Université de Rennes 1 1998-1999

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du Mercredi 8 septembre 1999

Questions de cours

1) Soit $x_0 \in [a, b]$ et $\epsilon > 0$. Pour tout x de $[a, b]$ on a $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$. Donc, pour avoir $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, il suffit de prendre $x \in [a, b]$ tel que $|x - x_0| < \epsilon$ (puisque $k < 1$).

2) Soit a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ème $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a + h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + h^n \epsilon(h)\ ,$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Exercice n°1

1) Supposons par l'absurde f positive sur $]a, b[$. Pour tout x de $]a, b[$ on a alors $\dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} = \dfrac{-f(x)}{b - x} \leq 0$ et donc à la limite $f'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Par suite f prend une valeur strictement négative sur $]a, b[$. De même, si on suppose f négative sur $]a, b[$. Pour tout x de $]a, b[$ on a alors $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} = \dfrac{-f(x)}{a - x} \leq 0$ et donc à la limite $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Par suite f prend une valeur strictement positive sur $]a, b[$.

2) f, continue sur le segment $[a, b]$, est bornée et atteint ses bornes inférieure m et supérieure M. La question précédente montre que $m < 0 < M$. D'autre part, m et M sont atteints en $x_0, y_0 \in]a, b[$. f étant dérivable en ces points, on a $f'(x_0) = f'(y_0) = 0$ (extremum local).

Exercice n°2

On utilise l'outil des développements limités : au voisinage de 0 et à l'ordre 3 (on divise par x^3). On a $e^{2x} = 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, donc :
$\ell n\,(1 + e^{2x}) = \ell n\,\left(2 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right) = \ell n\, 2 + \ell n\,\left(1 + x + x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)$. Comme $\ell n\,(1 + X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X)$ on déduit : $\ell n\,(1 + e^{2x}) = \ell n\, 2 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$. D'autre part, $\sqrt{1 - 2x} = (1 - 2x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ donc :

$$\frac{\ell n\,(1 + e^{2x}) + a\sqrt{1 - 2x} + b}{x^3} = \frac{\ell n\, 2 + a + b + (1 - a)x + \frac{1}{2}(1 - a)x^2 - \frac{1}{2}ax^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3}$$

Cette quantité admet une limite finie quand x tend vers 0 si et seulement si $a = 1$ et $b = -1 - \ln 2$.
On a alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + e^{2x}) + a\sqrt{1 - 2x} + b}{x^3} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$

1)

a) Soit $(x,\lambda) \in \mathbb{R}^2$. f étant de classe C^2, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à f entre x et $x+\lambda$:
$f(x+\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c)$ or $f''(c) \leq |f''(c)| \leq M$ donc $\frac{\lambda^2}{2} f''(c) \leq \frac{\lambda^2}{2} M$ et par suite, $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M \geq f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c) \geq 0$ puisque f est positive.

b) Supposons $M \neq 0$. x étant un nombre fixé, le trinôme du second degré en λ $\quad f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M$ a un signe constant donc un discriminant négatif : $f'(x)^2 - 2Mf(x) \leq 0$.
Si $M = 0$ (c'est à dire $f'' = 0$), l'inégalité du a) devient $\forall x, \lambda,\ f(x) + \lambda f'(x) \geq 0$ ce qui entraîne la nullité de f' et on a donc bien encore $0 = |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)} = 0$.

2)

a) L'inégalité du 1b) donne $|f'(x_0)| \leq 0$ donc $f'(x_0) = 0$. On applique alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à f entre x et x_0 : il existe un c entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(c) \quad \text{soit } f(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c)$$

b) $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{|x - x_0|}{x - x_0} \sqrt{f''(c)}$. f'' étant continue, on a $\sqrt{f''(c)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \sqrt{f''(x_0)}$ et par suite, $\displaystyle\lim_{x \to x_0,\, x > x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{f''(x_0)} > 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0,\, x < x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{f''(x_0)} < 0$.
g n'est donc pas dérivable en x_0.