DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Corrigé rapide de l'examen du 12 septembre 2001

Questions de cours

1) On peut en divisant par le coefficient dominant se ramener au cas d'un polynôme unitaire

$$A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{2n} X^{2n} + X^{2n+1} .$$

Puisque $\lim_{x \to -\infty} A(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A(a) < 0$ (resp. $b \in \mathbb{R}$ tel que $A(b) > 0$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c entre a et b tel que $A(c) = 0$.

2) si on prend a et b dans I avec $a < b$, l'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ avec $f'(c) > 0$ entraîne que $f(a) < f(b)$.

3) Soit a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ème $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a + h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + h^n \epsilon(h) ,$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Le "reste" $h^n \epsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule énoncée est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a.*

Exercice n°1

1) Posons $x = 1 + t$. On a : $\ell n\, x = \ell n\,(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^3 \varepsilon_1(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$. On déduit $x^2 \ell n\, x = (1 + 2t + t^2)\ell n\,(1+t) = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^3 \varepsilon_2(t)$ et comme $x^2 - 1 = 2t + t^2$, pour $x \neq 1$, on a $f(x) = \dfrac{1 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)}{2+t}$. A l'aide d'une division suivant les puissances croissantes, on obtient finalement :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}t^2 + t^2 \varepsilon_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon_4(x) \ \text{ avec } \lim_{x \to 1} \varepsilon_4(x) = 0$$

2) On considère l'équation différentielle (E) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

a) Sur chacun des intervalles proposés, l'équation sans second membre s'écrit :

$$y' = \frac{-2}{x(x^2-1)} y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

et admet donc pour solutions $y = \dfrac{\lambda x^2}{x^2-1}$. La recherche d'une solution particulière de l'équation complète par la méthode de la variation de la constante conduit à $\lambda' = \dfrac{1}{x}$. On a donc finalement, sur chacun des intervalles, une solution de la forme $y = \dfrac{\lambda_i x^2}{x^2-1} + \dfrac{x^2 \ell n\,|x|}{x^2-1}$.

solution sur $\mathbb{R}$ est donc f. f est paire, continue en 0, avec $f(0)=0$, et aussi continue en 1 avec d'après 1) $f(1)=\frac{1}{2}$.

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x\ell n\, x}{x^2-1}\to 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. D'autre part, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}(x-1)+(x-1)\varepsilon(x)\to\dfrac{1}{2}$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$.

f est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)(2x\ell n\, x+x)-2x^3\ell n\, x}{(x^2-1)^2}\to 0=f'(0)$.

Exercice n°2

1)
a) Il est immédiat que f_n est dérivable et que l'on a $f_n'=f_{n-1}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$.

b) L'équation $P_0(x)=\lambda e^x$ admet pour unique solution $x_0=-\ell n\,\lambda$ qui est bien strictement positif. Supposons alors la propriété vérifiée au rang n fixé. f_{n+1}, qui est dérivable sur $[0,+\infty[$, a alors une dérivée qui s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}^+$. f_{n+1}' ne change donc qu'une fois de signe sur cet intervalle et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$, f_{n+1} est croissante sur $[0,x_n]$ et décroissante sur $[x_n,+\infty]$. Comme $f_{n+1}(0)=1-\lambda>0$, f_{n+1} s'annule une unique fois sur $[0,+\infty[$ en un $x_{n+1}\in]x_n,+\infty[$.
On a donc montré au passage que la suite (x_n) est strictement croissante.

2)a) La formule de Mac-Laurin appliquée à la fonction $x\mapsto e^x$ (qui est de classe C^∞ assure l'existence de $\theta\in]0,1[$ tel que : $e^x=P_n(x)+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$.

b) On a en particulier $e^{x_n}=P_n(x_n)+\dfrac{x_n^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_n x_n}$. Si la suite (x_n) est bornée (majorée en valeur absolue par M), on a alors $|P_n(x_n)-e^{x_n}|\le\dfrac{M^{n+1}}{(n+1)!}e^M\to 0$.

3) Si la suite (x_n) était bornée, étant d'autre part monotone, elle convergerait vers un certain réel ℓ donc par continuité $P_n(x_n)-e^{x_n}=(\lambda-1)e^{x_n}$ convergerait vers $(\lambda-1)e^{\ell}\neq 0$. Contradiction.
La suite (x_n) ne peut donc pas être bornée. Comme elle est strictement croissante, elle diverge donc vers $+\infty$.