Examen du Mercredi 8 septembre 1999 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (4 pts), II (4 pts), III (8 pts)

Question de cours

1) Montrer qu'une fonction définie et contractante sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$.

2) Enoncer le théorème de Taylor-Young.

Exercice n°1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = f'(b) \neq 0$. On suppose par exemple que $f'(a) > 0$.

1) Montrer que f prend sur $]a, b[$ une valeur strictement positive et une valeur strictement négative.
(on pourra raisonner par l'absurde et considérer les taux d'accroissements de f en a et en b)

2) En déduire que f' s'annule en au moins deux points distincts de $]a, b[$.

Exercice n°2

Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{\ell n\,(1 + e^{2x}) + a\sqrt{1 - 2x} + b}{x^3}$$

soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°3

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1) On note $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2} M \geq 0$

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2M.f(x)}$

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que :
$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.