n + 1$ est impair et l'on écrit $n + 1 = 2^0(2\frac{n}{2} + 1)$ avec $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
  - ou bien $n + 1$ est pair et on pose $k = \frac{n+1}{2}$. k est alors un entier de $[1, n]$ (car $n \geqslant 1$). Par hypothèse de récurrence, on peut alors considérer deux naturel p et q tels que $k = 2^p(2q+1)$. On a alors $n + 1 = 2k = 2^{p+1}(2q + 1)$. Comme $p + 1 \in \mathbb{N}$, on a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* Par le théorème de récurrence forte, on a finalement montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad n = 2^p(2q + 1)$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(6 points)*

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\text{“}\forall(x_1,\cdots,x_n)\in I^n,\ \forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\in I \text{ et } f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)\right)\text{”}$$

- *(initialisation)* Soient $(x_1,x_2)\in I^2$ et $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}_+^2$. Supposons $\lambda_1+\lambda_2=1$. On a alors $\lambda_1\in[0,1]$ et $\lambda_2=1-\lambda_1$. Par définition de la convexité, on a $f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+(1-\lambda_1)f(x_2)$. On a donc $f\left(\sum_{k=1}^{2}\lambda_kx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{2}\lambda_kf(x_k)$ avec bien sûr $\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2\in I$ et $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soient $(x_1,\cdots,x_{n+1})\in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}_+^{n+1}$. Supposons $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1$.
  - Si $\lambda_{n+1}=1$ alors tous les autres λ_k sont nuls et $f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k\right)=f(x_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kf(x_k)$.
  - Sinon, $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k=\lambda_{n+1}x_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k=\lambda_{n+1}x_{n+1}+(1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right)$. En posant, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\mu_k=\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$, on a $(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in\mathbb{R}_+^n$ et $\sum_{k=1}^{n}\mu_k=\frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}}=1$. Par hypothèse de récurrence on a donc $\sum_{k=1}^{n}\mu_kx_k\in I$. L'égalité $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k=\lambda_{n+1}x_{n+1}+(1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_kx_k\right)$ entraîne alors $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k\in I$ mais aussi, par convexité de f,

    $$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k\right)\leqslant\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)+(1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_kx_k\right)$$

    et donc, toujours par hypothèse de récurrence et puisque $1-\lambda_{n+1}>0$,

    $$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kx_k\right)\leqslant\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)+(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\mu_kf\left(x_k\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kf\left(x_k\right)$$

- *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a finalement montré que :

  $$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \forall(x_1,\cdots,x_n)\in I^n,\ \forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_kf(x_k)\right)$$