UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques - 3ème année

MAG 2

Contrôle continu du vendredi 4 avril 2014

Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une très large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*4 points*)

Lire attentivement l'énoncé en annexe (page suivante). En admettant tous les résultats des questions précédentes, traiter uniquement la question 3.2.

Exercice n°2 (*3 points*)

1) La proposition suivante : "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$" est-elle vraie ?

2) La proposition suivante : "Pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, si la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible alors la fraction $\dfrac{p+2}{q+2}$ l'est aussi" est-elle vraie ?

On justifiera à chaque fois sa réponse en démontrant la propriété ou bien en exhibant un contre-exemple.

Exercice n°3 (*2,5 points*)

Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que :

"n est pair ou $n^2 - 1$ est divisible par 8"

Exercice n°4 (*2,5 points*)

Soient x et y deux réels. Montrer que :

$$(x \neq -1 \text{ et } y \neq -1) \Longrightarrow (x + y + xy \neq -1)$$

Exercice n°5 (*4 points*)

À l'aide d'une récurrence forte et d'une disjonction de cas, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad n = 2^p(2q+1)$$

Exercice n°6 (*6 points*)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Soit f une fonction convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Démontrer, par récurrence sur n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \right)$$

On pourra remarquer que, si $\lambda_{n+1} \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right)$.

ANNEXE

Une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$$

1.

   1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.

   1.2. Calculer $\underset{x\in[0,\pi]}{\text{Sup}} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.

   1.3. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n\left(\dfrac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$

   1.4. Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$

   1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que sa limite est nulle.

2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.

   En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

   2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 2.2. $n \leqslant k \leqslant 2n$ 2.3. $k \geqslant 2n+1$

   Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

   3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

   3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.