Université de Rennes 1 2001-2002

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 25 juin 2002 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (6 pts), II (5 pts), III (5 pts)

Questions de cours

1) Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

2) Soient f et g deux fonctions k fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que fg est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + \mathbf{C}_k^1 f^{(k-1)}g' + \cdots + \mathbf{C}_k^i f^{(k-i)}g^{(i)} + \cdots + fg^{(k)} \quad \text{(formule de Leibniz)}$$

Exercice n°1

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie pour $x(x+1) \neq 0$ par $f(x) = 1 - x - \dfrac{2x\ell n\,|x|}{1+x}$.

1)

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

2) Donner un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de -1. En déduire :

a) f est prolongeable par continuité en -1,

b) ce prolongement est dérivable en -1,

c) la limite quand x tend vers -1 de $\dfrac{f(x)}{(x+1)^2}$.

Exercice n°2

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On rappelle que cela signifie l'existence d'un réel positif k tel que

$$\forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

2) On suppose en outre que f ne s'annule pas sur $[a, b]$. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est lipschitzienne sur $[a, b]$.

3) Montrer que cette dernière propriété n'est plus valable si on remplace $[a, b]$ par $]a, b]$ (donner un contre-exemple).

T. S. V. P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

1) On note $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$. Peut-on affirmer que M_2 est fini ?

2) On suppose à présent que M_2 est fini. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in [0, +\infty[$.

a) En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, au voisinage de x_0, pour un accroissement $+h$ (c'est à dire entre x_0 et $x_0 + h$) puis la même formule pour un accroissement $-h$ (c'est à dire entre $x_0 - h$ et x_0), montrer que

$$|f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)| \leq h^2 M_2$$

b) Retrouver l'inégalité précédente en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x + h) - f(x)$ sur l'intervalle $[x_0 - h, x_0]$, puis le même théorème à f' sur un intervalle judicieux.